REPERES - IREM . n°13 - octobre 1993

L'ENSEIGNEMENT DE LA CONTINUITE ET DE LA DERIVABILITE EN ANALYSE NON-STANDARD

Thérèse GILBERT
G.E.M. de Louvain-la -Neuve

Cet article fait suite à l'article "Qu'est-ce que l'analyse non-standard" paru dans le numéro 11 de Repères, daté d'avril 1993.

L'analyse non standard est née il y a plus de 30 ans. A. Robinson en a introduit une version en 1961, E. Nelson en a présenté une autre en 1977.

On sait que l'analyse non standard (nous devrions dire les analyses non standard — celle de Robinson et celle de Nelson) utilise un langage apparemment plus intuitif que l'analyse classique et que les démonstrations de nombreux théorèmes classiques sont plus simples quand on les écrit en analyse non standard. Dès lors, un débat s'est ouvert : l'analyse non standard peut-elle faciliter l'apprentissage de l'analyse ?

Parmi les protagonistes du débat, citons A. Deledicq [1], en France, qui s'intéresse à l'enseignement de l'analyse non standard de Nelson et J. Keisler [2] qui travaille aux Etats-Unis sur l'enseignement de l'analyse non standard de Robinson.

La question posée ci-dessus peut être étudiée de diverses manières : on peut par exemple voir le rapprochement entre l'analyse non standard et le calcul infinitésimal de Leibniz ou s'intéresser aux paradoxes que l'analyse non standard soulève (cf. article [3]). Nous avons choisi d'analyser le problème en nous penchant sur l'enseignement, en analyse non standard de Nelson, de deux points précis d'analyse : les concepts de continuité et de dérivabilité. Plus précisément, nous avons repris quelques difficultés célèbres de l'analyse classique — tirées "d'erreurs" de Cauchy — et avons regardé si l'analyse non standard offrait une alternative intéressante.

Par cet article, nous désirons apporter une pièce au débat sur l'enseignement de l'analyse non standard. Toutefois, la présentation de la continuité et de la dérivabilité que l'on expose ici n'est pas directement transposable dans les classes. Nous tenons également à souligner que ce texte n'est pas une analyse historique des théorèmes de Cauchy ; nous ne les prenons que comme exemples de difficultés de l'analyse classique.

Ce texte paraîtra assez technique au lecteur non entraîné. Il s'adresse aux personnes ayant de bonnes notions d'analyse non standard de Nelson c'est-à-dire connaissant la signification du vocabulaire employé et ayant déjà rencontré les trois axiomes de base (cf. note (1) ou article [3] pour plus d'explications). Nous utiliserons pour l'essentiel le vocabulaire et les notations d'A. Robert [4].

Avant d'entrer dans le vif du sujet, merci à C. Hauchart, M. Henry, H. Lombardi et N. Rouche qui ont contribué à améliorer ce texte.

La continuité des fonctions d'une variable réelle.

Comme nous le verrons, il y a plusieurs façons de présenter la continuité en analyse non standard. On peut, par exemple, d'abord définir la continuité pour les fonctions standard puis étendre le concept aux fonctions quelconques ; ou bien définir la S-continuité (de fonctions quelconques) pour ensuite arriver à la continuité. Mais dans les deux cas, cela implique la connaissance de l'axiome de standardisation (cf. note (1)).

Nous aimerions trouver un concept dont la définition ne fasse pas appel à l'axiome de standardisation et qui traduise bien l'intuition que nous avons de la continuité.

Cette intuition peut s'exprimer de deux façons pour les fonctions d'une variable dans $\mathbb{R}$:

1° f est continue si on peut tracer son graphe sans lever le crayon (pour autant que le domaine soit connexe) ;

2° f est continue si, quand x est tout près de y , $f(x)$ est tout près de $f(y)$.

Cette dernière intuition est trompeuse si l'on se réfère à la définition classique de continuité. Pour le montrer, nous présenterons un exemple de proposition fausse (bien connue car elle a été formulée par Cauchy) dont la "démonstration" est pourtant intuitivement claire.

Après cela, nous tenterons de choisir, par le biais de l'analyse non standard, un concept de continuité dont la définition soit facilement compréhensible, suffisamment proche de l'intuition et qui fonctionne bien dans des démonstrations de théorèmes simples, bref une définition plus accessible aux élèves que celle en ε , δ .

Sauf mention du contraire, nous ne considérerons ici que des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1 — La continuité en analyse non standard.

Nous présentons ici deux façons d'introduire la notion de continuité en analyse non standard.

1.1. Des fonctions standard aux fonctions quelconques.

On définit d'abord la continuité des fonctions standard (définition 1). Ensuite on définit "implicitement" la continuité des fonctions quelconques en des points quelconques (définition 2), c'est-à-dire qu'on étend aux fonctions quelconques la continuité définie sur les fonctions standard en des points standard par l'intermédiaire de l'axiome de standardisation. On peut également définir implicitement la continuité uniforme (définition 3).

Définition 1. (cf. note (2)) Soient g une fonction standard définie sur un intervalle standard J et s un réel standard de J. On dit que g est *continue en* s si

$$\alpha \simeq 0 \Rightarrow g(s+\alpha) \simeq g(s)$$

Définition 2. Soient f une fonction (quelconque) définie sur un intervalle (quelconque) I et x un réel (quelconque) de I. On dit que f est *continue en* x si

$$(f,x) \in {}^{S}\{(g,s) : \alpha \simeq 0 \Rightarrow g(s+\alpha) \simeq g(s)\}$$

où ce dernier ensemble est l'unique ensemble standard dont les éléments standard (g,s) sont ceux tels que g est continue en s (au sens de la définition 1).

Définition 3. Soient f une fonction (quelconque) définie sur un intervalle (quelconque) I. On dit que f est *uniformément continue sur* I si

$$(f,I) \in {}^{S}\{(g,J) : \forall s \in J\ [\alpha \simeq 0 \Rightarrow g(s+\alpha) \simeq g(s)]\}.$$

1.2. De la S-continuité à la continuité.

On peut aussi commencer par définir la S-continuité (définition 4), puis implicitement la continuité (définition 5) en étendant aux fonctions quelconques la S-continuité des fonctions standard par l'intermédiaire de l'axiome de standardisation et implicitement également la continuité uniforme (définition 6).

L'application de la définition 5 à une fonction quelconque n'est pas évidente ; on peut se référer pour cela à l'article [3] où l'on détermine si la fonction définie par :

$$f(x) = \omega x^2$$

est continue, en applicant les définitions 4 et 5.

Définition 4. Soient g une fonction (quelconque) définie sur un intervalle (quelconque) J et s un réel (quelconque) de J. On dit que f est *S-continue en* x si

$$\alpha \simeq 0 \Rightarrow g(s+\alpha) \simeq g(s)$$

Définition 5. Soient f une fonction (quelconque) définie sur un intervalle (quelconque) I et x un réel (quelconque) de I. On dit que f est *continue en* x si :

$$(f,x) \in {}^{S}\{(g,s) : g \text{ est S-continue en } s\}.$$

Définition 6. Soit f une fonction (quelconque) définie sur un intervalle (quelconque) I. On dit que f est *uniformément continue* sur I si

$(f,I) \in$
$^{S}\{(g,J) : \forall s \in J\ g$ est S-continue en $s\}$.

1.3. Equivalences.

On peut prouver [4] que les définitions 2 et 5 de continuité et les définitions 3 et 6 de continuité uniforme sont équivalentes aux définitions classiques en ε, δ (définition 7 et 8) .

