RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ET UTILISATION DE MÉTHODES EN TERMINALE C

Aline ROBERT
Isabelle TENAUD
Irem Paris 7

Dans cet article, nous voudrions relire et présenter la recherche en didactique menée par I. Tenaud (1991), qui comprend la conception et l'expérimentation d'un enseignement de méthodes en géométrie, à la lumière des questions sur les méthodes qui sont l'objet de ce numéro spécial. Nous préférons parler d'utilisation de méthodes par les élèves plutôt que d'enseignement de méthodes par l'enseignant, car c'est cet objectif qui nous intéresse, côté méthodes : c'est pour nous un moyen d'améliorer les résolutions de problèmes produites par les élèves, ce qui reste notre principale préoccupation.

En effet, dans ce travail, il n'a jamais été question d'envisager un enseignement de méthodes indépendamment de l'apprentissage de la géométrie, et donc du reste de l'enseignement de la géométrie. Ainsi en témoigne par exemple le titre de la thèse d'I. Tenaud sur ces questions : "Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C : enseignement de méthodes et travail en petits groupes".

Rappelons d'emblée l'hypothèse centrale qui fonde cette expérience (*cf.* Robert et Tenaud (1990)) : c'est à tout le scénario d'enseignement que nous supposons une certaine efficacité pour l'apprentissage de la géométrie, ce scénario comprenant, entre autres, *un enseignement de méthodes explicite, mais complètement intégré au reste de l'enseignement et partiellement élaboré par les élèves eux-mêmes.*

Ainsi la spécificité de ce scénario ne tient pas seulement à cet essai de faire utiliser des méthodes aux élèves, lorsqu'ils en ont besoin, et donc de leur en enseigner. Il s'agit pour nous d'arriver à ce que beaucoup d'élèves de la classe résolvent seuls suffisamment de problèmes de géométrie, et des problèmes consistants. Un des moyens que nous leur proposons est de mettre en œuvre, s'il y a lieu, un certain questionnement sur les méthodes possibles pour démarrer les problèmes posés. Il faut donc que ce questionnement soit disponible pour eux (en tout cas le devienne), et il faut aussi que les problèmes à résoudre nécessitent cette démarche.

D'où, déjà, l'imbrication nécessaire d'un enseignement explicite de méthodes et de situations où les élèves en ont besoin. Il faut bien que les élèves reconnaissent les méthodes comme telles, aient des exemples de leur utilisation, voire de leur efficacité. Mais ces méthodes ne sont pas tirées de rien, surimposées, elles correspondent au contraire à la structuration du cours de géométrie, elles doivent donc être dégagées pendant ce cours, quand se présente une occasion favorable ou pendant les recherches d'exercice, quand elles s'imposent... Ainsi on ne peut concevoir séparément l'enseignement de géométrie, et de temps en temps, un zeste d'enseignement de méthodes, comme pour donner du goût : il y a une profonde unité entre les deux, une complexité même qui ne permet pas de concevoir l'un sans l'autre.

Mais Paris ne s'est pas fait en un jour, la mise en œuvre d'une démarche réflexive, où les élèves doivent retarder le moment de dérouler des techniques pour résoudre un problème, en réfléchissant à la stratégie d'attaque, n'est pas spontanée, elle doit s'apprendre. C'est pourquoi il faut proposer souvent aux élèves des problèmes assez difficiles pour qu'une discussion préalable sur les méthodes puisse avoir lieu et puisse les aider à la résolution effective.

Seulement cette discussion est facilitée, pensons-nous, si plusieurs élèves la mènent ensemble : on discute moins bien avec soi-même qu'avec d'autres... D'où l'organisation de travail régulier en petits groupes sur des problèmes non immédiats, qui fait partie intégrante du scénario. Et là encore, il ne s'agirait pas de séparer le travail en petits groupes du reste, et d'y voir une nouvelle recette miracle...

Enfin, soulignons que, pour nous, la mise en œuvre de méthodes n'est pas artificielle : certes pour les problèmes proposés aux élèves, des mathématiciens avertis n'hésiteraient sans doute pas sur la stratégie à employer, et n'auraient pas besoin de cette réflexion, mais ils pourraient la mettre en œuvre dans des problèmes présentant pour eux des difficultés.

