REPERES - IREM . n°13 - octobre 1993

PARADOXES ET LOIS DE PROBABILITE

M. HENRY et H. LOMBARDI
Irem de Besançon

I — Les deux chèvres et la voiture

Vous êtes sur un plateau de télévision, candidat(e) à un jeu idiot(1) .

L'animateur, Henri Cubique vous rappelle votre rôle :

Henri : *"Vous avez devant vous trois portes. Derrière ces portes, nos gentils organisateurs ont réparti deux chèvres :* ***Bichette*** *et* ***Chabichou****, et une* ***automobile*** *d'un modèle haut de gamme produit par un constructeur français non nationalisé... (le règlement de la télévision m'interdit de citer ici sa marque)".*

(1) Ce jeu de la télévision américaine de l'émission "Let's make a deal" et l'émotion soulevée aux Etats Unis par ce problème paradoxal ont été rapportés dans un article du "Courrier International" du 5 Septembre 1991.

"Vous emporterez le cadeau qui sera derrière la porte que vous choisirez en dernier lieu. Seulement vous avez droit à un essai gratuit. La porte de votre premier choix ne sera pas ouverte. Par contre, je libérerai l'une des deux chèvres en ouvrant une autre porte. Il vous restera à opter entre les deux portes restant fermées, et votre deuxième choix sera, je l'espère cher(e) candidat(e), le bon !"

Vous : *"Voilà un choix difficile ! "*

Et vous entamez une petite réflexion : sans autre indication sur la répartition des trois objets derrière ces trois portes, on peut imaginer plusieurs possibilités :

— par respect de l'harmonie des choses, les organisateurs, dans une quête de symétrie absolue, ont placé la voiture derrière la porte centrale ?

— ou ont-ils préféré mettre les chèvres du Larzac à gauche et la voiture du PDG à droite ?

— ou bien encore, sachant qu'on lit et écrit de gauche à droite, ont-ils voulu donner du brio à l'émission et placer la belle auto derrière la porte de gauche, celle qui est choisie le plus fréquemment ?

Henri : *"Je comprends vos hésitations, et l'enjeu est gros : ou vous emportez une chèvre,* ***Bichette*** *ou* ***Chabichou****, et vous devrez la nourrir jusqu'au restant de ses jours, après quoi elle vous nourrira ; ou vous gagnez la voiture et vous devez également la nourrir jusqu'au restant de ses jours, mais elle vous transportera."*

"Pour vous éviter de nombreuses interrogations sur les chances a priori que vous avez de choisir la bonne porte, et aussi pour qu'au fil des émissions n'apparaissent pas de préférences systématiques qui pourraient vous influencer, nos gentils organisateurs ont réparti leurs cadeaux de manière parfaitement aléatoire, utilisant un dispositif de choix au hasard homologué par nos amis du loto."

Vous : *"Alors, plus d'hésitations inutiles, je choisis cette porte-là !" (Et vous indiquez une porte).*

Henri : *" Bravo ! Vous avez* ***peut-être*** *fait le bon choix".*

" Comme vous m'êtes très sympathique, et comme d'ailleurs je vous l'avais annoncé, je vais ouvrir l'une des deux portes que vous n'avez pas choisies, derrière laquelle je sais qu'il y a l'une des deux chèvres".

" Qui voyons-nous apparaître chers téléspectateurs ? C'est ***Chabichou*** *qui est* ***mêêêgnifique*** *! Déjà apparue la première lors de l'émission de la semaine dernière, reviendra-t-elle en cinquième semaine? (auquel cas elle devrait être définitivement recrutée parmi l'équipe de nos gentils organisateurs, ne trouvez-vous pas ?)."*

Mais ce n'est pas votre problème : il vous reste deux portes et vous pouvez faire un nouvel et dernier choix, vous espérez donc qu'il sera le bon!