Définition 7. Soient f une fonction définie sur un intervalle I dans $\mathbb{R}$ et x un réel. On dit que f est *continue en* x si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$$
$$[\ |\alpha| < \delta \Rightarrow |f(x+\alpha) - f(x)| < \varepsilon].$$

Définition 8. Soient f une fonction définie sur un intervalle I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est *uniformément continue sur I* si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall x \in I$$
$$[\ |\alpha| < \delta \Rightarrow |f(x+\alpha) - f(x)| < \varepsilon].$$

On peut prouver aussi [4] que si f est une fonction standard définie sur un intervalle standard I et x un réel standard de I , alors

1° f est S-continue en x , si et seulement si f est continue en x ;

2° f est S-continue en tout réel standard de I , si et seulement si f est continue sur I .

3° f est S-continue en tout réel de I si et seulement si f est uniformément continue sur I .

1.4. Différences.

Pour montrer que la continuité et la S-continuité sont des concepts différents — du moins lorsqu'on les applique aux fonctions non standard ou en des points non standard — citons quelques exemples illustrant ces notions.

1° La fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } x \geq 0 \\ -\varepsilon & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en 0, mais est S-continue sur $\mathbb{R}$.

2° La fonction réelle définie par $g(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais non S-continue en les réels infiniment grands (elle n'est donc pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ — en vertu de la propriété citée à la fin de la section 1.3).

3° La fonction réelle définie par

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

est continue sur $\mathbb{R}_0$ mais non S-continue en les réels infiniment petits (elle n'est donc pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_0$).

1.5. L'intuition.

Si la formulation

$$x \simeq y \Rightarrow f(x) \simeq f(y)$$

traduit assez bien l'intuition "quand x est tout près de y, $f(x)$ est tout près de $f(y)$", on voit par les exemples cités plus haut qu'elle ne traduit pas le fait qu'une fonction est continue si son graphe peut être tracé sans lever le crayon : la fonction f du premier exemple ci-dessus est S-continue alors qu'on ne peut pas tracer son graphe sans lever le crayon ; les fonctions g et h des exemples 2° et 3° nous montrent que l'inverse est possible aussi.

En fait, au lieu de "x est tout près de y", on voudrait pouvoir dire "x touche y" (en imaginant, un instant, les réels organisés comme des billes enfilées), expression qui, si on pouvait lui donner une certaine rigueur, serait bien plus forte que l'expression non standard "x est infiniment proche de y", quoique l'adverbe "infiniment" laisse penser: la fonction f citée plus haut est telle que les réels plus petits que 0 n'ont pas une image qui "touche" $f(0)$ — il y a des points intermédiaires qui ne sont images d'aucun réel — même si elle lui est infiniment proche.

En outre, les définitions implicites de continuité en analyse non standard, c'est-à-dire celles se servant de l'axiome de standardisation sont difficilement accessibles à des élèves débutant en analyse.

1.6. Choix d'une définition.

Vu les difficultés liées à l'application de l'axiome de standardisation, on pourrait s'en tenir, dans un premier temps, à la définition 1 de continuité sur les fonctions standard ou la définition 4 de S-continuité.

L'analyse d'une "erreur" peut nous éclairer sur le choix à faire...

2 — Une erreur classique.

L'erreur que nous allons analyser porte sur une fonction de deux variables. Celle-ci nous permettra de considérer une infinité de fonctions d'une variable (en fixant la deuxième).

2.1. La continuité chez Cauchy.

Voici les définitions de quantité infiniment petite et de continuité tirées des cours d'analyse de Cauchy de 1821 [6] et 1823 [5].

"On dit qu'une quantité variable devient *infiniment petite*, lorsque sa valeur numérique décroit indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro."

"Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infiniment petit* ou une quantité infiniment petite. Une variable de cette espèce a zéro pour limite."

"La fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction continue de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

décroît indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, *la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attibuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très-rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit."

Et voici son théorème de continuité d'une fonction de plusieurs variables, écrit en 1821 [6].

"Soit maintenant

$$f(x, y, z, ...)$$

une fonction de plusieurs variables $x,y,z...$; et supposons que, dans le voisinage de valeurs particulières $X, Y, Z...$ attribuées à ces variables, $f(x, y, z ...)$ soit à-la-fois fonction continue de x, fonction continue de y, fonction continue de z, etc.

On prouvera aisément que, si l'on désigne par α, β, γ ... des quantités infiniment petites, et si l'on attribue à x, y, z ... les valeurs X, Y, Z ..., ou des valeurs très voisines, la différence

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma) - f(x, y, z ...)$$

sera elle-même infiniment petite. En effet, il est clair que, dans l'hypothèse précédente, les valeurs numériques des différences

$$f(x+\alpha, y, z, ...) - f(x, y, z ...),$$
$$f(x+\alpha, y+\beta, z ...) - f(x+\alpha, y, z ...),$$
$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma ...) - f(x+\alpha, y+\beta, z ...),$$

etc...

décroîtront indéfiniment avec celles des quantités variables α, β, γ..., savoir, la valeur numérique de la première différence avec la valeur numérique de α, celle de la seconde différence avec la valeur numérique de β, celle de la troisième avec la valeur numérique de γ, et ainsi de suite. On doit en conclure que la somme de toutes ces différences, savoir,

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, ...) - f(x, y, z ...)$$

convergera vers la limite zéro, si α, β, γ... convergent vers cette même limite. En d'autres termes,

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)$$

aura pour limite

$$f(x, y, z ...).$$

[...]

Lorsque, dans la même proposition, on remplace x, y, z ... par X, Y, Z ..., et $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$ .... par x, y, z ..., on obtient l'énoncé suivant.

1er Théorème. *Si les variables x, y, z ... ont pour limites respectives les quantités fixes et déterminées X, Y, Z ..., et que la fonction $f(x, y, z ...)$ soit continue par rapport à chacune des variables x, y, z ... dans le voisinage du système des valeurs particulières*

$$x = X, y = Y, z = Z ...,$$

$f(x, y, z ...)$ aura pour limite $f(X, Y, Z ...)$. "

La démonstration de ce théorème est assez intuitive et pourtant, *pour le lecteur d'aujourd'hui* elle est fausse. Plus précisément, comme les définitions de continuité de Cauchy ne sont pas précises, il est difficile de savoir s'il se trompait en écrivant cette démonstration. Mais ce qui nous intéresse est la facilité avec laquelle *nous*, qui connaissons une définition précise de continuité, pouvons glisser en lisant la preuve et l'admettre si on ne nous a pas averti de sa fausseté. Et c'est en cela que nous parlons d'erreur.

Nous allons nous servir d'un contre-exemple pour rechercher cette erreur en traduisant la preuve d'abord en langage classique, puis en la traduisant en termes non standard.

Le contre-exemple choisi est la fonction de deux variables réelles définie par

$$g(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)} \qquad \text{si } (x,y) \neq (0,0)$$

$$g(0,0) = 0$$

dont le graphe est représenté ci-dessous et qui est discontinue au point (0,0), alors que $g(x,y)$ est à la fois fonction continue de x pour chaque y et fonction continue de y pour chaque x.