En fait cette utilisation de méthodes est pour nous un cas particulier de travail développant des métaconnaissances, des connaissances SUR les mathématiques. Et nous avons expliqué ailleurs qu'un tel travail ne peut porter ses fruits, pour suffisamment d'élèves du moins, que s'il est intégré à tout l'enseignement et s'il y a suffisamment d'occasions pour les élèves d'utiliser ces connaissances particulières. Un des objectifs majeurs de cette intégration est de les rendre utiles, si ce n'est indispensables, à certains moments de l'activité des élèves. C'est pour nous une condition nécessaire à l'amélioration ultérieure (éventuelle) de l'acquisition des connaissances des élèves, notamment parce qu'ils réussissent à mieux résoudre des exercices non triviaux grâce à la mise en œuvre de ces métaconnaissances.

On se retrouve en terrain connu, c'est bien sur une hypothèse de construction des connaissances que nous nous appuyons ; mais nous donnons des repères supplémentaires aux enseignants pour aider des élèves à construire leurs connaissances mathématiques dans certains domaines : il ne s'agit pas seulement de ménager de bonnes activités, de bonnes situations, mais aussi de faciliter l'accès à ces activités et d'en assurer ainsi un peu plus le succès.

Dans notre exemple, pour résumer notre propos précédent, cela se fait en indiquant des méthodes liées à la géométrie, tout au long de l'année mais à certains moments bien choisis, et en vue de résolution de problèmes précis. De plus, nous avons ajouté à notre scénario un élément tout aussi constitutif que l'enseignement des méthodes : c'est le travail régulier en petits groupes sur des exercices sans indications de méthodes, qui sont justement l'occasion, pour les élèves, d'y faire appel et de les mettre en œuvre.

Nous allons développer ces idées, en précisant d'abord un peu plus le scénario de l'expérience, puis en indiquant des éléments d'évaluation qui ont été obtenus. Nous terminerons par la morale que nous tirons de cette expérience : il ne s'agit ni d'une panacée, ni d'une $n^{\text{ième}}$ recette miracle, mais d'une tentative de tirer parti des connaissances de didactique pour améliorer l'apprentissage de beaucoup d'élèves de terminale C, grâce à une incursion très réfléchie dans le domaine des métaconnaissances, intégrée à un scénario complet qui joue sur bien d'autres leviers que les méthodes. Et nous insisterons sur le rôle de l'enseignant qui est là encore immense : concepteur de l'enseignement de méthodes, qu'il doit intégrer continuellement à son enseignement, il doit choisir convenablement les textes à proposer aux élèves, il doit faire la synthèse des travaux pratiques en insistant sur les méthodes utilisées par les élèves...

I. Le scénario : quel enseignement de méthodes ? Quel enseignement de la géométrie ?

Nous ne prétendons pas ici décrire en détail le scénario complet qui a été mis en place : nous renvoyons le lecteur intéressé à Tenaud (1991), pp. 25-52.

Nous ne pourrions pas d'ailleurs donner un exemple isolé sans le dénaturer, tant, encore une fois, c'est l'ensemble qui, pour nous, a un sens.

Nous allons plutôt dégager les éléments sur lesquels nous essayons de jouer et leurs articulations, tout à fait essentielles en l'occurrence.

A) Les méthodes

Il s'agit de transmettre tout au long de l'année aux élèves des points de repère pour mieux aborder la phase de démarrage d'un exercice de géométrie, proposé sans indication, et sur lequel beaucoup d' élèves auraient tendance à sécher.

Ces points de repère sont de plusieurs types :

1) Identification de la tâche et des pistes possibles

L'enseignant transmet des catégories de questions à se poser, qui peuvent aider à reconnaître la nature du problème proposé, et ainsi faciliter le choix d'une démarche de recherche. Il s'agit d'introduire, en cas de blocage, un certain nombre de questionnements (qui doivent devenir disponibles), à propos des exercices, les réponses engageant vers des pistes de travail.

Ainsi l'enseignant dégage les *divers types de problèmes* qui peuvent être proposés aux élèves (études de configuration ou problèmes d'incidence — parallélisme, alignement, orthogonalité, concours, cocyclicité, calcul de mesures... —, études de lieux, constructions, études liées à des transformations...).

