REPERES - IREM . N° 16 - juillet 1994

LE THEATRE AU SERVICE DE L'ALGEBRE AU COLLEGE

Michèle MUNIGLIA
Irem de Lorraine

A Jacqueline MARTIN

Le théâtre au service de l'algèbre : deux termes *théâtre* et *algèbre* qui n'ont pas *a priori* de rapport entre eux. L'activité proposée dans cet article va tenter de prouver que les deux domaines ne sont pas si étrangers l'un à l'autre et que l'un "le théâtre" peut se mettre au service d'une meilleure compréhension de l'autre "l'algèbre" et cela à travers une approche non conventionnelle.

Pourquoi une telle idée ? Elle est née de la conjonction de plusieurs phénomènes...

D'abord, comme tout professeur de mathématiques, je me suis trouvée confrontée à la difficulté d'enseigner l'algorithme de résolution des équations, notamment en classe de cinquième. J'ai utilisé de nombreuses méthodes classiques et moins classiques sans obtenir le résultat escompté : j'avais le sentiment que, moyennant une quantité d'énergie importante, on pouvait arriver tant bien que mal à des possibilités de reproduction qui tenaient plus du mimétisme que d'une véritable appropriation, avec les conséquences connues de tous : l'oubli ou, pire, la confusion totale après les vacances...

Ensuite, parallèlement, j'ai eu l'occasion de découvrir le théâtre...

Et si Louis Jouvet avait raison lorsqu'il résume l'activité théâtrale en disant *"qu'il s'agit de descendre de l'abstrait pour aller à la sensation"* ? Et si ce qui caractérise la démarche théâtrale pouvait s'appliquer à la pédagogie des mathématiques ? Et si la compréhension profonde d'un texte littéraire passe par la sensation, pourquoi l'appropriation de l'abstraction mathématique ne pourrait-elle pas passer, elle aussi, par la sensation ?

D'où l'idée de "descendre à la sensation" sur le sujet des équations de cinquième et cela par le moyen du théâtre.

Il ne restait qu'à donner une consistance à toutes ces idées et c'est le résumé d'un travail de recherche et d'expérimentation de deux années que je vous propose ici...

Pour ce qui est du contenu mathématique, il me faut d'abord préciser que l'objectif primordial de cette séquence est d'apprendre à *résoudre des équations*, c'est-à-dire qu'il ne s'agit pas de l'étude de *la mise en équation* (qui pourra se faire en parallèle ou plus tard) mais de l'étude du savoir-faire qui permet, *après* la mise en équation, de trouver correctement la solution de l'exercice proposé.

Bien que cette expérience se soit déroulée en classe de cinquième où seules les équations de type " $x + a = b$ ", " $-x + a = b$ " et " $ax = b$ " (a et b entiers) sont exigibles, il n'était pas possible de limiter l'expérimentation à ces seules difficultés, la richesse venant notamment de la façon dont cette méthode permet des clarifications par rapports aux obstacles "classiques", en particulier en ce qui concerne la confusion entre "transposition" et "division". C'est pourquoi il ne faudra pas être surpris par des équations plus complexes qui mettent en présence plusieurs difficultés : transposition, division, fraction, et même essai de littéralisation...

En ce qui concerne l'aspect pédagogique, le point essentiel me semble résider dans le fait que les élèves sont les "artisans créateurs" de leur propre apprentissage car, bien que le jeu puisse apparaître comme particulièrement abstrait, il n'en est pas moins , le plus souvent, le résultat de l'invention des élèves eux-mêmes.

Mais on ne peut malheureusement pas arrêter l'analyse didactique à cette phrase... Ce serait laisser croire que, dès que l'enfant a créé le mouvement, il s'est approprié la notion mathématique par une sorte d'intériorisation spontanée au caractère quelque peu magique ! Le problème est hélas plus complexe et cette "descente à la sensation" ou cette "personnalisation de l'abstrait" ne suffisent pas à réaliser l'appropriation véritable. Il est donc indipensable de "remonter à l'abstrait" par le biais d'un travail de formalisation qui se traduit par un retour à une activité "papier-crayon" fondamentale, même si ce n'est pas elle qui est mise en exergue dans cet article.

Peut-être Louis Jouvet a-t-il encore raison lorsqu'il dit :

"... et puis il faut du personnel aller à une sorte d'impersonnalité"...

PREMIERE PARTIE

La méthode "théâtrale" de résolution d'équations commence sans préalables, c'est-à-dire sans *énoncer de règles* quelles qu'elles soient.

1 — Demi-tour et regroupement :

A la première séance, on écrit au tableau :

$$x + 2 = 5$$

en disant au passage aux élèves qu'il s'agit de ce que l'on appelle en mathématiques une *équation*, le but étant de *découvrir le nombre représenté par la lettre x*, puis on passe tout de suite à la mise en scène, qui se traduit par la situation représentée dans le cadre ci-dessous (figure 1).

Huit élèves sont sollicités : l'un d'eux porte un masque et représente " x ", deux d'entre eux se placent côte à côte à la suite de celui qui représente " x ", en ménageant un petit espace, puis on dispose une chaise et les cinq derniers se placent à leur tour, comme sur la figure.

Tous les enfants sont alors *face au public*.

Avant de donner des règles de déplacement appelées aussi *mouvements de scène*, on fait répéter aux "enfants spectateurs" la traduction mathématique de la mise en scène qu'ils ont sous les yeux.

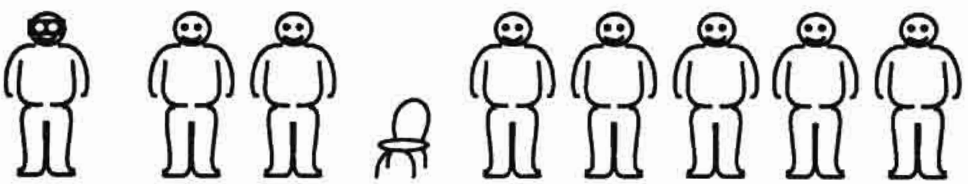
Le premier "mouvement de scène" a ensuite pour but *d'isoler le personnage masqué*. Pour cela, les deux camarades ont la possibilité de se déplacer *autour de la chaise dans le sens de la marche* ; le mouvement terminé, la situation est alors : un personnage masqué isolé à gauche de la chaise, la chaise, puis les cinq camarades qui n'ont pas bougé et les deux autres qui, du fait de leur déplacement, se retrouvent *dos au public* ; ce qui se traduit par la figure 2 de la page suivante.