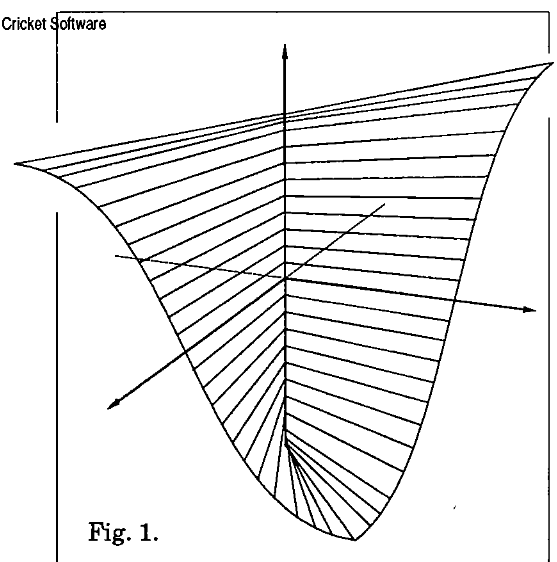

Fig. 1.

Reprenons la démonstration en l'appliquant à la fonction $g(x,y)$ et au point $(X,Y) = (0,0)$.

On a le résultat préliminaire suivant :

$$g(\alpha, \beta) - g(0,0) \qquad (1)$$

est la somme de

$$g(\alpha, 0) - g(0,0) \qquad (2)$$

et de

$$g(\alpha, \beta) - g(\alpha,0). \qquad (3)$$

2.2. Le théorème de Cauchy et l'analyse classique.

La valeur de y étant fixée, la valeur de (2) décroît indéfiniment avec celle de α c'est-à-dire en termes actuels

$$\forall\, \varepsilon' > 0\ \exists\, \delta' > 0\ [\ |\alpha| < \delta' \Rightarrow |g(\alpha,0) - g(0,0)| < \varepsilon'\ ].$$

Et, *la valeur de* α *étant fixée*, la valeur de (3) décroît indéfiniment avec celle de β, c'est-à-dire

$$\forall\, \varepsilon'' > 0\ \exists\, \delta'' > 0\ [\ |\beta| < \delta'' \Rightarrow |g(\alpha,\beta) - g(\alpha,0)| < \varepsilon''.] \ (4)$$

Et pourtant, la valeur de (1) ne converge pas vers 0 lorsque α et β convergent vers 0.

En fait, pour avoir (4), il faut que α soit fixé. Mais quand α tend vers 0 et si β est fixé, l'expression

$$|g(\alpha,\beta) - g(\alpha,0)|$$

grandit (du moins tant que $\alpha > \beta$).

Les hypothèses du théorème ne sont donc pas suffisantes, il faut les modifier.

Pour une fonction de deux variables $f(x,y)$, on peut exiger d'une part que, pour tout y fixé, $f(x,y)$ soit fonction continue de x c'est-à-dire

$$\forall y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon' > 0\ \exists \delta' > 0$$
$$[\ |\alpha| < \delta' \Rightarrow |f(x+\alpha,y) - f(x,y)| < \varepsilon'\ ]$$

et d'autre part que $f(x,y)$ vérifie la condition suivante

$$\forall y \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon'' \in \mathbb{R}\ \exists \delta'' > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$[\ |\beta| < \delta'' \Rightarrow |f(x,y+\beta) - f(x,y)| < \varepsilon''\ ]$$

que nous pouvons appeler *continuité d'une variable, uniforme par rapport à l'autre.* Elle ne doit pas être confondue avec la continuité uniforme, pour chaque x, de $f(x,y)$ considérée comme fonction de y.

2.3. Le théorème de Cauchy et l'analyse non standard.

Analysons maintenant la démonstration en la regardant d'un point de vue non standard. On est tenté de le faire puisque Cauchy utilise le terme infiniment petit, même si celui-ci a pour lui une toute autre signification que celle que l'analyse non standard lui donne.

La démonstration est basée sur le fait que la somme de deux infiniment petits est un infiniment petit ; ce qui est vrai en analyse non standard. Alors où est l'erreur ?

Puisque $g(x,0)$ est une fonction standard continue de x, elle est aussi S-continue de x, en $x = 0$. Donc

$$\alpha \simeq 0 \Rightarrow g(\alpha,0) \simeq g(0,0)$$

et la valeur de (2) est bien infiniment petite. Par contre, $g(\alpha,y)$ avec α infiniment petit non nul, n'est pas une fonction standard de y puisque α n'est pas standard. On peut s'en rendre compte soit en remplaçant x par α dans l'expression de g, soit en regardant la Fig.1 : la coupe de la surface par le plan $x = \alpha$ parallèle à OYZ est une courbe dont la pente est infiniment grande au voisinage de $y = 0$; ceci n'est pas suffisant pour affirmer que $g(\alpha,y)$ est non standard, mais convainc du fait que l'on n'a pas

$$\beta \simeq 0 \Rightarrow g(\alpha,\beta) \simeq g(\alpha,0)$$

et que, si α et β sont infiniment petits, (3) ne l'est pas forcément.

Par ce problème, on se rend compte que, même dans l'étude de la continuité d'une fonction standard en un point standard (la fonction g au point (0,0)) on ne peut pas éviter les fonctions non standard.

Les fonctions de plusieurs variables ne sont pas vues au lycée. Par contre, on ne peut pas éviter les familles de fonctions comme par exemple

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

en disant qu'elles sont toutes continues. Si on limitait la définition de continuité aux fonctions standard, il faudrait restreindre cette affirmation aux cas où a, b et c sont standard.

Pour cette raison, limiter l'étude de la continuité aux fonctions standard ne nous satisfait pas totalement. Il reste l'autre solution : n'enseigner que la S-continuité en distinguant éventuellement entre les fonctions S-continues en tout point et celles qui sont S-continues aux points standard, distinction utile dans le cas des fonctions standard.

Nous allons maintenant formuler un théorème de S-continuité de fonctions de plusieurs variables. Commençons pour cela par définir cette dernière notion.

Définition 9. Soit $f(x_1,x_2,...,x_n)$ une fonction réelle de n variables. On dit que f est *S-continue en* $(X_1,X_2,...,X_n)$ si

$$\forall\ \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n \in \mathbb{R}$$
$$[\ \alpha_1 \simeq \alpha_2 \simeq ... \simeq \alpha_n \simeq 0 \Rightarrow$$
$$f(X_1,X_2,...,X_n) \simeq f(X_1+\alpha_1,X_2+\alpha_2,...,X_n+\alpha_n)\ ].$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème :

Théorème. *Soit $f(x_1,x_2,...,x_n)$ une fonction réelle de n variables. Si, dans le voisinage de valeurs particulières $X_1,X_2,...,X_n$ attribuées à ces variables, $f(x_1,x_2,...,x_n)$ est séparément S-continue par rapport à chacune des variables, alors $f(x_1,x_2,...,x_n)$ est S-continue en $(X_1,X_2,...,X_n)$.*

Ce théorème facilement démontrable n'a évidemment pas la même signification que celui de Cauchy. La fonction non standard

$$h(x,y) = \varepsilon\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\varepsilon} \qquad \text{avec } \varepsilon \simeq 0$$

par exemple est S-continue partout, alors qu'elle est discontinue en un nombre infini de points. Par contre, une fonction standard vérifiant les hypothèses de ce théorème pour un point $(X_1,X_2,...,X_n)$ standard sera continue en $(X_1,X_2,...,X_n)$, puisque pour les fonctions standard de plusieurs variables aussi, continuité et S-continuité en un point standard sont des notions équivalentes.