L'enseignant insiste aussi sur les *différents cadres* utilisés en géométrie, le cadre des points, droites, transformations ponctuelles (on pourrait dire cadre affine, euclidien ou non), le cadre numérique (utilisé dès qu'on travaille sur des mesures, ou en géométrie analytique, ou avec les nombres complexes), le cadre vectoriel... Chaque exercice est posé dans un ou plusieurs cadres, ceci peut amener les élèves à utiliser un outil adapté à ce cadre ou au contraire à changer de cadre...

Cela amène l'enseignant et les élèves à classer au fur et à mesure de l'avancement du cours, les notions déjà vues (ou nouvelles), du point de vue des types de problèmes et des cadres où elles peuvent intervenir efficacement. Dans le cadre des programmes actuels, on peut citer les notions de barycentre, de produit scalaire, de transformations par exemple. Et cette réflexion est menée systématiquement, à l'occasion des exercices qui sont cherchés en classe.

Enfin, l'enseignant habitue les élèves à *reconnaître des configurations de base* (ou des lignes de niveau connues) dans les figures plus complexes qu'ils ont à étudier (*cf.* annexe 1).

2) Démarches

Quand il constate un blocage des élèves, l'enseignant évoque la possibilité de trouver une autre démarche pour aborder l'exercice : on peut changer de points de vue, de cadres ou de stratégies...

Donnons un exemple de ce que nous appelons "changement de point de vue" en géométrie.

Pour démontrer que trois droites sont concourantes, on peut montrer qu'elles passent toutes les trois par un même point (premier point de vue), ou encore qu'il existe un point appartenant à chacune des droites (deuxième point de vue, "local"), ou bien que le point d'intersection de deux d'entre elles appartient aussi à la troisième droite (troisième point de vue, également "local"). On pourrait aussi démontrer qu'elles sont images de trois droites concourantes par une bijection sans évoquer explicitement leur point d'intersection (point de vue plus "global"). On peut aussi reconnaître que les trois droites sont des droites remarquables d'un triangle par exemple (point de vue global), dont on sait par ailleurs qu'elles sont concourantes. On peut encore exprimer analytiquement le problème, mais là nous parlerons plutôt de changement de cadre que de changement de point de vue.

Ces descriptions ne sont pas tout à fait équivalentes du point de vue des stratégies éventuelles qu'elles peuvent amorcer chez les élèves... Par exemple si on peut penser à l'outil transformation dans le point de vue "image de droites concourantes", ce sera peut-être d'autres moyens qu'il faudra utiliser si on veut démontrer qu'un même point appartient aux trois droites (on peut penser à introduire un barycentre par exemple, et à employer l'associativité).

Ce repérage explicite de certaines caractéristiques des exercices de géométrie et des procédures possibles pour les aborder, utilisé de nombreuses fois, habitue de fait les élèves à analyser d'une certaine façon les textes d'exercices qui leur sont proposés : il y a déjà là l'amorce d'une certaine démarche, qui est de surcroît mise souvent en fonctionnement dans les exercices non immédiats proposés en travaux pratiques.

B) Les travaux pratiques où le travail se fait en petits groupes

Trois points importants sur ces séances de travail en petits groupes : elles sont régulières (hebdomadaires), une certaine règle du jeu explicite (appelée dans la suite contrat) permet d'assurer un travail effectif des élèves qui sont placés en petits groupes de trois ou quatre, les exercices proposés doivent forcer les élèves à se poser des questions de démarrage, donc de méthodes si l'enseignant gagne son pari...

Une liste des exercices, proposés effectivement pendant une année, est jointe en annexe (*cf.* annexe 2).

Précisons ce contrat, tel qu'il est effectivement explicité aux élèves : l'enseignant s'impose, au moins après quelques semaines où il tourne dans la classe, de ne pas bouger de sa place sauf si les élèves l'appellent. Et cet appel peut être une demande de vérification, mais aussi une demande d'aide, mais alors cette dernière doit avoir été précédée d'une discussion dans le groupe. Sinon l'enseignant renvoie la question aux élèves...