Nous avons donc introduit de ce fait une règle supplémentaire :

" *si l'on est situé face au public, on est* positif, *alors que si l'on est dos au public on est* négatif. "

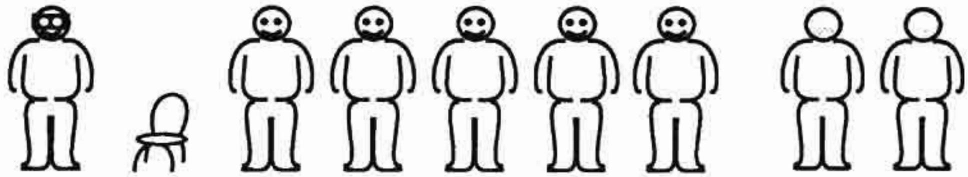
Le mouvement de scène suivant va consister à *réaliser des couples* avec les enfants qui ont la possibilité de *se mettre face à face*. Ainsi les deux enfants qui tournent le dos au public vont se décaler pour se placer en face de deux

Fig. 1 (traduction de l'équation)



$x + 2 = 5$

Fig. 2 (l'équation après transposition)



$x = 5 - 2$

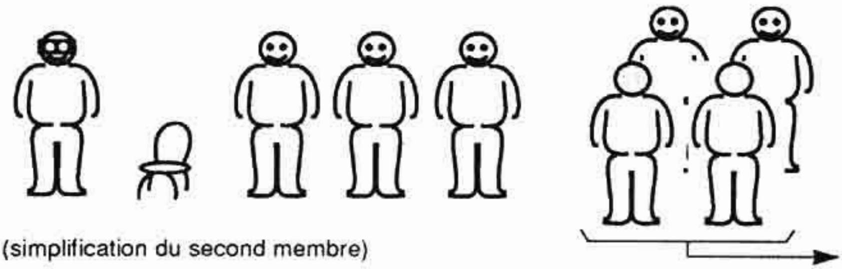
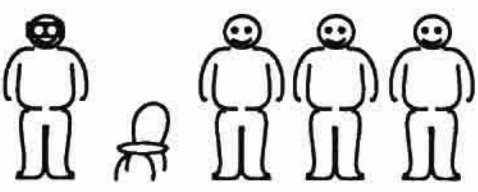


Fig. 3 (simplification du second membre)

enfants parmi les cinq qui sont situés face au public.

Après s'être donné la main, les couples ainsi formés *quittent la scène* (cf. figure 3).

Il reste alors l'élève masqué, la chaise et trois enfants *face au public* :



ce qui se traduit par : $\mathbf{x} = \mathbf{3}$ ...

On propose ensuite aux enfants de réaliser seuls la mise en place et les mouvements de scène correspondant aux équations suivantes :

$$\mathbf{x} - 3 = 7\,,$$

$$\mathbf{x} + 2 = -5\,,$$

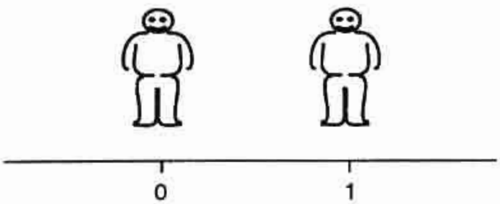
$$\mathbf{x} - 5 = -7\,.$$

L'intérêt des exercices présentés réside dans le fait que chemin faisant, les élèves effectuent des opérations telles que " $5 - 2$ ", " $7 + 3$ ", " $-5 - 2$ ", " $-7 + 5$ ", par la simple création de couples "particule-antiparticule" : c'est le calcul "en action" qui peut être pratiqué sans discours préalable, sans règle.

On pourrait d'ailleurs imaginer de lancer cette séquence sans avoir abordé le calcul sur les relatifs.

Pour ma part (dans ma progression) la séquence arrive après avoir introduit les relatifs, l'ordre sur ceux-ci, ainsi que les opérations. Cette étude est faite pas le biais de la droite graduée et des *translations* sur cette droite, réalisées aussi par le théâtre.

Ainsi pour représenter " – 2 + 3 " sur une droite graduée matérialisée par le bord des dalles de la classe où deux élèves représentent respectivement " 0 " et " 1 ", l'élève va effectuer des déplacements :



1 — il se positionne en " – 2 " ; sur proposition des enfants il est situé deux pas à gauche de " 0 " et il est dos au public, ce qui est redondant, bien sûr.

2 — " ajouter 3 " signifie avancer de trois pas, c'est-à-dire se déplacer de la gauche vers la droite. Avec deux pas l'élève se retrouve à " 0 ", *il se retourne* et il lui reste *un pas* à faire donc : " – 2 + 3 = 1 ".

La redondance signalée est en fait intéressante car le retournement ou non est une excellente traduction des problèmes de *valeurs absolues* sous-jacents : en effet, pour reprendre l'exemple précédent, partant de " – 2 " où je me rends après avoir fait deux pas à partir de " 0 ", il est clair que trois pas vont m'obliger à franchir le " 0 " de " 3 – 2 = 1 " pas. Ainsi, petit à petit, les pas et les passages de " 0 " avec *retournement* vont faire naître les règles de calcul qui s'étendent ensuite aux nombres à virgule.

C'est dans ce contexte de savoirs sur les opérations qu'est abordé le problème des équations. La mise en scène "particule-antiparticule" est donc une *deuxième méthode* d'approche et permet une révision et parfois un déblocage.

En effet, l'image mentale des couples qui s'annulent est peut-être plus facile à retrouver que l'image de la translation. On peut à ce niveau tenter une hypothèse "didactique" : la méthode des translations ne fait pas quitter le domaine mathématique. En effet, il faut avoir dans sa tête la droite graduée qui n'est pas un outil facile en début de 5ème et, de plus, il faut posséder un bonne latéralisation pour démarrer le mouvement dans le bon sens.

La deuxième méthode (anihilation entre "particules" et "antiparticule") est entièrement théâtrale : la seule préoccupation est de savoir si les acteurs sont ou non dans le même sens par rapport au public. Dans cette façon de faire, la représentation théâtrale fait travailler sur les nombres en tant qu'entités et non en tant qu'opérateur contrairement à l'autre méthode.

Fermons cette parenthèse et revenons au travail sur les équations. Pour faire le point : à ce stade du travail, *seule la transposition a été travaillée*. Aucune règle n'a été formulée mais les enfants ont écrit systématiquement la traduction mathématique de chaque mouvement de scène. On fait un aller-retour incessant entre expression corporelle et expression écrite qui permet à la règle formelle de transposition de "s'institutionnaliser".

A noter : la traduction mathématique intervient *après* le mouvement de scène, c'est-à-dire que le tableau théâtral s'inscrit alors dans un plan perpendiculaire au sol et contenant le bord des plaques du sol sur lesquelles on s'appuie. De ce fait, *la transposition est associée dans l'espace à un plan frontal.*

2 — Retournement :

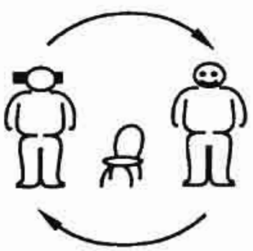
Pour poursuivre le travail, on peut proposer aux élèves l'équation :

$$3 - x = 4 .$$

Par un jeu équivalent à celui qui a été proposé précédemment (voir les étapes dans l'encadré de la page suivante), on obtient facilement :

$$“ - x = 1 ”$$

mais ce résultat n'est pas satisfaisant. En effet, tous les enfants ont bien noté que l'objectif est “ **x** ” et il est gênant que l'enfant masqué soit dos au public :



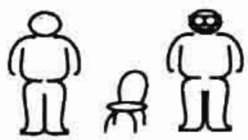
$$- x = 1$$

A partir de ce moment, on peut noter *une bascule* dans le comportement des élèves : d'acteurs dirigés qui ont dû accepter les règles du jeu de départ, ils deviennent créatifs en proposant des mouvements de scène qui doivent résoudre les problèmes qui se posent. Il est clair qu'alors l'élève devient acteur de son propre apprentissage.