3 — Première conclusion.

H. Lombardi écrivait dans le "Repères" d'octobre 1991 [7] : "Enfin, la nécessité d'avoir des preuves simples pour des théorèmes intuitivement vrais et fondamentaux, comme le théorème des accroissements finis, devrait être un critère de discrimination décisif quant au choix du modèle mathématique et de l'exposé pédagogique." Ne présenter que la S-continuité aux élèves de lycée — quitte à ce qu'ils aillent plus loin (c'est-à-dire jusqu'à la continuité) plus tard — correspond assez bien à cette vision des choses.

Toutefois, il reste des questions fondamentales.

1° Que faire de l'intuition "f est continue si on peut tracer son graphe sans lever le crayon" ?

2° Faut-il vraiment chercher *à tout prix* à "faire simple" ? Le prix de l'analyse non standard semble assez élevé si l'on se réfère d'une part aux paradoxes qu'elle soulève, d'autre part à la difficulté d'utilisation des axiomes de base (idéalisation, standardisation, transfert) et aux détours qu'il faut faire pour l'éviter.

3° Dans l'enseignement de l'analyse classique, ne peut-on pas éviter les définitions et théorèmes en ε, δ en se basant sur l'intuition et sur quelques bons exemples de "fonctions tordues" pour éviter les pièges ? Et même, ces définitions en ε, δ ne peuvent-elles pas êtres vues dans certaines classes intéressées, comme exemples de moyens à mettre en oeuvre pour traduire sa pensée en des termes de plus en plus rigoureux pour éviter les pièges des infiniment petits intuitifs ? Rien que l'histoire de la définition de continuité en ε, δ est très intéressante.

En outre, si le choix d'une définition de continuité en analyse non standard se passe encore relativement bien, nous verrons dans la deuxième partie qu'il n'en est pas de même pour la dérivée.

La dérivabilité des fonctions d'une variable réelle.

De même que pour la continuité, nous présenterons deux façons d'introduire la dérivabilité et la dérivée d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nous examinerons ensuite une démonstration extraite du cours d'analyse de Cauchy pour laquelle nous verrons que l'hypothèse de la simple dérivabilité ne suffit pas. De là, nous tenterons de trouver un concept à la fois plus fort, plus simple et plus efficace que la dérivabilité, en analyse non standard. Nous verrons ensuite que la définition de la fonction dérivée pose un problème important.

4. La dérivabilité et la dérivée en analyse non standard.

Dans la première partie — consacrée à la continuité — nous avons vu deux façons d'introduire la continuité en analyse non standard. Quoique bien différentes l'une de l'autre, elles utilisaient toutes deux la "propriété" suivante s'appliquant à f et x :

$$\alpha \simeq 0 \Rightarrow f(x+\alpha) \simeq f(x),$$

soit en définissant la continuité des fonctions standard puis en élargissant la définition aux fonctions non standard en utilisant l'axiome de standardisation, soit en définissant la S-continuité et, à partir de là, la continuité en utilisant également le même axiome.

Le même schéma va être repris pour définir la dérivabilité. La propriété de départ s'appliquant à f et x sera :

$$\exists^{\mathrm{S}} m\ [\alpha \simeq_{\neq} 0 \Rightarrow \frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} \simeq m\ ].$$

4.1. Des fonctions standard aux fonctions non standard.

Nous commençons par la définition de dérivabilité d'une fonction standard en un réel standard (définition 10) ; nous l'étendons aux fonctions quelconques à l'aide de l'axiome de standardisation (définition 11).

Puis nous définissons la dérivée d'une fonction standard (définition 12) et ensuite celle d'une fonction quelconque (définition 13).

Définition 10. Soient g une fonction standard définie sur un intervalle standard J et s un réel standard de J. On dit que g est *dérivable en x* si

$$\exists^{\mathrm{S}} m\ [\alpha \simeq_{\neq} 0 \Rightarrow \frac{g(s+\alpha)-g(s)}{\alpha} \simeq m\ ].$$

On appelle m le *nombre dérivé de g en s*.

Définition 11. Soient f une fonction (quelconque) définie sur un intervalle I (quelconque) et x un réel (quelconque de I). On dit que f est *dérivable en x* si

$$(f,x) \in$$
$$^{S}\{(g,s) : \exists^{S} m \ \alpha \simeq_{\neq} 0 \Rightarrow \frac{g(s+\alpha)-g(s)}{\alpha} \simeq m\}$$

autrement dit, si

$$(f,x) \in {}^{S}\{(g,s) : g \text{ est dérivable en } s\}.$$

Définition 12. Soit g une fonction standard dérivable sur un intervalle standard J. On appelle *dérivée de g* et on note g', l'application standard de J dans $\mathbb{R}$ qui à chaque standard s de J fait correspondre le nombre dérivé de g en s.

Définition 13. Soit f une fonction (quelconque) dérivable sur un intervalle (quelconque) I. On appelle *dérivée de f*, l'application f' de I dans $\mathbb{R}$ telle que

$$(f,f',I) \in$$
$$^{S}\{(g,g',J) : g' \text{ est la dérivée de } g \text{ sur } J\}.$$

La définition 10 nous permet de tester la dérivabilité et de calculer la dérivée d'une fonction standard en un point standard. Par exemple, la fonction définie par

$$h(x) = x^2$$

est dérivable en tout réel standard car

$$\forall^{S} x \ [\ \alpha \simeq_{\neq} 0 \Rightarrow \frac{h(s+\alpha)-h(s)}{\alpha} = 2x + \alpha \simeq 2x\ ],$$

et le nombre dérivé de h en un réel x standard est $2x$. Par contre, nous ne pouvons rien dire, à ce stade-ci, de la dérivabilité de cette fonction en un point non standard ni de celle d'une fonction non standard.

Il faut pour cela définir implicitement la dérivabilité des fonctions quelconques en des points quelconques (définition 11) comme nous l'avons fait pour la continuité. Après cela, nous pouvons assurer que la fonction h est dérivable partout puisque

$$\forall^{S} x \qquad h \text{ est dérivable en } x$$

peut s'écrire

$$\forall^{S} x \quad (h,x) \in {}^{S}\{(g,s) : g \text{ est dérivable en } s\}$$

qui entraîne par transfert

$$\forall\, x \quad (h,x) \in {}^{S}\{(g,s) : g \text{ est dérivable en } s\}$$

et donc par définition

$$\forall x \qquad h \text{ est dérivable en } x\ .$$

Le transfert appliqué ici resterait valide si on remplaçait h par n'importe quelle fonction standard ; on voit donc qu'une fonction standard dérivable en tout point standard de I est dérivable sur I.

Mais, pour revenir à la fonction h, on ne peut encore rien dire de la fonction dérivée de h et en particulier de sa valeur en un réel x non standard.

Pour cela, nous devons définir l'application dérivée d'une fonction. Nous commençons par la définir pour une fonction standard (définition 12). L'unicité de l'application standard dont il est question dans cette définition est assurée par le fait, découlant de l'axiome de transfert, que deux applications standard qui coïncident en les points standard sont égales. Son existence peut être prouvée en utilisant l'axiome de standardisation.