C'est cette clause qui garantit d'une certaine manière la mise en œuvre d'un questionnement sur les méthodes : l'enseignant laisse chercher, et n'aide que si les élèves ont déjà discuté. Or de quoi discuter si on ne sait pas démarrer, sinon des méthodes, surtout si l'enseignant a engagé les élèves à le faire, leur en a donné des moyens ?...

C) L'enseignement de la géométrie

Comme nous l'avons déjà signalé, cet enseignement de méthodes est inséparable de l'enseignement de la géométrie, auquel il s'intègre complètement.

Nous ne pouvons cependant ici décrire cet enseignement complet, nous ne donnerons donc que deux exemples illustrant l'imbrication précédente.

Premier exemple, le bilan des travaux pratiques se fait en classe entière, et il intègre la réflexion sur les méthodes et le corrigé lui-même.

Autre exemple : lorsque l'enseignant fait cours, il intègre la réflexion sur les notions introduites et l'étude de leurs strictes propriétés. Il dégage ainsi explicitement ce qui pourra devenir des éléments de la démarche des élèves devant un problème, mais sans "couper" ce type d'intervention du reste de son cours. précisons qu'il utilise le mot méthode si c'est de cela qu'il est en train de parler.

Seule l'évaluation des élèves, les exercices de contrôle par exemple, ne participent pas directement de cet enseignement, bien que la rédaction et la discussion de leur démarche méthodologique soient proposées aux élèves une fois dans l'année, dans un devoir à la maison.

II. Un bilan de quatre années d'expérience : éléments d'évaluation

L'expérience d'un enseignement de géométrie incluant un enseignement de méthodes a été menée pendant quatre années consécutives en terminale C, et la recherche d'I. Tenaud a essentiellement consisté à essayer d'en évaluer les effets. Ceci a nécessité un travail méthodologique préalable, pour mettre au point les moyens de cette évaluation. Nous allons esquisser la méthodologie retenue, ne serait-ce que pour insister sur la complexité du problème de l'évaluation. Puis nous donnerons des résultats.

1) Comment évaluer les effets de l'enseignement de méthodes ?

Il faut d'abord faire remarquer à quel point il est difficile d'isoler tel ou tel élément du scénario pour en évaluer les effets, alors même que toute notre démarche est fondée sur le fait que tous les leviers introduits sont indispensables et n'ont de sens que parce qu'ils sont liés.

Reformulons donc autrement la question : il vaudrait mieux évoquer plutôt un essai d'évaluation de l'appropriation par les élèves de démarches intégrant des méthodes et de leurs effets sur la résolution de problèmes, compte tenu de l'ensemble du scénario.

Pour "mesurer" cette appropriation, I. Tenaud a analysé le travail de quelques groupes d'élèves pendant les séances de travaux pratiques. Rappelons qu'il s'agit de résoudre des exercices nécessitant souvent une réflexion pour le démarrage. Un groupe a été suivi toute l'année, les autres de manière plus épisodique, ceci permettant de comparer plusieurs groupes avec le groupe fixe, sur des exercices variés. Toutes les analyses ont été faites sur des transcriptions d'enregistrements sur magnétophone.

Nous ne pouvons entrer dans le détail de la méthodologie mise en place pour l'étude de ces transcriptions, disons simplement qu'elle est délicate, très longue, mais qu'elle permet de saisir différents niveaux d'utilisation des méthodes par les élèves (référence générale à une démarche méthodique, citations de méthodes adaptées au type du problème concerné mais pas nécessairement au problème précis, méthodes adaptées au problème précis).

De plus, un certain nombre de productions écrites ont été analysées, questionnaires d'opinion et copies de devoirs à la maison avec rédaction de la démarche.

On mesure peut-être mieux sur ce petit exemple l'ampleur de ces tâches d'évaluation, car ce qui cité ci-dessus, malgré le temps passé et les précautions prises, ne permettra pas de tirer des conclusions définitives, pour tous les élèves, loin s'en faut.

2) Des résultats

I. Tenaud a tout de même réussi à avoir une idée de ce qui s'est passé chez les élèves, même si l'étude précise des enregistrements ne concerne qu'un petit nombre d'entre eux.