Ainsi dans la situation “ – x = 1 ”, les déplacements simultanés des élèves permet d'obtenir par “double transposition” :

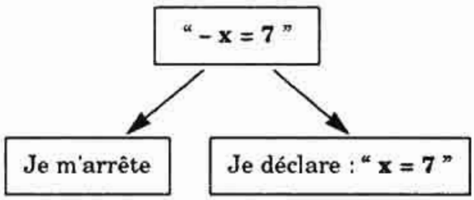
$$x = - 1 ,$$

ou plus exactement :



$$- 1 = x$$

Rappelons à ce propos la difficulté notée par G. Vergnaud dans “Construction des savoirs” ; face à une telle difficulté, l'élève réagit le plus souvent dans le cadre d'une alternative du type :

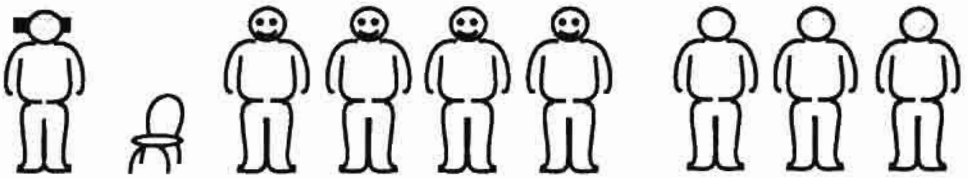


Cet “obstacle” est ici en partie inexistant : j'ai déjà expliqué que la situation “je m'arrête” est rejetée spontanément et que le mouvement proposé implique un déplacement des deux acteurs et donc que l'on ne peut retenir la solution “ x = 7 ”. Le principal avantage de cette méthode est de pouvoir, par le

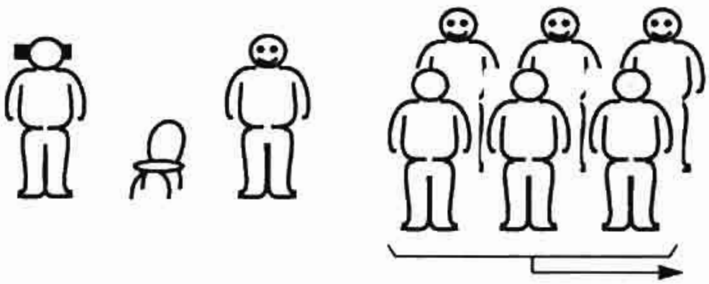
Encadré 1 : résolution de l'équation $3 - x = 4$

1) traduction de l'équation : $3 - x = 4$

2) transposition : $-x = 4 - 3$



3) simplification du second membre :



biais du jeu, donner à un élève qui transposerait " $-x = 7$ " en " $x = 7$ ", une *explication* "incontournable". Après une pratique régulière, il n'est d'ailleurs pas rare de voir des élèves proposer, d'entrée de jeu, de remplacer une équation comme " $-x - 3 = -5$ " par " $x + 3 = 5$ " ...

La justification de ce résultat peut aussi être donnée de façon simple : en effet, le spectateur peut aller "regarder l'équation par derrière". Rien n'a changé pour elle, c'est donc *la même* mais la lecture que l'on en fait est différente selon que l'on est placé devant ou derrière...

Il faut, à l'issue de cette première partie apporter quelques précisions essentielles :

— la méthode décrite ne s'embarrasse d'*aucun* *formalisme* au niveau du langage (les règles de transposition ne sont pas énoncées ou, si elles le sont, c'est sur proposition des élèves), mais demande une grande rigueur lorsque l'on passe à l'écriture. Elle joue aussi sur l'opposition entre dynamique de groupe au niveau de l'exécution théâtrale et recherche individuelle quand il s'agit de transcrire sur sa feuille.

— la méthode utilise les notations définitives et ne s'embarasse pas de notations " +(–) " et " – (–) " (tant au niveau de la droite graduée que des équations). On a donc *choisi* de développer les capacités pour ajouter ou soustraire un nombre positif à un nombre positif ou négatif.

Les notations " +(–) " et " – (–) " seront introduites ultérieurement et seulement lorsque le calcul décrit sera totalement maitrisé. Leur introduction et leur pratique déboucheront sur la simplification

« + (–) c'est – » et « – (–) c'est + »

qui ramène au schéma précédent et qui fait de celui-ci, à nos yeux, le noyau dur de l'apprentissage. A noter aussi que les nombres positifs sont d'entrée de jeu considérés comme confondus avec les nombres naturels.

3 — En guise de synthèse :

Pour clôturer cette première étape, on peut proposer en guise de première synthèse une équation du type :

$$\mathbf{2x + 2 = x + 4}$$

avec introduction de "**x**" dans chaque membre. Le schéma de déroulement proposé par les élèves est le plus souvent du type de celui qui est schématisé sur la page suivante (encadré 2).

C'est-à-dire que la mise en scène rend naturel le regroupement des gens masqués et des élèves ordinaires. La réduction des termes semblables si difficile à faire appréhender prend ici un sens physique : il ne viendrait à l'idée de personne (même des plus confus) de mélanger des "familles" différentes !

La règle couple "particule-antiparticule" fonctionne ensuite aussi bien sur les gens masqués que sur les autres...

L'écriture " $2x - x = 5 - 3$ " est exigée, mais selon le bon vouloir du metteur en scène, elle peut être " $-x + 2x = -3 + 5$ " et on entérine au passage le fait que $2x - x = -x + 2x$ et, qu'au fond, cela revient à faire " $(2-1)x$ ".

Si l'idée spontanée de regrouper les familles conduit à un déplacement différent qui mène à l'écriture : $3 - 5 = x - 2x$, on laisse l'expérience se dérouler jusqu'au bout... l'issue est la même mais la mise en scène, nécessitant plus de mouvements de scène, est délaissée au profit de l'autre. Au passage s'introduit l'idée que si plusieurs mises en scène sont possibles, il en existe peut-être de plus habiles qu'il est judicieux de choisir. Je veux même insister ici sur le fait que le deuxième jeu théâtral pour une même équation, résulte de l'imagination des élèves. Il n'est pas téléguidé, il est le fruit d'une certaine émulation qui naît du côté ludique de l'activité.

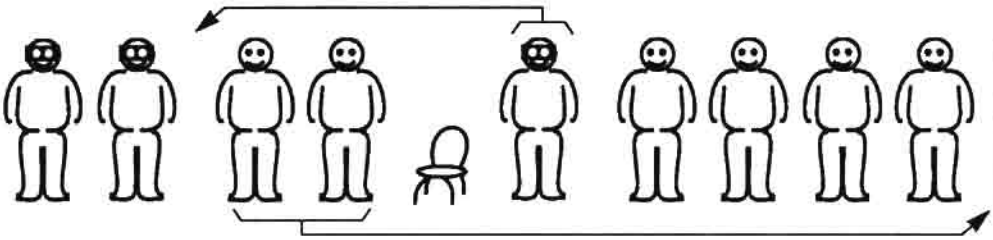
Les écritures côte à côte :

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= x + 4 \\ 2x - x &= 4 - 2 \\ x &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 2 &= x + 4 \\ 2 - 4 &= x - 2x \\ -2 &= -x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

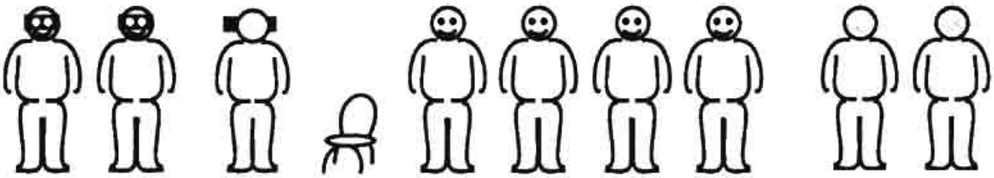
obtenues chemin faisant sont les premiers pas vers une formalisation "sans douleur"