Cette définition nous permet de calculer $h'(x)$ en tout point x . En effet, on avait

$\forall^{s} x$ le nombre dérivé de h en x est $2x$

donc

$$\forall^{s} x \qquad h'(x) = 2x.$$

Et puisque h' est une application standard, en appliquant le transfert, on obtient

$$\forall x \qquad h'(x) = 2x .$$

On définit ensuite implicitement la dérivée d'une fonction quelconque (définition 13). A l'aide de ces quatre définitions (10, 11, 12 et 13), le lecteur pourra par exemple calculer la dérivée de la fonction définie par

$$k(x) = \omega x^2$$

où w est un réel infiniment grand. Pour cela, il devra d'abord considérer les fonctions $k_a(x) = ax^2$ où a est un réel standard.

4.2. De la S-dérivabilité à la dérivabilité.

Nous définissons la S-dérivabilité (définition 14) et la S-dérivée (définition 15) puis, en appliquant l'axiome de standardisation, la dérivabilité et la dérivée (définitions 16 et 17).

Définition 14. Soient g une fonction (quelconque) définie sur un intervalle (quelconque) J et s un réel (quelconque) de J. On dit que g est S-*dérivable en s* si

$$\exists^{s} m \, [\alpha \simeq_{\neq} 0 \Rightarrow \frac{g(s+\alpha) - g(s)}{\alpha} \simeq m].$$

On appelle m le *nombre S-dérivé de g en s* .

Définition 15. Soit g une fonction (quelconque) S-dérivable en tout point standard de J. On appelle *S-dérivée de g* l'application standard $g^{\cdot}$ qui à chaque standard s de J fait correspondre le nombre S-dérivé de g en s.

Définition 16. Soient f une fonction (quelconque) définie sur un intervalle (quelconque) I et x un réel (quelconque) de I. On dit que f est *dérivable en x* si

$$(f,x) \in {}^{s}\{(g,s) : g \text{ est S-dérivable en } s\}.$$

Définition 17. Soient f une fonction (quelconque) dérivable sur un intervalle (quelconque) I. On appelle *dérivée de f* l'application f' de I dans R telle que

$$(f,f',I) \in {}^{s}\{(g, g^{\cdot}, J) : g^{\cdot} \text{ est la S-dérivée de } g \text{ sur } J \}.$$

La définition 14 permet de voir que la fonction h définie par

$$h(x) = x^2$$

est S-dérivable en tout réel non infiniment grand. En effet,

$$\frac{h(x+\alpha) - h(x)}{\alpha} = 2x + \alpha ,$$

où α est infiniment petit, est infiniment proche d'un standard si x n'est pas infiniment grand. Le nombre S-dérivé de h n'est égal à $2x$ que pour les réels x standard. On peut voir, de la même façon, que la fonction k définie par

$$k(x) = \omega x^2,$$

où ω est un réel infiniment grand n'est S-dérivable nulle-part. Par contre, la fonction l définie par

$$l(x) = \varepsilon x^2,$$

où ε est un réel non nul infiniment petit, est S-dérivable en les réels non infiniment grands et même en certains réels infiniment grands (comme $1/\varepsilon$) par exemple) et son nombre S-dérivé est nul en tout réel non infiniment grand.

A l'aide de la définition 15, nous pouvons déterminer la S-dérivée des fonctions h et l. En utilisant ce que l'on a trouvé ci-dessus, on écrit

$$\forall^s x \qquad h^{\cdot}(x) = 2x\,,$$

donc, par transfert puisque $h^{\cdot}$ est standard,

$$\forall x \qquad h^{\cdot}(x) = 2x\,.$$

Et

$$\forall^s x \qquad l^{\cdot}(x) = 0,$$

donc, par transfert

$$\forall x \;\; l^{\cdot}(x) = 0.$$

Il y a donc un sens à parler de la valeur de la fonction S-dérivée en un point où la fonction n'est pas S-dérivable et donc où le nombre S-dérivé n'existe pas ! En cela, cette terminologie n'est pas bien choisie.

Les définitions 16 et 17 permettent de tester la dérivabilité de fonctions quelconques et de calculer leur dérivée. La fonction k définie plus haut, par exemple, est dérivable partout et sa dérivée est

$$k'(x) = 2\omega x\,.$$

4.3. Equivalences.

On peut prouver que les définitions 11, 13, 16 et 17 sont équivalentes aux définitions classiques de dérivabilité et de dérivée :

Définition 18. Soient f une fonction définie sur un intervalle I et x un réel de I. On dit que f est *dérivable en x* si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe, c'est-à-dire si

$$\exists m \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$$

$$[\; |h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - m \right| < \varepsilon \;].$$

On appelle cette limite m , le *nombre dérivé de f en x.*

Définition 19. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On appelle *dérivée* de f et on note f', l'application qui à chaque réel x de I fait correspondre le nombre dérivé de f en x.

De plus, on peut prouver(5) que si f est une fonction standard définie sur un intervalle standard I et si x est un réel standard de I , alors :

1° f est S-dérivable en x et de nombre S-dérivé m , si et seulement si f est dérivable en x et de nombre dérivé m ;

2° f est S-dérivable en tout réel standard de I , si et seulement si f est dérivable sur I et dans ce cas la S-dérivée et la dérivée coïncident.

3° f est S-dérivable en tout réel de I , si et seulement si f est dérivable sur I et sa dérivée est uniformément continue et bornée.

5 — Une erreur à propos de la dérivabilité.

Nous nous intéresserons ici à la démonstration d'un théorème de Cauchy. Nous verrons que pour qu'elle soit correcte, il faut ajouter une hypothèse à l'énoncé de Cauchy.

5.1. La dérivée chez Cauchy.

Voici la définition de dérivée écrite par Cauchy en 1823 [5].

"Lorsque la fonction $y = f(x)$ reste continue entre deux limites données de la variable x et que l'on assigne à cette variable une valeur comprise entre les deux limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit, attribué à la variable, produit un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Par conséquent, si l'on pose alors Dx= i, les deux termes du *rapport aux différences*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\mathrm{i}) - f(x)}{\mathrm{i}}$$

seront des quantités infiniment petites. Mais, tandis que ces deux termes s'approcheront indéfiniment et simultanément de la limite zéro, le rapport lui-même pourra converger vers une autre limite, soit positive, soit négative. Cette limite, lorsqu'elle existe, a une valeur déterminée, pour chaque valeur particulière de x ; mais elle varie avec x. [...] la forme de la fonction nouvelle qui servira de limite au rapport $\frac{f(x+\mathrm{i}) - f(x)}{\mathrm{i}}$ dépendra de la forme de la fonction proposée $y = f(x)$. Pour indiquer cette dépendance, on donne à la nouvelle fonction le nom de *fonction dérivée*, et on la désigne, à l'aide d'un accent, par la notation

$$y' \text{ ou } f'(x).$$

[...] "

Voici maintenant le théorème de Cauchy donnant une relation entre le rapport aux différences finies et la fonction dérivée [5].

"**Théorème.** *Si, la fonction $f(x)$ étant continue entre les limites $x = x_0$, $x = X$, on désigne par A la plus petite, et par B la plus grande des valeurs que la fonction dérivée $f'(x)$ reçoit dans cet intervalle, le rapport aux différences finies*

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} \qquad (5)$$

sera nécessairement compris entre A et B.