* D'abord le scénario se joue tout à fait bien : l'expérience s'est répétée, sans dysfonctionnements notoires.

Cependant l'enseignant était l'auteur du scénario, et nous n'avons pas encore évalué la même expérience menée par d'autres professeurs : dans quelle mesure un autre enseignant peut-il s'approprier le scénario ?

* Ensuite au moins une partie des élèves progresse en ce qui concerne l'utilisation des méthodes : l'étude fine des transcriptions a très bien mis en évidence la qualité et l'efficacité croissantes du recours à des méthodes pour résoudre avec succès les exercices proposés.

Mais quelle importance ont eue les seules méthodes, qui ne sont qu'un élément parmi d'autres dans l'enseignement reçu par les élèves ?

* De plus les élèves sont tout à fait conscients du changement de contrat induit par ce mode de travail, ils en sont même en général très satisfaits et n'ont plus les réactions de rejet de la géométrie fréquentes en début année. Ils apprécient particulièrement le travail en petits groupes et les méthodes, dont ils peuvent, avec leurs propres mots, expliquer l'aide qu'elles leur apportent, en cas de blocage.

Mais vont-ils continuer à mettre en œuvre de telles démarches à d'autres occasions ? N'ont-ils pas d'abord fait confiance à leur enseignant ?

On voit ici les limites inhérentes à ce type d'évaluation.

On ne peut pas analyser tous les élèves, faute de temps. On ne peut pas séparer les différentes causes des effets observés. On peut seulement donner des pistes, vérifier que des ingénieries sont faisables, vérifier leur efficacité globale, donner des indices pour en rendre compte grâce à des études fines...

Conclusion

Le lecteur aura pu constater, au fil de notre description, qu'on ne pouvait pas séparer dans l'expérience évoquée ici l'enseignement de méthodes du reste de l'enseignement de la géométrie dans lequel il est imbriqué. Soulignons que les interventions sur les méthodes sont cependant explicites, et peuvent être repérées, préparées, même si l'ordre dans lequel l'enseignant les fait peut changer en fonction des réactions des élèves.

Ceci dit, sans réduire ce type d'expérience au seul enseignement de méthodes, le problème se pose de leur généralisation éventuelle. Nous pensons qu'il faut être très prudent.

En effet, un des aspects problématiques dans un tel enseignement nous semble tenir à la décision des moments où il est opportun d'intervenir : si l'enseignant intervient trop tôt, sans qu'il y ait assez d'exemples illustrant telle méthode chez les élèves, cela risque de ne servir à rien, et c'est complètement artificiel, ne restituant en rien la démarche scientifique authentique qu'il peut y avoir derrière l'utilisation de méthodes ; si l'enseignant attend que beaucoup d'élèves soient bien à l'aise pour intervenir, le risque est grand d'attendre trop longtemps et de perdre le bénéfice éventuel !

Or, en terminale C, dès le début de l'année les élèves disposent d'un certain bagage en géométrie, ce qui libère l'enseignant de ce dilemme : il y a dans l'esprit des élèves quelques référents donnant sens (plus ou moins) aux méthodes citées. Et ces interventions ne sont pas (encore) inutiles, car d'une part il y a encore quelques notions nouvelles au programme, et les élèves doivent réorganiser l'ensemble de leurs connaissances, et d'autre part ils sont assez gênés par la géométrie pour être preneurs d'éléments pouvant les aider.

En revanche, dans les classes antérieures, la situation est peut-être différente, et la question reste ouverte de l'opportunité de ces interventions. N'est-il pas plus difficile d'apporter des éléments de réflexion sur des connaissances peu développées ?

Il y a en tout cas à réfléchir, pour chaque niveau d'enseignement, à la spécificité des interventions de ce type à introduire : nous pensons qu'il faut se garder d'interventions SUR les connaissances des élèves, qui puissent apparaître prématurées par rapport à leurs connaissances. Ne risquent-elles pas en effet d'apparaître artificielles, de devenir un nouveau chapitre du cours à apprendre, comme les autres ?

En réalité, c'est peut-être aussi là que le rôle de l'enseignant est fondamental : il est seul à même de juger, pour une classe donnée, des demandes des élèves, de leurs ressources, et des domaines où par exemple il y a suffisamment de connaissances pour se lancer dans un tel enseignement de manière naturelle, avec une participation suffisante des élèves.