Encadré 2 : résolution de l'équation $2x + 2 = x + 4$

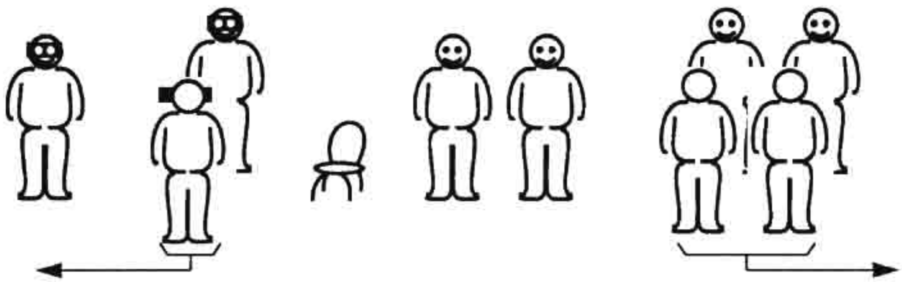
1) traduction de l'équation $2x + 2 = x + 4$



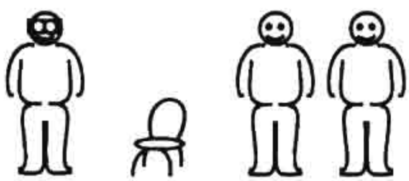
2) après une double transposition : $2x - x = 4 - 2$



3) simplification de chaque membre



4) le résultat : $x = 2$



car elle repose sur une image mentale simple et fonctionnelle.

A ce stade on passe donc progressivement à un travail classique, sous forme de résolution d'équations appartenant aux différents types. Chaque fois que le besoin s'en fait sentir, si une difficulté émerge, on revient à la mise en scène en guise de correction. Ainsi pour une faute de signe (tellement classique...), on n'invoque pas le retour à la règle mais on oblige l'élève à reconstruire le scénario (exemple : 3 élèves de face donneraient 3 élèves de dos donc,... etc.) d'abord de manière effective puis, petit à petit, uniquement dans sa tête pour créer chez lui le recours à l'image mentale, indispensable lorsqu'il est seul face à la difficulté.

DEUXIEME PARTIE

Après avoir parcouru l'itinéraire précédent et pour aller plus loin, il faut aborder le problème de la division qui est, en matière d'équations, le deuxième obstacle à franchir.

1 — L'opération "tombe juste"

On propose l'équation " **2x = 4** " (voir figure 4 ci-dessous).

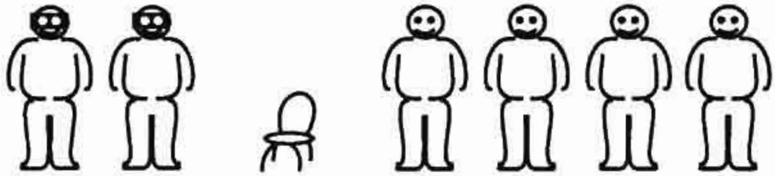
La première idée suggérée à partir de la mise en place initiale des six élèves nécessaires pour "écrire" l'équation, est d'essayer d'investir la méthode et les règles vues précédemment, c'est-à-dire que l'un des " x " va se déplacer...

Mais très rapidement la situation théâtrale met en évidence que l'isolement d'un " x " ne peut être réussi de cette façon.

La nécessité d'un *nouveau mouvement de scène* se fait alors sentir et c'est cela qui est important. Même si les enfants ne sont pas capables de l'inventer complétement sans l'aide du professeur, ils en ont ressenti le besoin.

La seule façon, ici, de séparer les " x " est donc de dédoubler l'équation en obligeant à

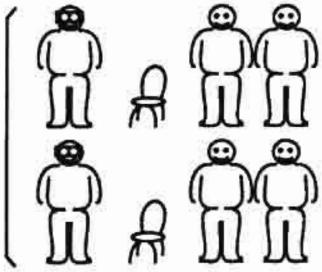
Fig. 4 (traduction de l'équation **2x = 4**)



2x = 4

un déploiement dans l'espace selon une direction perpendiculaire au plan de travail précédent...

Ainsi on introduit assez naturellement une nouvelle chaise et, tout aussi naturellement, les quatre élèves vont se partager de façon équitable pour obtenir deux équations identiques :



$$x = 2$$

2 — L'opération "ne tombe pas juste"

L'intérêt du déplacement dans l'espace n'est pas valable, comme on pourrait le penser, uniquement pour les opérations qui tombent "juste"...

En effet, si l'on propose :

$$2x = 5 \text{ ,}$$

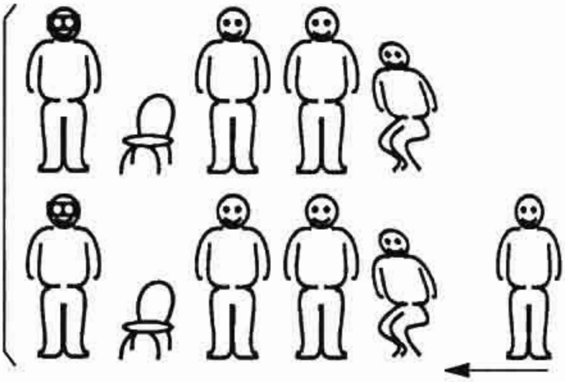
le début du mouvement centre l'intérêt sur le partage en deux (ce qui est fondamental pour éviter les "valses hésitations" que l'on connaît trop entre 2/5 et 5/2 !).

Mais, les deux " x " une fois partagés comme précédemment, il reste le problème des *cinq* élèves.

Deux stratégies sont alors possibles :

— ou bien quatre élèves, comme tout à l'heure, se partagent en 2 et il en reste 1, pour lequel il va falloir inventer un mouvement de scène. Les propositions sont multiples et celle qui a été finalement retenue consiste à *s'accroupir et à faire appel à un camarade* qui vient compléter la deuxième équation ; ce qui correspond à une division par 2.

La solution apparaît dès lors sous la forme :



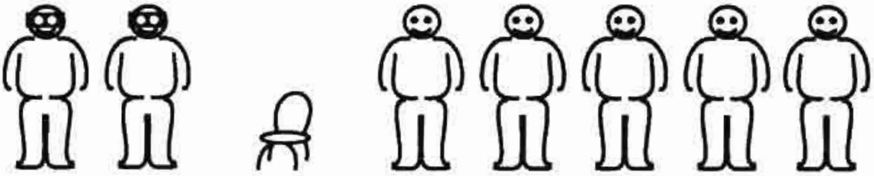
$$x = 1 + 1 + \frac{1}{2}.$$

— ou bien chaque élève s'accroupit et fait appel à un camarade afin de compléter la deuxième équation ce qui conduit cette fois à la solution sous la forme :

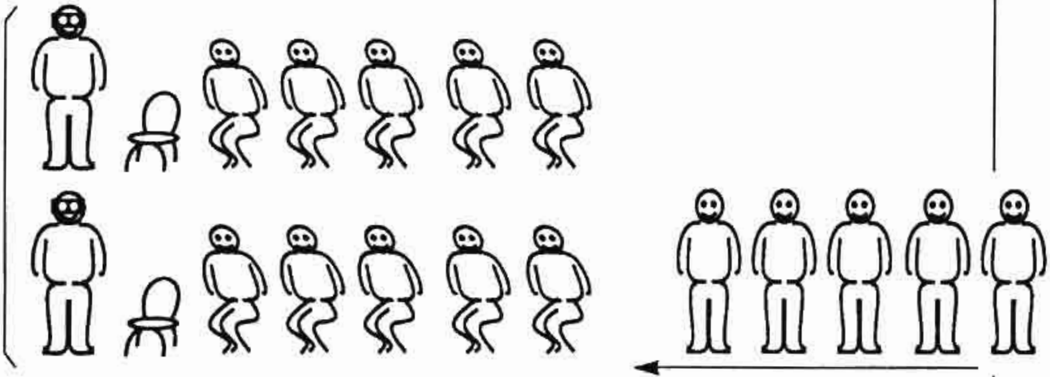
$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

conformément à la mise en scène représentée sur la figure 5 de la page suivante...