Vous : *" Avec cette porte s'ouvrant sur* ***Chabichou****, le problème a quelque peu changé : il ne me reste plus qu'à choisir l'une des deux autres portes".*

In petto, vous vous demandez : " Mais la sortie de Chabichou m'apporte-t-elle un renseignement supplémentaire ?"

Dans le doute, vous n'avez pas le temps d'analyser cette question et vous enchaînez :

" Comme je n'ai pas de parenté directe avec l'âne de Buridan, je vais choisir l'une des deux portes avec une meilleure chance de gagner la voiture que de gagner ***Bichette****".*

Henri : *" Comme je vous comprends ! mais je vous assure que personne ici n'a songé un seul instant à vous comparer à un quelconque Cadichon ! Cependant, si Monsieur Buridan, que vous connaissez, veut bien nous prêter son animal, ce dernier pourrait remplacer* ***Chabichou*** *la semaine prochaine."*

Henri commente alors la scène :

" Maintenant nous arrivons à l'étape ultime. Notre candidat semble avoir fait son choix. Il se dirige vers une des deux portes, il semble décidé, il n'y a pour lui plus de doute ! Chers téléspectateurs, ce candidat est d'une détermination inhabituelle, on dirait qu'il sait où se trouve la belle automobile !"

Vous : *" Ayant gagné au loto la semaine dernière, c'est ma période de chance, j'en profite pour faire tous les jeux : j'ouvre cette porte ..."*

L'EDF, pourtant fidèle au poste, a failli ce jour-là et l'émission s'est interrompue. Alors pour nous une grave question :

Quelle probabilité aviez vous de gagner la voiture ?

Si ce petit jeu vous intéresse, arrêtez votre lecture ici et proposez votre solution. Puis, avec un autre Henri (Lombardi, celui-là), entrez dans les méandres d'une épistémologie profonde. Enfin, avec Henry (Michel !), vous reviendrez aux aspects didactiques d'un redoutable paradoxe à l'usage des élèves des terminales.

II — Vous avez dit paradoxe ?

Nous avons pu surprendre une conversation entre deux mathématiciens qui défendent deux points de vue diamétralement opposés. Par discrétion, nous les appellerons Alpha et Béta.

Alpha : *Lorsque l'animateur ouvre la porte qui cache une chèvre, il n'apporte aucune information au candidat sur les places respectives de l'auto et de l'autre chèvre qui sont derrière les deux autres portes, puisque le règlement du jeu prévoit par avance cette action. Le candidat est alors ramené à un choix parfaitement hasardeux entre les deux portes qui lui restent, il a donc une chance sur deux de gagner la voiture.*

Béta :*Lorsque vous dites que le candidat est ramené à un choix parfaitement hasardeux, on ne sait plus* qui *sont les vrais acteurs ! Et l'usage de la forme passive est ici un peu un escamotage du problème. Aussi je propose un autre raisonnement. Le candidat, lors de son premier choix a une chance sur trois de choisir la porte de la voiture et deux chances sur trois de choisir la porte ouvrant sur une chèvre. Si, au deuxième choix, il maintient son premier choix, quelle que soit la porte ouverte par l'animateur, sa probabilité d'avoir choisi la voiture reste 1/3. Si, par contre, il change de porte,* "gagner la voiture" *est alors le même événement que* "avoir choisi une chèvre lors du premier choix". *Il a donc deux chances sur trois de gagner la voiture.*

Ami lecteur, selon vous, qui de Alpha et Béta tient le bon raisonnement ?

... mais la conversation se poursuit.

Alpha : *Votre raisonnement, quoiqu'époustouflant au premier abord, est empreint de subjectivité. Au fond, vous prétendez que le candidat a tout bonnement* porté malchance *par avance à la porte qu'il a désignée. A moins que ce soit l'animateur qui soit investi de ce rôle satanique ? En réalité, du point de vue des choix opérés par le candidat puis par l'animateur, quatre situations sont également possibles :*

$$A\text{-}B,\quad A\text{-}C,\quad B\text{-}C,\quad C\text{-}B$$

Dans deux cas sur quatre, le candidat doit maintenir son choix, dans deux autres cas, il doit en changer. Il n'a donc pas plus intérêt à changer son choix initial qu'à le conserver. Il a de toute manière une chance sur deux d'obtenir l'automobile.