Il peut aussi penser enrichir les représentations des élèves par cet enseignement explicite qui valorise une certaine forme d'activité réflexive sur les mathématiques et peut choisir en fonction des élèves la présentation qu'il en fera.

Cela nous amène à conclure sur ce rôle de l'enseignant. Maître du jeu, c'est à lui de décider non seulement de l'opportunité d'intervenir au plan des méthodes, compte tenu de sa classe, mais aussi à lui de mettre au point son scénario personnel et de fixer les règles du jeu avec les élèves. Il y a là une grande marge de manœuvre ; par exemple en ce qui concerne l'évaluation, l'enseignant peut décider à un certain moment de faire croître les enjeux en tenant compte dans certaines notes d'éléments liés à une réflexion sur les méthodes. Mais s'il change le contrat en vigueur, il faut qu'il attende un certain temps pour que le nouveau contrat prenne effet, il est en rupture avec les exigences du baccalauréat... De même, s'il adopte cette formule, l'enseignant doit décider de son attitude pendant les séances de travail en petits groupes et là encore il faut concilier les nécessités de surveiller un peu les élèves, au moins au début, et la nécessaire autonomie qui force les élèves à une incursion qu'ils peuvent juger coûteuse, au plan des méthodes.

Enfin, l'enseignant doit tenir toute l'année le même cap, intégrant les diverses démarches des élèves, improvisant donc souvent, faisant trouver aux élèves certaines méthodes, avec le temps que cela peut prendre.

Nous allons, pour finir, indiquer quelques unes de nos interrogations qui éclairent la direction que pourraient prendre des recherches à venir.

Par delà l'évaluation stricto sensu de l'expérience, qui est à reprendre, quel est le degré de généralité de ce type de scénario : dans quels cas gagne-t-on à intégrer un enseignement de méthodes à un enseignement (de géométrie par exemple) ? Et alors comment le mener ?

Ceci nécessite de reprendre des expériences analogues à celles que nous avons décrites ici, et à en mener des évaluations précises. Cela peut permettre d'explorer une question que nous n'avons pas abordée : un tel enseignement peut-il avoir des effets à plus long terme ?

Se pose inévitablement alors le problème de la transmission à d'autres enseignants, indispensable à réaliser pour élargir la base expérimentale nécessaire aux recherches à venir : plusieurs questions se posent à ce sujet, et notamment quels indices doit-on donner aux enseignants pour choisir le bon niveau, le bon moment des interventions ?

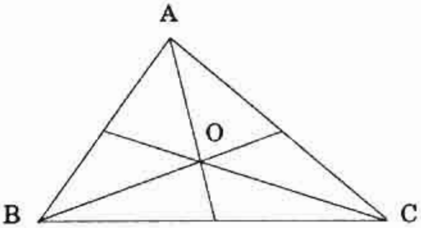
De nouvelles recherches, longues, sont encore indispensables !

ANNEXE 1

Voici quelques exemples de "configurations de base" qui sont des configurations très simples, que l'on retrouve souvent dans les figures (plus complexes) intervenant dans les problèmes, et dont il est utile de bien connaître les propriétés.