Fig. 5 (traduction de l'équation **2x = 5**)



Séparation en deux équations identiques : $\mathbf{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$



Les " x " se séparent et les cinq élèves du membre de droite s'accroupissent en faisant chacun appel à un élève pour représenter l'autre moitié...

Pour conclure au sujet de cette nouvelle étape dans l'apprentissage, je voudrais insister sur deux remarques :

1 - Le jeu théâtral, par ses différents mouvements, permet d'intérioriser une image mentale différente selon les situations (transposition ≠ division) : à des actions différentes qui mettent en jeu des directions de l'espace différentes correspondent des symbolisations qui sont elles aussi forcément différentes.

En d'autres termes, le jeu théâtral permet de déployer les deux opérations dans *des plans différents*, ce que ne permet pas le symbolisme écrit. La résolution fait en effet intervenir **tout l'espace** :

— un plan *frontal* pour la transposition,

— un déplacement *en profondeur* pour la multiplication et la division,

— la *verticalité* pour les fractions.

2 - Un deuxième élément de synthèse — à ce stade de l'exposition — touche à une notion

que je qualifierai de "régression" au sujet des fractions.

En effet, l'exemple " 2x = 5 " précédemment décrit, qui permet d'obtenir, selon la mise en scène :

$$x = 1 + 1 + \frac{1}{2}.$$

ou

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

constitue une approche de la fraction par le biais *d'additions successives* de fractions faciles à gérer telles que $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$.

Le jeu théâtral oblige à un tel passage et permet une évolution vers la division, dans la mesure où il fournit (aux élèves qui en ont besoin) l'occasion d'une révision et, par conséquent, celle d'une nouvelle compréhension au travers des "régressions" successives.

Un autre avantage est d'avoir un point de repère sur *ce qui est divisé*. C'est en effet une action bilatérale qui est opérée ici (au contraire de la transposition où la notion d'ajouter l'opposé n'est pas symbolisée) et qui est initialisée par le facteur de " x ". C'est lui qui détermine le partage (par le biais du déploiement dans l'espace et du rajout de chaises !) et *commande* de ce fait le partage dans l'autre membre, sans induire les confusions trop fréquentes chez un grand nombre d'élèves.

En définitive, c'est peut-être cette forme de "décalage" entre les étapes théâtrales d'une part, et l'écriture qui accompagne systématiquement le mouvement théâtral d'autre part, qui favorise le mieux l'institutionnalisation de la division opérée "dans le bon sens"...

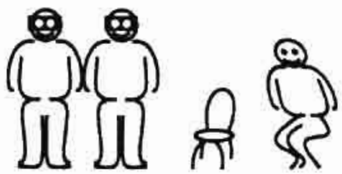
3 — Et si l'on introduit des fractions dans l'énoncé

Le travail engagé peut alors se poursuivre assez naturellement par l'introduction de fractions dans l'énoncé.

Ainsi, si l'on propose l'équation :

$$2\,x = \frac{1}{2},$$

la mise en place initiale se fait selon le schéma de la figure suivante :



$$2\,x = \frac{1}{2}.$$

A partir de ce stade, *deux mises en scènes* sont possibles, elles permettent un rapprochement intéressant des résultats obtenus :

Première méthode :

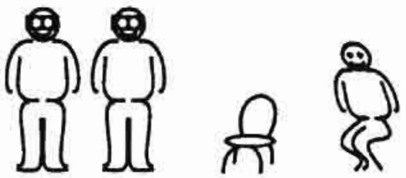
L'attention est d'abord portée sur l'élève accroupi du *membre de droite*.

Cela amène à répéter l'équation dans une configuration en profondeur qui, ramenée dans le plan frontal, va permettre d'écrire : " 4 x = 1 " puis, par le biais du jeu précédent (cf. encadré 3 de la page suivante),

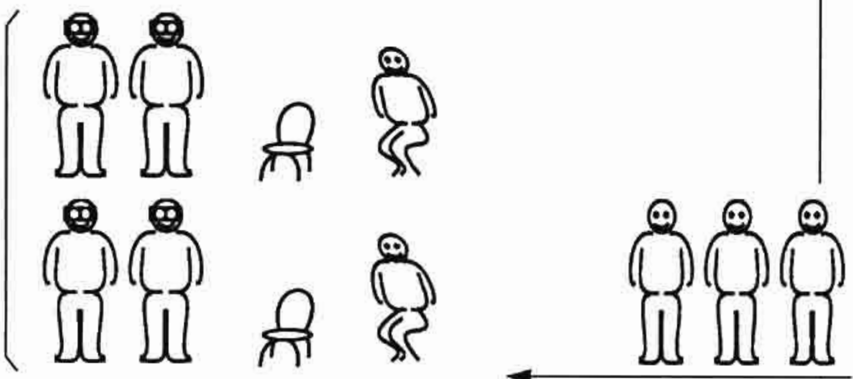
$$x = \frac{1}{4}.$$

Encadré 3 : résolution de l'équation **2x = 1/2**

1) traduction de l'équation $\mathbf{2x = \frac{1}{2}}$



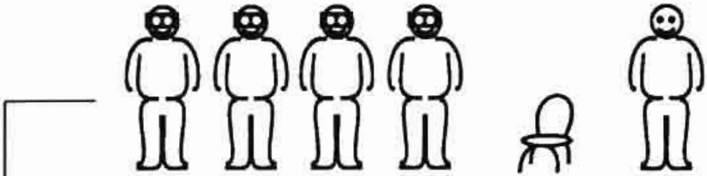
2) répétition de l'équation : trois élèves rentrent pour représenter une équation identique à la précédente



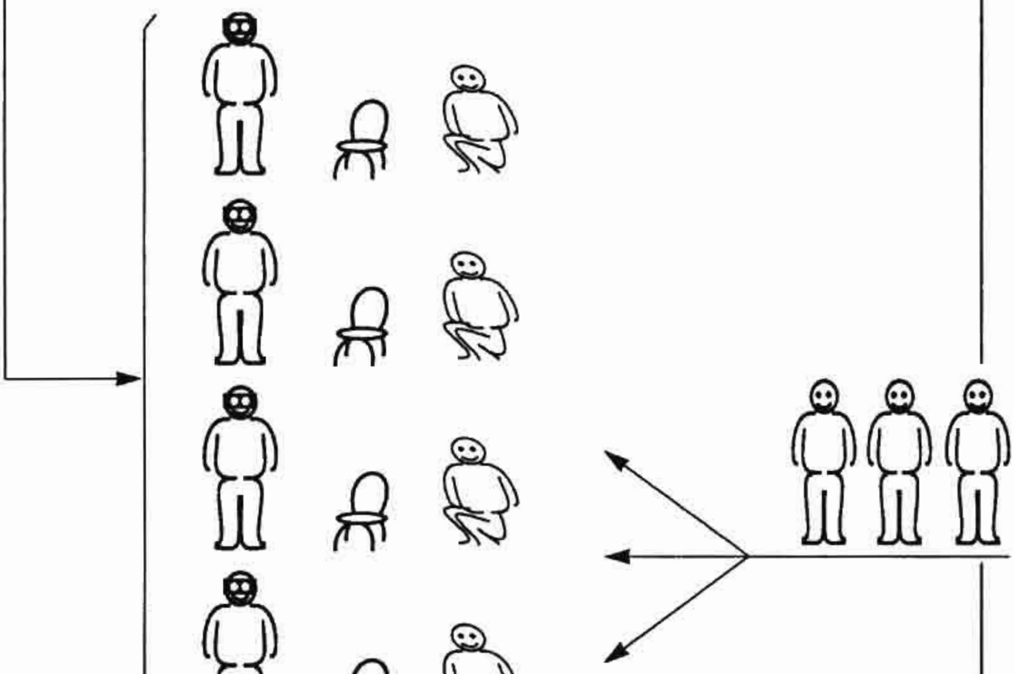
3) les deux équations identiques sont rassemblées de façon à obtenir : $\mathbf{2x + 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$

...l'opération s'effectue dans le membre de gauche pour donner " 4x ", et les deux "moitiés" du membre de droite se réunissent pour donner " 1 " (un élève sortira) ...