Béta : *Justement, nous pouvons supposer que l'animateur ouvre systématiquement la porte derrière laquelle se trouve Bichette, sauf si c'est celle qu'a choisie le candidat, auquel cas il ouvre la porte derrière laquelle se trouve Chabichou. Il ne reste donc que trois cas. Et dans deux cas sur trois, le candidat doit changer son choix : dans cette hypothèse, il a deux chances sur trois d'adopter la bonne attitude.*

Alpha : *C'est bien ce que je soupçonnais. Votre raisonnement ne marche que grâce à la subjectivité de l'animateur. C'est lui Satan, le porte-guigne, mais c'est par votre faute ! Au diable Monsieur Cubique, je vais le remplacer par un tirage à pile ou face entre les deux portes restantes. Voilà une situation objective, débarrassée de toute subjectivité, comme on les aime en mathématiques ! Maintenant, il y a six situations équiprobables après ce tirage au sort :*

A - B   A - C   C - B   B - C   C - A   B - A

Les deux derniers cas sont exclus par le règlement du jeu, s'ils se présentent, on recommence tout à zéro : on replace au hasard Automobile, Bichette et Chabichou derrière les trois portes. Le candidat recommence son choix. Puis on tire au hasard une des deux portes restantes. Cette procédure garantit qu'au bout d'un certain temps on aboutisse à l'une des quatre situations A - B, A - C, C - B, B - C. Sans qu'aucune ne soit privilégiée. En toute objectivité, *les quatre situations : A - B , A - C , C - B et B - C sont donc bien équiprobables.*

Béta : *Votre raisonnement est troublant, mais il présente un point faible. Lorsque le candidat a fait par chance le premier choix A une seule des deux possibilités A - B ou A - C sera réalisée. Vous raisonnez comme si alors l'Univers se séparait en deux morceaux, l'un où serait réalisé A - B et l'autre ou serait réalisé A - C. Tandis qu'Il resterait Unique dans les cas où le candidat a fait en premier l'un des deux mauvais choix B ou C , et où l'animateur n'a plus qu'une seule porte possible à ouvrir. Mais ça ne se passe pas comme ça, l'Univers ne se sépare pas en deux. Et cette remarque n'est pas subjective. Ce n'est pas la subjectivité de l'animateur qui maintient l'Unicité de l'Univers. Vous traitez de manière symétrique les choix A , B et C du candidat, vous laissant entraîner par la symétrie de la situation avant l'intervention de l'animateur. Mais celui-ci brise cette symétrie. Vous accusez Mr Cubique d'être Satan, mais il est effectivement investi d'un réel pouvoir "surnaturel" au regard de votre sacrosainte "objective équiprobabilité", celui d'ouvrir à tout coup une "mauvaise" porte. Ce qui signifie, dans votre langage plus métaphysique qu'objectif, qu'il a porté malchance à cette porte qu'il a ouverte.*

Alpha : *Vous n'avez pas vraiment répondu à mon argument. Aussi pour nous départager, je vous propose une simulation au moyen d'un jeu de dés. Les portes gauche (1), centre (2) et droite (3) seront représentées respectivement par les tirages 1 ou 4 , 2 ou 5 , 3 ou 6 . Le premier jet de dés choisit derrière quelle porte se trouve Bichette. Le deuxième choisit derrière quelle porte se trouve Chabichou (on recommence éventuellement jusqu'à un choix compatible). Le jet de dés suivant représente la porte choisie par le candidat. Le jet de dés encore suivant représente la porte ouverte par l'animateur* *(on recommence jusqu'à un choix compatible). Il n'y a pas de situation plus purement aléatoire.*