Démonstration . Désignons par δ, ε, deux nombres très-petits, le premier étant choisi de telle sorte que, pour des valeurs numériques de i inférieures à δ, et pour une valeur quelconque de x comprise entre les limites x_0, X, le rapport

$$\frac{f(x+\mathrm{i}) - f(x)}{\mathrm{i}}$$

reste toujours supérieur à $f'(x) - \varepsilon$, et inférieur à $f'(x) + \varepsilon$. Si, entre les limites x_0, X, on interpose $n - 1$ valeurs nouvelles de la variable x, savoir,

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1},$$

de manière à diviser la différence $X - x_0$ en éléments qui, étant tous de même signe, aient des valeurs numériques inférieures à δ ; les fractions

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \dots, \frac{f(X) - f(x_{n-1})}{X - x_{n-1}} \quad (6)$$

se trouvant comprises, la première entre les limites $f'(x_0) - \varepsilon$, $f'(x_0) + \varepsilon$, la seconde, entre les limites $f'(x_1) - \varepsilon$, $f'(x_1) + \varepsilon$, &c... seront toutes supérieures à la quantité $A - \varepsilon$, et inférieures à la quantité $B + \varepsilon$. D'ailleurs, les fractions (6) ayant des dénominateurs de même signe, si l'on divise la somme de leurs numérateurs par la somme de leurs dénominateurs, on obtiendra une fraction moyenne, c'est-à-dire, comprise entre la plus petite et la plus grande de celles que l'on considère [...]. L'expression (5), avec laquelle cette moyenne coïncide, sera donc elle-même renfermée entre les limites $A - \varepsilon$, $B + \varepsilon$; et, comme cette conclusion subsiste, quelque petit que soit le nombre ε, on peut affirmer que l'expression (5) sera comprise entre A et B."

La démonstration utilise des ε, δ presque comme on le fait aujourd'hui. Cela nous incite à la traduire en termes actuels avec des quantificateurs. Par contre, une traduction en langage non standard ne semble pas naturelle contrairement au cas de la démonstration de Cauchy sur la continuité d'une fonction de plusieurs variables dans laquelle le langage utilisé s'y prêtait mieux. Néanmoins après avoir traduit dans le langage classique actuel la démonstration de Cauchy et déterminé le concept classique manquant à sa justesse, nous tenterons de trouver son équivalent en analyse non standard.

5.2. Traduction en analyse classique.

Nous ne traduirons ici que le début de la démonstration. En fait, il s'agit plutôt d'une récriture symbolique du texte de Cauchy. En effet, dans ce début démonstration, l'ordre des quantificateurs est important et l'écriture symbolique peut aider à y voir clair.

Il faut d'abord remarquer que Cauchy suppose implicitement que la fonction est dérivable entre x_0 et X. Ensuite, en traduisant le début de la démonstration en termes actuels, on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall i \; \forall x \in [x_0, X]$$

$$[\; |i| < \delta \Rightarrow$$

$$f'(x) - \varepsilon \leq \frac{f(x+i) - f(x)}{i} \leq f'(x) + \varepsilon \,] . \quad (7)$$

Ceci ne découle ni des hypothèses énoncées par Cauchy ni de celle de dérivabilité de la fonction f. On peut montrer par ailleurs(3) que, pour une fonction dérivable f, la condition (7) est équivalente au fait que la dérivée de f est uniformément continue sur $[x_0, X]$. Mais si l'on ajoutait cette dernière condition aux hypothèses du théorème, on restreindrait sa portée alors qu'on sait que l'énoncé est correct moyennant l'hypothèse de simple dérivabilité.

5.3. Traduction en analyse non standard.

Voici une traduction du début de la démonstration en analyse non standard. On considère un découpage infinitésimal (6) de $[x_0, X]$, $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = X)$ et on devrait avoir

$$\forall i = 0,1,\dots,n-1 \quad \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \simeq f'(x_i) .$$

Autrement dit, il faut non seulement que f soit dérivable sur $[x_0, X]$, mais que

$$\forall x \in [x_0, X] \; [\, \alpha \simeq 0 \Rightarrow \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} \simeq f'(x)].$$

En fait, on peut prouver(4) que cette dernière condition équivaut, pour les fonctions standard, à la condition (7) c'est-à-dire au fait que f' soit uniformément continue.

Par la dernière proposition de la section 4.3., on voit que, si f est standard, lui imposer d'être S-dérivable en tout réel de $[x_0, X]$ serait une condition (plus que) suffisante pour ce début de démonstration.

6. L'inaccessibilité de la dérivée.

Pour la continuité, nous avons dit qu'on pourrait éventuellement limiter l'étude à la S-continuité en distinguant entre les fonctions S-continues en tout réel standard et celles qui sont S-continues en tout réel. Pour la dérivabilité, nous pourrions faire de même c'est-à-dire ne voir que la S-dérivabilité — accessible aux élèves — et éventuellement distinguer entre les fonctions S-dérivables en tout réel standard et celles S-dérivables partout.

Nous allons voir que pour trouver un concept de dérivée (qui intervient également dans le théorème de Cauchy), d'autres problèmes se posent.

La dérivée est un concept important qui intervient dans beaucoup de domaines (même autres que les mathématiques). Il est exclu de ne pas le voir au lycée.

En analyse classique, une fois acquises les définitions de dérivabilité et de nombre dérivé, celle de fonction dérivée ne pose pas de problème. Voyons si c'est aussi le cas en analyse non standard et pour cela, examinons les définitions 12, 13, 15 et 17 de dérivée et S-dérivée. Elles font toutes appel à l'un ou l'autre des axiomes de base de l'analyse non standard. Dans les définitions 12 et 15, ils n'apparaissent pas explicitement, mais d'une part comment expliquer l'existence et l'unicité d'une telle application standard sans se référer aux axiomes de transfert et de standardisation, d'autre part comment appliquer cette définition sur un exemple de fonction sans faire appel à l'axiome de transfert ?

On peut essayer de fabriquer un autre concept. Appelons-le $\overset{\circ}{S}$ – dérivée. Considérons une fonction f S-dérivable sur un intervalle I. En chaque réel de I, on a donc un nombre standard m appelé le nombre S-dérivé de f en x. Quoi de plus naturel alors que d'appeler $\overset{\circ}{S}$ – dérivée l'application qui à tout réel x de I fait correspondre le nombre S-dérivé de f en x ? Pourquoi n'a-t-on pas fait cela avant ? Parce que la $\overset{\circ}{S}$ – dérivée est souvent une fonction externe (au même titre que les ensembles externes(1)), "en escalier" (quoique les arêtes de cet escalier soient floues) dont la propre $\overset{\circ}{S}$ – dérivée (pour autant que ce mot ait un sens pour une fonction externe...) est toujours identiquement nulle ! Or on ne peut pas se passer du concept de dérivée seconde que ce soit en mathématiques ou dans ses domaines d'application.

7 — Conclusion.

Alors, que faire ? Parcourons quelques possibilités.

Enseigner au lycée les axiomes qui fondent l'analyse non standard paraît difficile.

Ne pas les enseigner mais essayer de les faire appliquer naturellement quand on en a besoin ? Par exemple pour l'axiome de transfert, on pourrait dire : si une propriété classique est vérifiée par tous les standard (sous-entendu, par tous les nombres que l'on connaît ou que l'on peut imaginer), elle l'est sûrement aussi par les non standard...