4) l'équation s'écrit désormais : $4x = 1$



5) séparation en quatre équations identiques : $x = \frac{1}{4}$

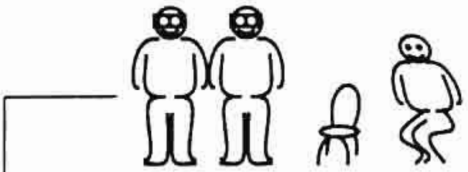


... ce sont cette fois des élèves assis qui représentent la fraction $\frac{1}{4}$
(trois élèves rentrent pour partager le membre de droite).

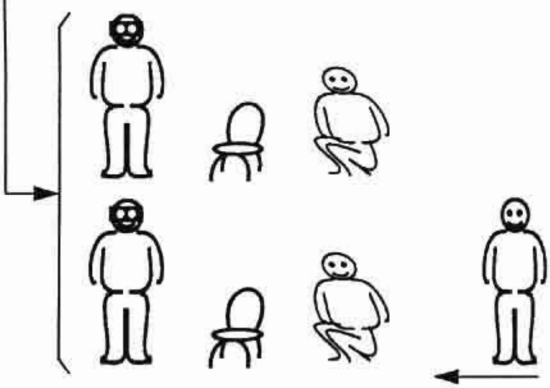
Deuxième méthode :

L'attention est portée sur « 2x » et sur le déplacement en profondeur.

Il faut alors faire un effort d'imagination pour trouver une nouvelle position (en général assise) à l'élève accroupi qui doit faire appel à un autre camarade pour se "diviser par 2"...



$$2\,x = \frac{1}{2}.$$



La réponse obtenue alors est :

$$x = \frac{1}{2} : 2.$$

Par rapprochement des résultats, on constate que : $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$.

Le résultat « $x = \frac{1}{4}$ » peut donc être obtenu indépendamment de la maîtrise de la division d'une fraction par un nombre ; dès lors, la confrontation des résultats peut même être le prétexte d'introduction de la règle :

$$\text{« } x = \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}. \text{ »!}$$

Ainsi, si l'on s'en tient à la lettre du programme, la résolution de « $2\,x = \frac{1}{2}$ » peut être entreprise par un élève de cinquième avec la méthode n° 1 développée ci-dessus, qui ne fait intervenir que des règles de calcul connues à ce niveau du collège :

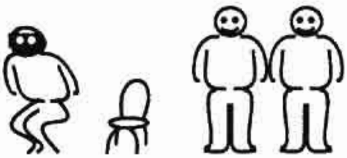
$$\begin{array}{rcl} 2\,x & = & \frac{1}{2} \\ 2\,x & = & \frac{1}{2}. \\ \hline 2\,x + 2x & = & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ (2\,x) \times 2 & = & 2 \times \frac{1}{2} \\ 4\,x & = & 1 \\ x & = & \frac{1}{4} \end{array}$$

Cette écriture, à plat sur la feuille, ne fait pas partie, à ma connaissance, des possibilités habituellement offertes à un enfant.

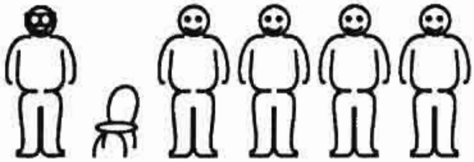
Elle apparaîtrait alors très artificielle... l'intérêt du théâtre est précisément de lui donner une "vie", une raison d'exister par le truchement de l'enfant accroupi qui ne demande qu'à se relever.

On peut poursuivre avec des coefficients fractionnaires de x. Ainsi l'équation :

$$\frac{1}{2}\,x = 2$$



sera facilement résolue par dédoublement puis rassemblement pour donner :



$$x = 4$$

Au passage, la multiplication par 2 est d'abord appréhendée ici sous forme d'addition et ce sont les écritures mathématiques qui permettent d'évoluer vers le « $\times$ 2 ».

Si l'on propose :

$$\frac{2}{3}\,x = 1$$

(cf. encadré 4 de la page suivante), la première idée à avoir est évidemment de reprendre *trois fois* cette équation, c'est-à-dire que le résultat $\frac{1}{3} \times 3 = 1$ fait son chemin...

Cela étant, la résolution est entièrement mise en œuvre au niveau du mouvement de scène qui consiste, lorsque les six élèves sont assis, à en faire sortir deux chaque fois que le troisième se lève pour arriver à l'écriture $2x = 3$ qui donne lieu au scénario déjà décrit.

La force du jeu théâtral ici est de donner un sens (grâce au "décortiquage" qu'il induit) à des notations telles que :

$$x = \frac{1 \cdot 3}{2}$$

que l'on peut écrire : $1 \times \frac{3}{2}$ pour obtenir la réponse : $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

La notion d'inverse n'est pas un prérequis à la résolution d'une telle équation mais c'est la résolution qui devient le prétexte à mettre en évidence cette notion. De ce fait, l'élément nouveau prend un sens et on peut mettre en valeur sa faculté simplificatrice en mettant en parallèle les deux écritures :

$\frac{2}{3}\,x = 1$	$\frac{2}{3}\,x = 1$
$\frac{2}{3}\,x + \frac{2}{3}\,x + \frac{2}{3}\,x = 1+1+1$	$\frac{2}{3}\,x \times 3 = 1 \times 3$
$\frac{6}{3}\,x = 1$	$2\,x = 1 \times 3$
$2x = 3$	$x = \frac{1 \cdot 3}{2}$
$x = \frac{3}{2}$	$x = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

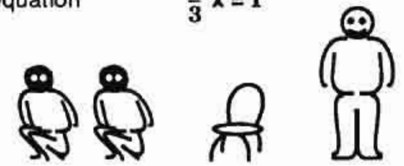
De la même façon, si l'on exploite l'équation : $\frac{1}{4}\;x = -1$, on obtient de manière très naturelle :