Béta : *D'accord, je représenterai le candidat, laissez-moi en dernier appliquer ma stratégie (changer systématiquement mon choix) ... et voyons les résultats.*

Alpha : (une heure plus tard) *Vous avez gagné 42 fois sur 67. Je me rends à l'objectivité des dés. Mais je vais réfléchir à une autre procédure ...*

Ami lecteur. Notre camarade Alpha est trop honnête ! S'il avait été assez rusé, il aurait proposé une procédure légèrement différente, celle qui correspond vraiment à sa première proposition ("au diable Monsieur Cubique ..."). Dans ce cas-là, les dés lui auraient donné raison... Mais après tout, Alpha ne cherchait peut-être pas à avoir raison à tout prix. Peut-être était-il simplement animé par la recherche de la vérité ?

La procédure légèrement différente qu'il aurait pu proposer aurait été la suivante :

Le premier jet de dés choisit derrière quelle porte se trouve Bichette. Le deuxième choisit derrière quelle porte se trouve Chabichou (on recommence éventuellement jusqu'à un choix compatible). Le jet de dés suivant représente la porte choisie par le candidat. Le jet de dés encore suivant représente la porte ouverte par l'animateur, mais ici, si le choix tombe sur l'automobile, on annule la partie et on recommence tout à zéro.

Au bout d'une heure d'expérimentation, Alpha aurait pu déclarer triomphant : *«Vous avez gagné seulement 20 fois sur 45 »* ....

Peut-être Béta aurait-il alors pensé à répondre : *«mais 22 parties ont été annulées, alors que si nous avions respecté vraiment les règles du jeu, elles auraient été comptabilisées comme bonnes pour moi »*.

Si vous êtes sceptiques, expérimentez vous-mêmes. Vous trouverez à la fin de l'article une liste de jets de dés «au hasard» qui a été obtenue de la manière suivante : on prend les premières décimales de $\sqrt{2}$ = 1,41421356237309504... on supprime les chiffres 0 , 7 , 8 , 9 qui ne représentent pas des jets de dés... et on s'arrête quand la page est remplie. A propos, ne trouvez-vous pas que les 421 sont un peu privilégiés dans ce tableau purement hasardeux ????

III — Quelques concepts de base pour formuler ce problème de probabilités.

Après cet interlude revenons à nos moutons, ou plutôt à nos chèvres.

Vous avez dit *probabilités* ? Il y a donc de l'aléa quelque part. La description précise de l'expérience aléatoire qui conduit le candidat à ouvrir une porte est essentielle pour définir le modèle probabiliste qui fournira une réponse.

Le premier choix ne pose pas de problème : il y a une **automobile (A)**, une première chèvre **Bichette (B)** et une deuxième chèvre **Chabichou (C)** réparties au hasard derrière les portes comme le précise très clairement le règlement du jeu. Ainsi, la probabilité de l'un ou l'autre des lots lors du premier choix est équirépartie :

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3.$$

Par contre, le deuxième choix du candidat s'effectue dans des conditions insuffisamment précises pour déterminer un modèle probabiliste parmi une infinité possible.

En réalité, comme le dialogue entre Alpha et Béta le montre, la porte ouverte par l'animateur dépend du premier choix du candidat (c'est l'autre chèvre si l'une a déjà été choisie, c'est l'une quelconque des deux chèvres sinon). Par suite, la porte choisie par le candidat en deuxième temps, dépend de celle qui fut ouverte par l'animateur en ce qu'elle l'exclut.

Les événements résultant des premier et deuxième choix ne peuvent donc être supposés indépendants... sauf si le candidat, négligeant son premier choix, tire au hasard la deuxième porte... Ainsi la description donnée de l'expérience n'induit pas la loi de probabilité qui régira le choix de la deuxième porte. Précisons cela.