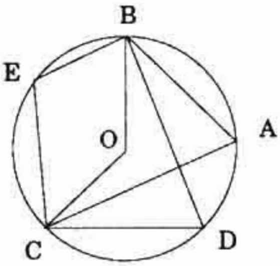
– Avec des triangles

Médianes



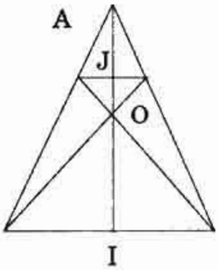
– Avec des cercles

Angle inscrit et angle au centre

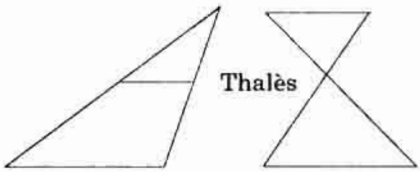


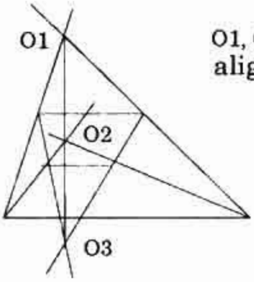
– Liées à des transformations

Homothétie



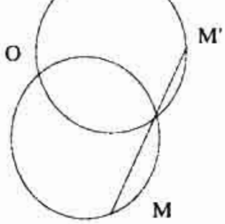
A, J, O, I alignés





O1, O2, O3 alignés

Rotation et similitude



Soit la rotation R de centre O, point d'intersection de deux cercles de même rayon C et C', telle que C' soit l'image de C par R, alors un point de C, son image par R et le deuxième point d'intersection des cercles sont alignés (propriété analogue avec une similitude si les deux cercles n'ont pas le même rayon).

ANNEXE 2

Voici les énoncés des exercices proposés pendant les séances de travail en petits groupes durant l'année 1986-1987. Ces exercices ne sont pas originaux, l'important est que les énoncés ne comportent pas d'indications, ceci pour permettre la recherche et le questionnement méthodologique. Une seule exception, l'exercice J, qui est donné sous la forme proposée lors du baccalauréat, cet exercice permettant de comparer, par les enregistrements, le comportement des élèves devant un exercice avec beaucoup d'indications et devant des exercices sans indications.

Les exercices sont codés de A à U, par ordre chronologique.

A : Trois points A, B et C étant donnés, construire D tel que "AB = CD" (longueurs, vecteurs, droites, segments...).

B : Dans un trapèze que peut-on dire des milieux des côtés parallèles, de l'intersection des côtés non parallèles et de l'intersection des diagonales ? Démontrer la propriété.

C : Le plan étant muni d'un repère orthonormé, déterminer l'image de l'ensemble des points M de coordonnées (x,y) vérifiant $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$ par la transformation définie par :

$$x' = x + y$$
$$y' = x - y$$

D : Chercher le lieu de l'orthocentre des triangles ABM lorsque A et B sont fixes et que M décrit un cercle passant par A et B.

E : Soient trois points A, B et C. Soient trois nombres a, b et c strictement positifs et soit M le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c), démontrer que :

$$\frac{a}{\text{aire(BCM)}} = \frac{b}{\text{aire(ACM)}} = \frac{c}{\text{aire(ABM)}} .$$

F: Soit le parallélépipède défini par un sommet A et les arêtes [AB], [AC] et [AD]. Déterminer son volume en utilisant les trois vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$.

G : Vrai-Faux sur les suites.

H : Etudier la suite définie par $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = (1 - u_n)^2$.

I : Soient deux droites qui se coupent en dehors de la feuille et un point sur la feuille en dehors des deux droites. Construire à la règle et au compas la droite qui passe par le point situé sur la feuille et par le point d'intersection des deux droites.

J : Soit C le cercle de centre O et de rayon R (R > 0), et soient A et B deux points diamétralement opposés sur C.

1°) Pour tout point M de C, distinct de A et B, on contruit le point Q tel que MABQ soit un parallélogramme. Déterminer l'ensemble décrit par le milieu I du segment [MQ] puis par le centre de gravité G du triangle BQM lorsque M décrit C privé de A et B.
2°) On note N le symétrique de A par rapport à M et P le point d'intersection des droites (ON) et (BM). Quel rôle joue P relativement au triangle ANB ?
Trouver une homothétie de centre B transformant M en P et déterminer l'ensemble décrit par le point P lorsque M décrit C privé de A et B.
3°) On considère les cercles circonscrits aux triangles OBP et MNP

a) pourquoi ces cercles ne sont-ils pas tangents ?

b) On note K l'autre point commun à ces deux cercles. En utilisant des angles orientés de vecteurs dont les mesures sont respectivement égales, *modulo* 2π, à celles de $(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KP})$ et $(\overrightarrow{KP},\overrightarrow{KM})$, montrer que les points K, A, B, M sont cocycliques.

K : Etudier le comportement des suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = u_n^{\alpha}$.

L : Soit un triangle ABC et trois points P, Q et R situés respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB). Démontrer que si les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes alors l'égalité suivante est vraie :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1 \ .$$

Etudier la réciproque.