$$x = -1 - 1 - 1 - 1$$

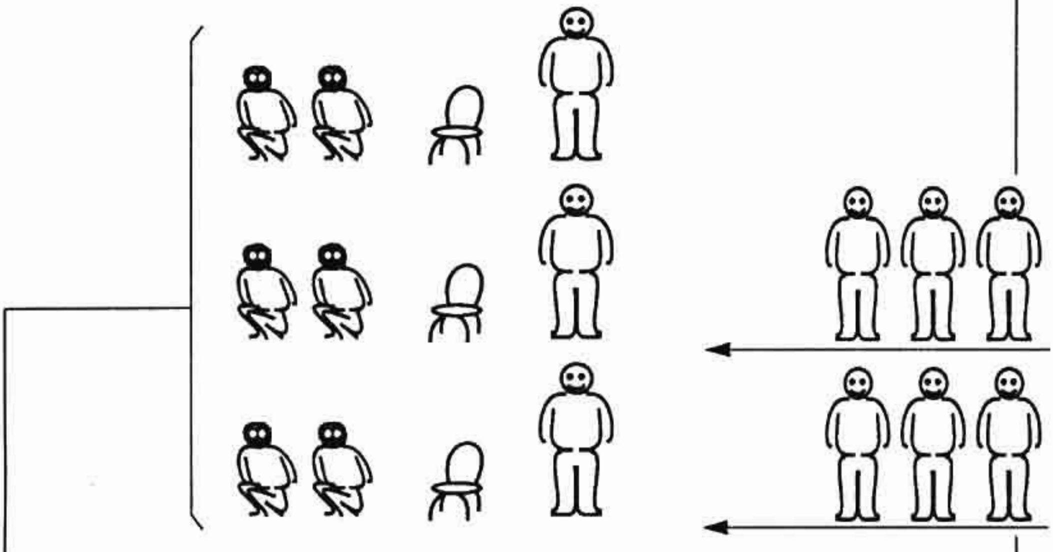
$$x = -4 = (-1) \times 4$$

Encadré 4 : résolution de l'équation **(2/3) x = 1**

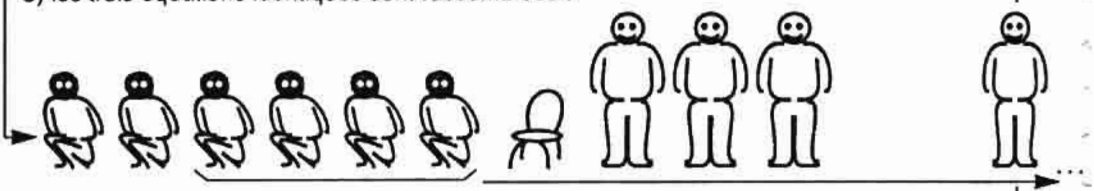
1) traduction de l'équation $\frac{2}{3}x = 1$



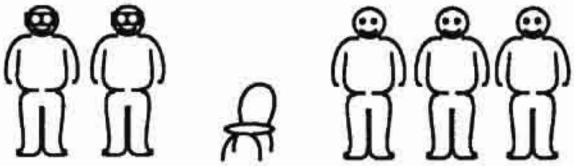
2) répétition de l'équation :



3) les trois équations identiques sont rassemblées :



4) l'opération s'effectue dans le membre de gauche pour donner l'équation : 2x = 3 ...



Le principe est le même que celui que j'ai précédemment décrit. Le travail ne requiert pas de savoir multiplier des relatifs puisqu'il est ramené à une suite d'additions, mais il peut être *le prétexte à introduire de nouvelles règles* de calcul sur les nombres relatifs.

On peut ensuite proposer l'équation :

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$$

Je rappelle ici que la progression dans la difficulté met en jeu l'imagination des enfants qui se trouvent confrontés à des difficultés croissantes pour lesquelles les "mouvements de scène" doivent se sophistiquer. La mise en scène de $\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$ ne pose plus de problèmes.

Deux positions différentes sont nécessaires pour traduire l'équation : accroupi et par exemple assis. Compte tenu des travaux faits précédemment deux stratégies de mises en scène sont alors possibles, elles seront placées en parallèles, par écrit, sur la feuille :

a) *le metteur en scène est centré sur* $\frac{1}{2}x$:

il pense alors à dédoubler l'équation puis à tout ramener dans le plan frontal pour obtenir :

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{4} \times 2 .$$

b) *le metteur en scène est centré sur* $\frac{1}{4}$:

d'où l'idée de faire apparaître *quatre équations* équivalentes qui, une fois rassemblées dans le plan frontal, vont donner (cf. encadré 5 page suivante) :

$$\frac{1}{2}x \times 4 = \frac{1}{4} \times 4$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

d'où la règle : $\frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$ ...

4 — Extension

Je voudrais, à ce niveau de l'exposé, relater de la façon la plus fidèle possible, une expérience vécue l'an dernier à la fin de la première année d'expérimentation de cette méthode...

Je n'étais pas allée aussi loin que ce que j'ai dit ici, et je n'avais notamment pas insisté sur les fractions. A la fin de l'année, à propos d'un problème de géométrie, les élèves sont amenés à écrire l'équation :

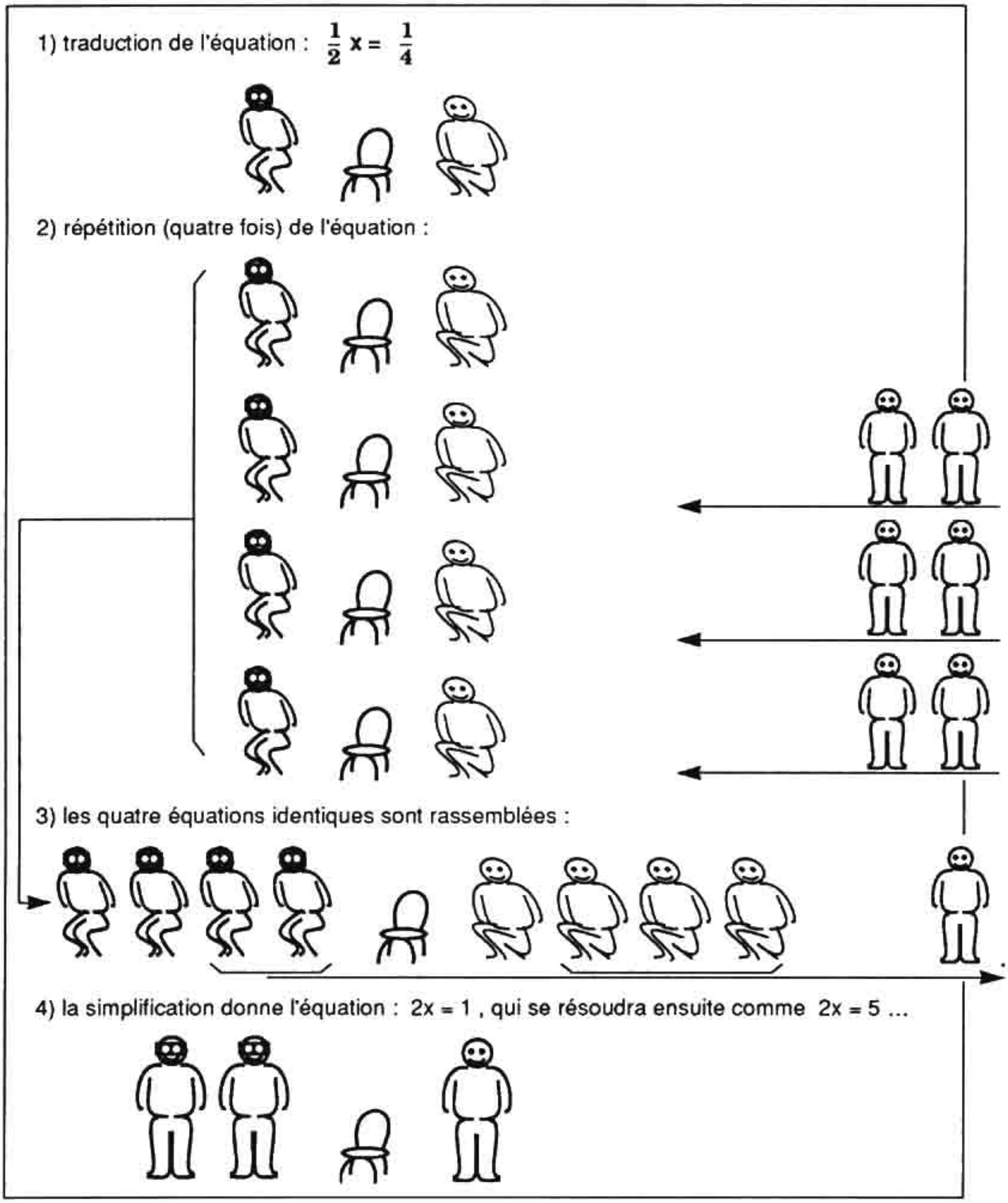
$$\frac{5}{3}x = 1000 .$$

Comment la résoudre ? Deux réactions particulièrement intéressantes sont à noter :

1 — *La réaction du "bon élève"* : « il faut **diviser** 1000 par $\frac{5}{3}$ et je ne sais pas le faire... »,

2 — *La réaction plus générale* : « il faut passer par le théâtre mais l'ennui réside dans le

Encadré 5 : résolution de l'équation **(1/2) x = 1/4** à partir du second membre



fait qu'il n'y a pas assez d'acteurs disponibles... ».