En toute généralité, un choix aléatoire entre deux objets est décrit par un modèle de Bernoulli : choisir une porte avec la probabilité p ($0 \leq p \leq 1$) ; et l'autre porte avec la probabilité $1 - p$. Le choix de la valeur de p est ici laissé au candidat. (on n'ira pas jusqu'à le rendre aléatoire !).

a — Si le 2ème tirage entre les deux portes restantes est ignorant du choix de la première porte, il est clair que la probabilité d'obtenir l'auto A est 1/2. On peut le vérifier avec les hypothèses qui précèdent.

En effet, si P_1 et P_2 sont les deux portes restantes, on a : $P(A/P_1) = 1/2$ et $P(A/P_2) = 1/2$, car l'automobile et la chèvre sont équiprobables derrière P_1 et P_2 , et $P(P_1) = p$, $P(P_2) = 1-p$, si c'est le modèle adopté par le candidat.

D'où : $P(A) = P(A/P_1)\,P(P_1) + P(A/P_2)\,P(P_2) = 1/2\,p + 1/2\,(1-p) = 1/2$.

b —Mais si dans le deuxième tirage, le candidat tient compte de son premier choix, les choses sont différentes :

Supposons que sa stratégie $S(p)$ est de maintenir son 1er choix avec la probabilité p et d'en changer avec la probabilité $1-p$. Appelons A_1 , B_1 , C_1 , respectivement les événements *"choisir la porte de l'auto"*, *"de Bichette"*, *"de Chabichou"* au premier choix, et A_2, B_2, C_2 ces événements au deuxième choix. On a alors pour probabilités a priori :

$$P(A_1) = P(B_1) = P(C_1) = 1/3 .$$

Puis pour probabilités au deuxième choix, avec la stratégie $S(p)$:

$$P(A_2/A_1) = p \; , \; P(A_2/B_1) = 1-p \; , \; P(A_2/C_1) = 1-p \; ,$$

d'où :

$$P(A_2) = P(A_2/A_1)\,P(A_1) + P(A_2/B_1)\,P(B_1) + P(A_2/C_1)\,P(C_1)$$

$$P(A_2) = p\times(1/3) + (1-p)\times(1/3) + (1-p)\times(1/3)$$

On trouve donc : $P(A_2) = \dfrac{2-p}{3}$.

Et l'on constate que $P(A_2)$ peut prendre toute valeur comprise entre 1/3 et 2/3.

— Elle vaut 1/3 si $p = 1$, c'est-à-dire si le candidat maintient son premier choix ;

— Elle vaut 1/2 si $p = 1/2$, c'est-à-dire si le candidat effectue son deuxième choix au hasard ;

— Elle vaut 2/3 si $p = 0$, c'est-à-dire s'il change de porte au deuxième choix.

Sa meilleure stratégie est bien sûr la dernière, et s'il l'adopte,

Il a deux chances sur trois de gagner la voiture !

D'ailleurs, pour achever de vous convaincre, imaginez que ce jeu fasse intervenir 1000 chèvres dont 999 seraient dévoilées par Henri, l'animateur !

IV — Conséquences didactiques :

Ce petit problème montre au moins deux choses :

1 — Devant un apparent paradoxe qui mêle le réel et les outils mathématiques sans discernement, la **description** du réel en termes mathématiques s'avère nécessaire pour situer clairement le problème : le modèle choisi doit être convaincant du point de vue de son adéquation à la situation décrite, il doit être suffisamment simple pour être éclairant et conduire à une réponse prenant du sens par rapport à cette situation.

L'activité de modélisation est primordiale dans l'enseignement des probabilités, si l'on veut sortir des exercices traditionnels de dénombrements avec leurs automatismes et si l'on veut habituer les élèves à savoir poser les problèmes avant de chercher à les résoudre. C'est évidemment la partie la plus difficile pour eux, car cela suppose qu'ils donnent du sens aux outils mathématiques intervenant dans la modélisation, et par conséquent qu'ils aient maîtrisé leurs connaissances sur ces outils. Si cet objectif d'apprentissage est de plus en plus celui des programmes ("on habituera les élèves à décrire des expériences aléatoires simples...")[2], il est ambitieux et ne doit pas être exclusif des objectifs techniques antérieurs.