Il est vrai qu'on est loin d'enseigner les fondements de l'analyse classique au lycée et qu'on fait accepter aux élèves beaucoup de choses dont ils ne peuvent percevoir l'importance et ceci, même sans leur dire ! Par exemple, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires sans parler ou presque de la complétude de $\mathbb{R}$ ou, plus généralement, on fait des mathématiques sans voir la théorie des ensembles sur laquelle elles reposent. Mais l'usage de ces définitions, propriétés ou axiomes non explicités semble en général assez naturel. De plus, l'histoire de l'analyse classique nous montre que les mathématiciens ont produit des résultats importants bien avant que soient installés ses fondements (par exemple, bien avant la théorie des ensembles ou même la définition des réels). Il semble alors assez naturel de s'inspirer du même schéma dans l'enseignement : on réserve les fondements de l'analyse pour le moment où l'étudiant en connaîtra suffisamment pour se poser les questions dont ces fondements constituent les réponses.

Par contre, l'analyse non standard (de Nelson) ne fut développée qu'après que furent introduits le nouveau prédicat "standard" et les trois axiomes (même si on se doute que pour les écrire, E. Nelson devait savoir ce qu'il voulait pouvoir écrire en les utilisant). Leibniz, Euler, Newton,... ont bien développé des mathémathiques qui font penser à l'analyse non standard. Mais l'outil qu'est l'analyse non standard (pris avec un minimum de rigueur) se différencie quand-même nettement de celui de ces mathématiciens. Il semble difficile d'enseigner l'analyse non standard avec un minimum de rigueur sans faire passer, d'une manière ou d'une autre, le prédicat et les trois axiomes de bases ou au moins certaines de leurs conséquences.

On peut aussi n'utiliser, de l'analyse non standard, que son vocabulaire, pour susciter les intuitions en analyse classique — même si on sait que celles-ci sont parfois trompeuses. L'introduction de ce vocabulaire n'implique pas nécessairement une étude explicite des axiomes IST, de même que le vocabulaire des ensembles n'exige pas la connaissance formelle de la théorie ZFC. Mais pour utiliser ce langage des infiniment petits, qui est aussi celui de Leibniz, Euler, Cauchy et bien d'autres, les professeurs de mathématiques n'ont pas attendu l'analyse non standard...

Peut-être y a-t-il quand-même une "solution", il faut creuser un peu plus pour le savoir... Une proposition d'enseignement de l'analyse au lycée est en train d'être élaborée par l'équipe de A. Delédicq [9] ; elle est largement inspirée de l'analyse non standard et s'efforce de présenter "naturellement" certains de ces principes.

On peut au moins affirmer que l'analyse non standard est parfois éclairante dans le sens où elle permet de voir d'un œil nouveau des concepts ou des propositions déjà bien connues.

NOTES

(1) Les trois axiomes de l'analyse non standard de Nelson.

Cette note est en grande partie extraite de l'article [3].

1. L'axiome de standardisation.

En analyse non standard, on ne peut généralement pas collectiviser les éléments d'un ensemble standard E vérifiant une propriété non classique P ; autrement dit l'ensemble $\{x \in E \mid P(x)\}$ n'existe en général pas (on dit que c'est un *ensemble externe*).

L'axiome de standardisation assure néanmoins l'existence d'un ensemble standard A dont les éléments standard sont exactement ceux de E vérifiant P ; on peut montrer que cet ensemble est unique, on le note

$$A = {}^{S}\{x \in E \mid P(x)\}\ .$$

Voici l'énoncé exact de l'axiome :

Pour toute formule F (classique ou non),

$$[\forall^{S} E\ \exists^{S} A\ \forall^{S} x\ (x \in A \Leftrightarrow x \in E \wedge F(x))].$$

2. L'axiome de transfert.

L'axiome de transfert permet de déduire des propriétés concernant les non standard en se basant sur ces propriétés sur les standard :

Pour toute formule classique F,

$$\forall^{S} z_1, z_2, \dots, z_n$$
$$[\forall x\, F(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \Leftrightarrow$$
$$\forall x\, F(x, z_1, z_2, \dots, z_n)].$$

3. L'axiome d'idéalisation.

Pour toute formule classique F ,

$$[\forall^{S\ \text{fini}} A\ \exists x\ \forall y \in A\ F(x, y)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists x_0\ \forall^{S} y\ F(x_0, y)].$$

En remplaçant, par exemple, $F(x, y)$ par $[x \in \mathbb{N} \wedge (y \in \mathbb{N} \Leftrightarrow y < x)]$, on obtient la proposition assurant l'existence de non naïfs dans $\mathbb{N}$.

(2) La rigueur.

Pour ne pas alourdir le texte, nous avons volontairement omis quelques détails de rigueur dans les définitions. Le lecteur scrupuleux pourra sans peine les rétablir.

Par exemple, dans la définition 1 nous devrions écrire

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ [(\alpha \simeq 0 \text{ et } x + \alpha \in \mathrm{I}) \Rightarrow f(x+\alpha) \simeq f(x)]$$

au lieu de

$$\alpha \simeq 0 \Rightarrow f(x+\alpha) \simeq f(x).$$

De même, pour que la définition 2 soit exacte, il faudrait écrire

$$^{S}\{(g, s) \in \mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathbb{R} :$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ [(\alpha \simeq 0 \text{ et } s + \alpha \in Dg)$$
$$\Rightarrow g(s+\alpha) \simeq g(s)]\}$$

où $\mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et Dg, le domaine de définition de g, plutôt que

$$^{S}\{(g, s) : \alpha \simeq 0 \Rightarrow g(s+\alpha) \simeq g(s)\}.$$

(3) **Proposition.** *Soit une fonction réelle f, dérivable sur un intervalle I. La dérivée f' de f est uniformément continue sur I, si et seulement si*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in I\, \forall\, i \in \mathbb{R}_0$$

$$[\ |i| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x+i) - f(x)}{i} - f'(x) \right| < \varepsilon\ ].$$

Démonstration. Si cette dernière condition est vérifiée, alors

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in I\, \forall\, i \in \mathbb{R}_0$$

$$[\ |i| < \delta \Rightarrow [\,|f'(x+i) - f'(x)| \leq$$

$$\left|f'(x+i) - \frac{f(x+i) - f(x)}{i}\right| + \left| \frac{f(x+i) - f(x)}{i} - f'(x) \right|$$

$$< 2\varepsilon\,]\,],$$

et donc f' est uniformément continue sur I.

Inversement, il faut que

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in I\, \forall\, i \in \mathbb{R}_0$$

$$[\ |i| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x+i) - f(x)}{i} - f'(x) \right| < \varepsilon\ ].$$

Or, par le théorème de la moyenne, il existe $\theta \in\ ]0,1[$ tel que

$$\left| \frac{f(x+i) - f(x)}{i} - f'(x) \right| = |\, f'(x+\theta i) - f'(x)\,|$$

et si $|\,i\,| < \delta$, alors $|\,\theta i\,| < \delta$. Il reste alors à appliquer l'hypothèse d'uniforme continuité de f'.

(4) **Proposition.** *Soit une fonction réelle standard f, dérivable sur un intervalle standard I. La dérivée f' est uniformément continue sur I, si et seulement si*

$$\forall x \in I\, \forall \alpha \in \mathbb{R}_0\, [\alpha \simeq 0 \Rightarrow \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} \simeq f'(x)\,].$$

Démonstration. Par la proposition de la note (3), si f' est uniformément continue sur I, alors

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in I\, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}_0$$

$$[\ |\alpha| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} - f'(x) \right| < \varepsilon\ ].$$

En appliquant l'axiome de transfert, on trouve

$$\forall^s\, \varepsilon > 0\, \exists^s\, \delta > 0\, \forall\, x \in I\, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}_0$$

$$[\ |\alpha| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} - f'(x) \right| < \varepsilon\ ].$$

Puisque les réels α infiniment petits sont tels que $|\alpha| < \delta$ pout tout δ standard, on a

$$\forall^s\, \varepsilon > 0\, \forall\, x \in I\, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}_0$$

$$[\ \alpha \simeq 0 \Rightarrow \left| \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} - f'(x) \right| < \varepsilon\ ].$$

D'où

$$\forall\, x \in I\, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}_0$$

$$[\ \alpha \simeq 0 \Rightarrow \forall^s\, \varepsilon > 0\, \left| \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} - f'(x) \right| < \varepsilon\ ]$$

ce qu'il fallait prouver.