Pour lever cette difficulté, et après un moment de réflexion, l'idée se fait jour de *remplacer* 1000 par 10, de faire les mouvements de scène, de trouver x , puis de *multiplier* ce résultat par 100 pour résoudre le problème.

L'écriture mathématique, correspond donc à :

$$\frac{5}{3}\,x = 10$$

$$5x = 30$$

$$x = \frac{30}{5}$$

$$x = 6$$

donc : $x = 6 \times 100 = 600$ ...

C'est alors que le "bon élève" dit : « *pour diviser par* $\frac{5}{3}$ *il faut multiplier par* $\frac{3}{5}$ *!* ».

L'exégèse de cet exemple met en évidence deux remarques fondamentales :

— le jeu théâtral oblige à réfléchir à l'importance du second membre et fait apparaître l'idée que celui-ci n'a pas d'influence sur l'opération à faire. Ainsi, dans l'exemple en question on aurait pu remplacer 1000 par 1, par 5... la démarche nécessitait simplement le passage par :

« $\times 3$ » suivi de « $: 5$ ».

On peut donc penser que le théâtre prépare l'évolution vers un second membre littéral.

— en revanche, et c'est l'objet de ma deuxième remarque, la littéralisation du *coefficient de* x semble rester un problème majeur que cette "ingénierie didactique" n'a pas résolu. Seul dans l'exemple, le bon, même très bon élève a fait le pas.

En disant il faut *diviser* 1000 *par* $\frac{5}{3}$, il a franchi l'étape du passage entre une équation de type $2x = 1000$ et celle qui était proposée.

C'est-à-dire que, pour lui, $\frac{5}{3}$ a le *même statut* que 2 et est à regarder comme un *nombre en tant que tel*, qui pourrait être remplacé rapidement par un « a ». Pour les autres, au contraire, et cela est — semble-t-il — renforcé par le jeu théâtral, tout les pousse à scinder le travail en successivement

« $\times 3$ » suivi de « $: 5$ »

ou éventuellement

« $: 5$ » puis « $\times 3$ »

qui, par un jeu d'écriture déjà décrit, peut devenir « $\times \frac{3}{5}$ ».

La différence essentielle avec la réaction du "bon élève" est que le passage à « $\times \frac{3}{5}$ » ne résulte pas d'une *division* mais d'un jeu théâtral d'abord, puis seulement d'écritures. A cet endroit, les élèves dans leur majorité, ont apparemment appris qu' une situation de type $\frac{5x}{3} = b$ correspondait à $x = b \times \frac{3}{5}$ mais sans savoir, au fond, que c'est la même chose que $x = b : \frac{5}{3}$.

Le *véritable obstacle épistémologique* est sans doute à cet endroit : le résultat de mon expérience sur la deuxième année prouve que la méthode donne une consistance à "Je passe de $\frac{5}{3}$ à $\frac{3}{5}$ mais je ne suis pas encore capable de voir que le nombre $\frac{5}{3}$ a le même statut que n'importe quel nombre entier et que donc je peux *diviser par* $\frac{5}{3}$ comme je divise par 2 ... (on pourra se reporter sur ce sujet à la conférence de Ph. Lombard dans les *Actes du colloque de St Nazaire*, publiés par la Commission Inter-Irem Premier Cycle).

CONCLUSION

Revenons, en guise de conclusion, sur l'aspect purement théâtral de l'activité c'est-à-dire sur l'aspect psychologique de la démarche.

Le premier élément à dégager est qu'il s'agit d'une activité dont l'aspect ludique vient surtout d'une totale rupture avec un enseignement des maths tel qu'on peut le concevoir habituellement. Il faut en effet se dégager du contexte classe en se créant un nouvel espace : le théâtre qui nécessite, sinon une salle prévue à cet effet, du moins une restructuration de la classe devenue lieu de spectacle, avec scène et emplacement pour les spectateurs.

L'impact psychologique de ce décalage n'est pas à négliger. Il intervient à deux niveaux : d'abord la *motivation* liée à l'aspect ludique (qui fonctionne aussi bien pour les "bons" que pour les "mauvais" élèves) puis, surtout pour les élèves en difficulté, la levée ponctuelle d'une attitude de *résignation* face à l'incompréhension liée à la matière et au cadre.

Le deuxième élément vient du jeu théâtral lui-même. En effet, les élèves sont tour à tour, acteur, spectateur, metteur en scène. Chaque situation entraîne des investissements différents. Le metteur en scène a un travail d'anticipation important à fournir. Il faut en effet qu'il ait une idée assez précise de l'enchaînement des différents "tableaux" théâtraux pour guider correctement ses camarades. L'acteur, quant à lui, vit la situation avec son corps et c'est l'aspect individuel qui est renforcé. Ainsi, la notion de transposition peut être associée à un mouvement que l'acteur *fait réellement*, ce qui peut faciliter, à l'issue de l'apprentissage, le passage à la règle formelle. Le spectateur, bien que plus passif, a lui une vision globale de chaque phase du jeu : il verra que si cinq camarades sont face à lui, le mouvement imposé conduira forcément à les placer dos à lui. Si l'on ose une comparaison, on pourrait dire que le théâtre permet de traiter les équations à la façon d'un texte littéraire. En effet, au niveau de la mise en scène, on est en présence de la vision synthétique du texte, au niveau du spectateur, on insiste sur la vision globale de la phrase et au niveau de l'acteur, c'est la vision de détail : chacun joue le rôle du mot dans la phrase. La compréhension du texte passe par la maîtrise des trois aspects décrits et donc, de la même façon, la maîtrise du calcul algébrique passe par l'ensemble des mises en situation. C'est pourquoi il est indispensable que **tout** élève passe par les trois rôles. Au départ, la répartition des rôles se fait spontanément de façon prévisible : les bons sont facilement metteurs en scène, les autres élèves se répartissent en spectateurs et acteurs selon leur tempérament. L'idéal est de les laisser réagir selon leurs capacités et envie et, si le jeu réussit, il n'est pas rare de voir tel élève en difficulté (et souvent timide) sortir de sa retenue pour devenir acteur et même metteur en scène.

Mais au-delà de tous ces éléments, je dirai simplement pour conclure qu'il faut avoir vécu ce travail avec une classe, arriver à saisir au fil des séquences les gestes d'entraide, les attitudes d'autodiscipline, les complicités accompagnant chaque "représentation", pour mesurer l'impact psychologique et par conséquent intellectuel d'une expérience qui amène sans doute les élèves aux limites du travail de groupe, là où celui-ci devient purement et simplement *jeu d'équipe*...