2 — Ce petit problème montre aussi combien on peut clarifier une situation aléatoire en faisant appel au concept de loi de probabilité. Le concept de variable aléatoire, introduit en terminale, prend alors du sens en s'appuyant sur celui de loi et réciproquement. D'un point de vue didactique, il semble qu'ils doivent être introduits conjointement par le biais d'applications, de manière à ce que les élèves puissent repérer les outils réellement nouveaux pour eux, efficaces pour l'activité de modélisation décrite ci-dessus.

Cela aura au moins pour avantage de relancer l'horloge didactique, c'est-à-dire l'intérêt des élèves pour le calcul des probabilités qui, ces dernières années, semblait nettement s'essouffler. C'est du moins la note d'optimisme que nous vous livrons ici.

V — Application de la deuxième remarque au paradoxe de Bertrand

Si le choix d'une loi de Bernoulli a permis de préciser le modèle probabiliste perti-

(2) On pourra consulter à ce sujet l'article "L'enseignement des probabilités dans le programme de première" paru dans "Repères-Irem" N° 6.

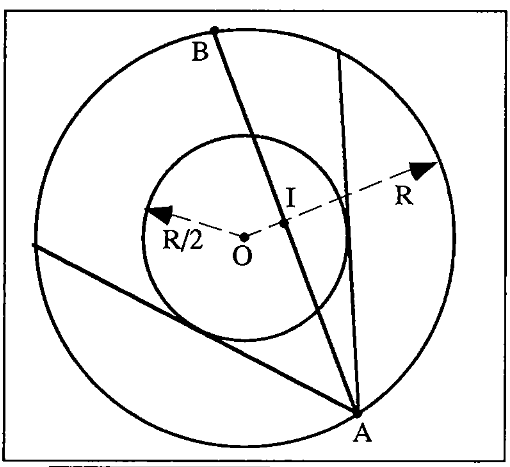
nent pour décrire la situation de ce jeu idiot, on peut penser qu'il n'était pas complètement nécessaire pour résoudre le paradoxe dans ce cas discret.

Dans les situations où interviennent des variables continues, le choix explicite d'une loi de probabilité devient incontournable. Le paradoxe de Bertrand(3) en est un bel exemple.

Bertrand posait le problème en ces termes :

Soit un cercle de rayon R. J'en prends une corde au hasard. Quelle est la probabilité pour que sa longueur soit supérieure à celle du côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle (événement A) ?

Et il proposait au moins trois solutions, suivant l'interprétation que l'on peut donner du "choix au hasard" d'une corde parmi l'infinité de celles-ci :



(3) La plupart des manuels universitaires présentent le paradoxe de Bertrand. On le trouve également dans le bréviaire d' A. Rényi : "calcul des probabilités" (Dunod 1966, réédité par Jacques Gabay). Il peut être intéressant de regarder comment Poincaré traite ce paradoxe, n'ayant pas à sa disposition le langage des variables aléatoires et des lois (calcul des probabilités 1912, réédité par Jacques Gabay).

1) Choisir une corde réalisant A, c'est choisir sa distance au centre inférieure à R/2. La répartition uniforme de la probabilité sur [0, R], qu'induit le "choix au hasard", conduit à la probabilité P(A) = 1/2.

2) Choisir une corde réalisant A, c'est fixer l'une de ses extrémités, puis, à partir de ce point, partageant le cercle en trois arcs égaux, c'est choisir l'autre extrémité sur l'arc opposé. Le choix "au hasard" de cette deuxième extrémité induit la répartition uniforme sur le cercle et conduit à la probabilité P(A) = 1/3.

3) Choisir une corde réalisant A, c'est choisir son milieu à l'intérieur du disque (d) concentrique de rayon R/2. Le choix de ce point "au hasard" dans le disque (D) de rayon R induit la répartition uniforme de la probabilité sur tout le disque ; les aires des deux disques sont dans le rapport 1/4, d'où P(A) = 1/4.