M : A et B sont deux points fixes d'un cercle fixe C. M décrit ce cercle ; soit P le point de la demi-droite issue de B passant par M tel que BP = AM. Quel est le lieu de P ?

N : Soient D et D' deux droites parallèles distinctes, soit M un point non situé sur ces droites. Construire un triangle MAB rectangle isocèle de sommet M tel que A soit sur D et B sur D'.

O : Chercher toutes les isométries conservant un triangle isocèle, équilatéral, un rectangle, un carré.

P : Vrai-Faux en géométrie de l'espace.

Q : Soit un triangle OAB, tel que l'angle $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ mesure $\frac{\pi}{3}$. Soit S une similitude transformant A en B et la droite (OA) en la droite (OB).

1) Montrer que S a un centre Ω qui appartient au cercle C circonscrit au triangle OAB.
2) Réciproquement montrer que tout point de C différent de A et B est le centre d'une telle similitude. Déterminer l'ensemble des centres des similitudes S.
3) Donner une construction géométrique du centre lorsque le rapport de S est 2.

R : On considère un triangle BCD équilatéral et un point A dont la projection orthogonale H sur le plan du triangle BCD est le centre de ce triangle. soit M un point du segment [AH]. Déterminer M pour que la somme des aires des triangles AMB, AMC, AMD, BCM, CDM et DBM soit minimale.

S : Soit un triangle ABC. On appelle A' le milieu de [BC], B' le milieu de [AC] et C' le milieu de [AB]. P et P' sont les images de B et C par la rotation de centre A' et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$, et R et R' sont les images de A et B par la rotation de centre C' et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{QR}$, sont orthogonaux et de même norme. Même question pour les vecteurs $\overrightarrow{A'P'}$ et $\overrightarrow{Q'R'}$.

T : Exercices de dénombrement et de probabilité (modélisation de situations concrètes permettant d'utiliser les combinaisons...).

U : On considère six points A, A', B, B', C et C' tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient parallèles et que les droites (AB) et (A'B') soient sécantes en un point I, les droites (BC) et (B'C') soient sécantes en un point J et les droites (AC) et (A'C') en un point K. Que peut-on dire des points I, J et **K ?**

INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES

APMEP (1990) : *Un outil pour des changements*, (Brochure, Paris).

DOUADY R. (1986) : "Jeux de cadres et dialectique outil-objet", *Recherches en didactique des mathématiques* Vol. 7.2, pp. 5-32 (Grenoble).

HADAMARD J. (1898) : *Leçons de géométrie élémentaire* (réédité par Gabay).

MARILIER M.-C., ROBERT A. et TENAUD I. (1987) : "Travail en petits groupes en terminale C", *Cahier de didactique des mathématiques*, n° 40, Irem Paris 7.

PETERSEN J. (1879) : *Méthodes et théorie pour la résolution des problèmes de constructions géométriques*, Gauthiers-Villars (Paris).

PÓLYA G. (1965) : *Comment poser et démontrer un problème*, Dunod (Paris).

ROBERT A., ROGALSKI J., SAMURÇAY R. (1987) "Enseigner des méthodes", *Cahier de didactique des mathématiques*, n° 38, Irem Paris 7.

ROBERT A., TENAUD I. (1987) : *Activités géométriques en terminale C*, Brochure de l'Irem Paris 7 n° 71.

ROBERT A., TENAUD I. (1988) : "Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C", *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 9.1, pp. 31-70 (Grenoble).

ROBERT A. (1992) : "Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire : questions de problématique et de méthodologie", *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 12.2-3, pp. 181-220 (Grenoble).

ROGALSKI M. (1990) : "Enseigner des méthodes en mathématiques", *in Enseigner autrement les mathématiques en DEUG première année*, Brochure de la commission Inter-Irem université, Irem de Lyon.

SCHŒNFELD A. (1985) : *Mathematical problem solving*, Academic press.

TENAUD I. (1986) : *Une année de géométrie en terminale C*, Brochure de l'Irem Paris 7, n° 64.

TENAUD I. (1991) : *Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C : enseignement de méthode et travail en petits groupes*, Thèse de doctorat , université Paris 7.