Inversement, si

$$\forall x \in I\, \forall \alpha \in \mathbb{R}_0\, [\ \alpha \simeq 0 \Rightarrow \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} \simeq f'(x)\ ]$$

alors il existe un δ infiniment petit tel que

$$\forall x \in I\, \forall \alpha \in \mathbb{R}_0\, [\ |\alpha| < \delta \Rightarrow \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} \simeq f'(x)\ ]$$

On a donc

$$\forall^s \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in I\, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}_0$$

$$[\ |\alpha| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} - f'(x) \right| < \varepsilon\ ];$$

en appliquant le transfert, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, \forall \, x \in \mathrm{I} \, \forall \, \alpha \in \mathbb{R}_0$$

$$[\ |\alpha| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} - f'(x) \right| < \varepsilon\ ],$$

qui, par la proposition de la note (3), entraîne que f' est uniformément continue sur I.

(5) Les propositions 1° et 2° de la page 17 sont connues en analyse non standard et leurs démonstrations suivent un schéma très utilisé ne posant pas de problèmes.

La proposition 3° sera démontrée après le lemme suivant :

Lemme. *Soit une fonction réelle f dérivable sur un intervalle I. Si*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in I \, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_0$$
$$[(\ |\alpha| < \delta \text{ et } |\beta| < \delta\ ) \Rightarrow$$
$$\left| \frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} - \frac{f(x+\beta)-f(x)}{\beta} \right| < \varepsilon\ ], \quad (8)$$

alors f' est uniformément continue sur I.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons le δ qui convient pour (8). Comme f est dérivable sur I , pour ce même ε , on a

$$\forall \, x \in I \, \exists \, \delta'_x < \delta \, \forall \, \beta \in \mathbb{R}_0$$

$$[\ |\beta| < \delta'_x \Rightarrow \left| \frac{f(x+\beta)-f(x)}{\beta} - f'(x) \right| < \varepsilon\ ]. (9)$$

Donc, par (8) et (9), pour cet ε,

$$\exists \, \delta > 0 \, \forall \, x \in I \, \exists \, \delta'_x < \delta \, \forall \, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_0$$
$$[(\ |\alpha| < \delta \text{ et } |\beta| < \delta'_x (< \delta)\ ) \Rightarrow$$

$$\left| \frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} - f'(x) \right| \leq$$

$$\left| \frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} - \frac{f(x+\beta)-f(x)}{\beta} \right|$$

$$+ \left| \frac{f(x+\beta)-f(x)}{\beta} - f'(x) \right| < 2\varepsilon\ ].$$

D'où

$$\forall \, \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, \forall \, x \in I \, \forall \, \alpha \in \mathbb{R}_0$$

$$[\ |\alpha| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} - f'(x) \right| < \varepsilon\ ],$$

ce qui, par la proposition de la note (3), est équivalent à l'uniforme continuité de f' sur I.

Proposition. *Soit une fonction réelle standard f, définie sur un intervalle (standard) I. f est S-dérivable en tout point de I, si et seulement si f est dérivable sur I et sa dérivée f' est uniformément continue et bornée sur I.*

Démonstration. Si f est standard et S-dérivable en tout point de I, elle l'est en tout point standard de I et donc elle est dérivable sur I. D'autre part

$$\forall \, x \in I \, \exists^{S} m \, \forall \, \alpha \in \mathbb{R}_0$$

$$[\ \alpha \simeq 0 \Rightarrow \frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} \simeq m\ ]$$

est équivalent à

$$\forall \, x \in I \, \forall \, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_0$$

$$[\ \alpha \simeq 0 \text{ et } \beta \simeq 0 \Rightarrow [\ \frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} \simeq \frac{f(x+\beta)-f(x)}{\beta}$$

$$\text{et } \frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} \text{ est limité}\ ]\ ]. \quad (10)$$

Donc il existe un réel d infiniment petit tel que

$$\forall \, x \in I \, \forall \, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_0 [\ |\alpha| < \delta \text{ et } |\beta| < \delta \Rightarrow$$

$$[\forall^{s}\varepsilon > 0 \ \left| \frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} - \frac{f(x+\beta)-f(x)}{\beta} \right| < \varepsilon]] .$$

En avançant le quantificateur $\forall^{s}\varepsilon > 0$ et en appliquant l'axiome de transfert, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in I \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_0$$
$$[\ |\alpha| < \delta \text{ et } |\beta| < \delta \Rightarrow$$
$$\left| \frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} - \frac{f(x+\beta)-f(x)}{\beta} \right| < \varepsilon] .$$

Le lemme nous permet alors de conclure que f' est uniformément continue. Par la proposition de la note (4), on a donc

$$\forall x \in I \ \forall \alpha \in \mathbb{R}_0$$

$$[\alpha \simeq 0 \Rightarrow \frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} \simeq f'(x)] \qquad (11)$$

et puisque, par (10), $\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}$ est limité, $f'(x)$ l'est aussi pour chaque réel x de I donc

$$\exists N \ \forall x \in I \ f'(x) < N \qquad (12)$$

et f' est bornée sur I.

Inversement, (11) et (12) entraîne (10).

(6) Soit a, b deux réels standard distincts. On appelle *découpage infinitésimal de* $[a,b]$, une suite $(x_0, x_1, \ldots, x_N)$ telle que

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_N = b$$

et

$$\forall \ i = 0, 1, \ldots, N\text{-}1 \qquad x_i \simeq x_{i+1}.$$

Bibliographie

[1] A. Deledicq, De l'analyse non standard au calcul infinitésimal, in *L'enseignement de l'analyse aux débutants,* Académia-Erasme, Louvain-la Neuve (à paraître).

[2] H.J. Keisler, *Elementary calculus* , Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1976.

[3] Th. Gilbert, Qu'est-ce que l'analyse non standard ?, *Repères-Irem* , *n°* 11, 1993.

[4] A. Robert, *Analyse non standard,* Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1985.

[5] A.L. Cauchy, *Le calcul infinitésimal* , Debure, Paris, 1823. Réédité par ACL-éd., Paris, 1987.

[6] A.L. Cauchy, *Analyse algébrique*, Debure, Paris, 1821. Réédité par J. Gabay, Sceaux, 1989.

[7] H. Lombardi, L'uniformité, un concept implicite efficace chez Cauchy , *Repères - Irem, n°5,* octobre 91.

[8] A. Deledicq, M. Diener, *Leçons de calcul infinitésimal,* A. Colin, Paris, 1989.

[9] Irem de l'Université de Paris 7, *L'analyse au lycée avec le vocabulaire infinitésimal,* (à paraître).

[10] I. Lakatos, Cauchy and the continuum: the signifiance of Non Standard Analysis for the History and Philosophy of Mathematics, *Mathematical Intelligencer,* Vol.1, 1966, pp. 77-78.