Levons ce paradoxe :

Comme dans le problème précédent, rien dans l'énoncé de Bertrand ne permet de choisir une loi plutôt qu'une autre pour modéliser le "choix au hasard" de la corde, d'où l'ambiguïté paradoxale.

Celle-ci est si forte que certains proposent de réaliser l'expérience un grand nombre de fois pour vérifier statistiquement si la fréquence des cordes réalisant A que l'on prélèverait ainsi, se "stabiliserait" au voisinage de l'une des probabilités annoncées.

Le problème reste entier car il y a de nombreux dispositifs qui pourraient être inventés pour "tirer une corde au hasard", chacun donnant une valeur différente à cette fréquence. Choisir un de ces dispositifs revient en fait à choisir la loi de probabilité qui compléterait la description insuffisante de cette pseudo-expérience aléatoire.

Voici quelques exemples de lois et de probabilités de A associées qui sont autant de solutions au problème de Bertrand :

Convenons que choisir une corde, cela revient à choisir son milieu (la correspondance corde-milieu est bijective, si l'on exclut les diamètres et le centre du cercle qui sont négligeables pour notre problème).

Imaginons que le disque (D) est une cible et que l'on confie le choix de ce milieu à des tireurs à l'arc, l'impact d'une flèche sur le disque-cible de rayon R étant considéré comme ponctuel (on est déjà en train de modéliser !).

On peut aussi supposer que tous les tireurs atteignent la cible à tous les coups (sinon le tir est annulé, ce qui ne change pas la loi de répartition des autres impacts).

Chaque tireur a ses caractéristiques propres : pour le débutant dont les flèches vont n'importe où, pour le tireur de club qui atteindra le rond central (d) de rayon R/2 avec une faible probabilité, autant que pour le champion olympique qui, bien que champion, ne peut garantir que ses tirs échappent aux aléas, le hasard interviendra diversement pour guider la flèche jusqu'à son impact-milieu de la corde recherchée.

Proposons des modèles possibles pour les trois tireurs :

1) Le débutant tire au jugé : proposons la loi uniforme sur le disque (D) de rayon R (cela est bien sûr une hypothèse de modélisation, le débutant peut s'en tirer mieux que cela !). Cette hypothèse conduit à la probabilité proposée par Bertrand :

$$P(A) = \int_D \frac{1}{\pi R^2}\, dx\, dy = \frac{1}{4}.$$

2) Le tireur de club est affecté d'un strabisme divergent : il tire systématiquement trop à droite. Statistiquement, ses impacts se répartissent en moyenne autour du point de coordonnées (R/2, 0). Mais il tire assez fidèlement : les écarts-types de ses résultats par rapport à ce point moyen sont respectivement $\sigma_X = R/4$ et $\sigma_Y = R/4$. Pour le reste, une déviation aléatoire horizontale de son tir n'affecte pas systématiquement la hauteur et réciproquement On pourrait imaginer bien d'autres hypothèses très variées, notamment sur la corrélation possible entre les coordonnées (X,Y) du point d'impact de la flèche. Comme dans de nombreuses situations de répartition aléatoire autour d'une valeur centrale, on peut proposer un modèle gaussien en dimension 2 pour calculer la probabilité demandée. Les hypothèses faites conduisent à une densité de probabilité pour les coordonnées (X,Y) de la forme :

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-R/2}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right)$$

et tenant compte des données numériques, on obtient la probabilité de A :

$$P(A) = \int_D f(x,y)\, dx\, dy = 0{,}4$$

(ne cherchez pas à calculer cette intégrale par primitives, demandez plutôt à un ordinateur !).

3) Même hypothèse de modèle gaussien pour le champion olympique ; seulement, il vise juste, le point moyen de ses tirs est au centre. De plus, les coordonnées (X,Y) ne sont pas corrélées, enfin, les écarts-types des abscisses et ordonnées des impacts sont : $\sigma_x = R/4$ et $\sigma_y = R/4$. Dans ce cas, la probabilité pour qu'il atteigne le disque (d) est :

$$P(A) = \int_D \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp(-\frac{1}{2}[(\frac{x-R/2}{\sigma_x})^2 + (\frac{y}{\sigma_y})^2])dxdy = 0{,}86$$

Ainsi, le concept de loi permet-il de mieux poser ce type de problème de probabilités où interviennent des variables continues. Lors de la modélisation, il permet de formuler des hypothèses précises quant à la description de l'expérience aléatoire. Le choix d'un type de loi, comme ici le modèle gaussien, relève alors de considérations heuristiques.

Les lois de probabilités ne sont pas inscrites dans la nature, elles ont été inventées pour décrire les cas les plus simples, au sein d'une théorie mathématique (celle de la mesure). Leur utilisation pour traiter des problèmes concrets conduira à des approximations qui peuvent être fines et dont le contrôle est une partie importante de la théorie statistique. La détermination des paramètres de la loi (moyennes, écarts-types, corrélations) peut alors faire intervenir une procédure d'ajustement mettant en œuvre des tests statistiques.

VI — Questions de stratégies

Revenons au petit problème du début. Le réalisateur de l'émission s'interroge : quelle probabilité le candidat a-t-il de gagner la voiture ? Tant que ce dernier n'a pas arrêté sa stratégie S(p) (détermination du p dans l'épreuve de Bernoulli, relative au deuxième choix de porte), on a vu que la réponse est comprise entre 1/3 et 2/3 sans pouvoir préciser d'avantage.

Mais le réalisateur, qui ne dispose que d'un budget limité pour la série d'émissions, a constaté après la 1000ème (le jeu a beaucoup de succès !) qu'un tiers des candidats tirait la deuxième porte au hasard (population L), qu'un sixième (population M) changeait délibérément de porte (des matheux sans doute !) et que la moitié (population N) restait systématiquement fidèle à son premier choix.

Dans sa tête, le réalisateur fait le calcul suivant : ayant cette semaine un candidat pris au hasard dans la population, je ne préjuge pas de son comportement en estimant sa probabilité de gagner l'auto ainsi :

$$P(A_2) = P(A_2/L)\,P(L) + P(A_2/M)\,P(M) + P(A_2/N)\,P(N)\,,$$

numériquement, cela donne:

$$P(A_2) = 1/2 \times 1/3 + 2/3 \times 1/6 + 1/3 \times 1/2 = 4/9$$

ce qui semble raisonnable pour mon budget.

Mais il se trouve que le candidat, un malin, sans le dire, fait le choix de la stratégie S(0). Sa probabilité de gagner l'auto est alors $P(A_2) = 2/3$. Ainsi, avant le jeu, selon que l'on soit réalisateur ou candidat, on n'attribue pas la même valeur à la probabilité du même événement !

Quel est ce nouveau paradoxe qui semble contredire le caractère nécessairement objectif de la probabilité ? La probabilité donnée par le réalisateur n'est-elle pas un savoureux mélange entre une conception fréquentiste qui associe ce concept à celui de fréquence d'un effectif dans une population, et une conception pascalienne qui détermine la probabilité comme résultant de l'estimation du nombre des résultats possibles qui réalisent l'événement attendu ?

En réalité, l'interprétation de cette situation qui conclurait à ce qu'une différence d'information entre deux observateurs les conduise à attribuer des valeurs différentes à la probabilité d'un même événement est erronée : le réalisateur et le candidat ne vivent pas la même expérience aléatoire.

Pour le réalisateur, le prélèvement du candidat dans la population n'a pas donné son résultat. Se plaçant par la pensée avant ce prélèvement, il probabilise son problème à partir des données statistiques connues. Ainsi, il imagine une expérience aléatoire qui en réalité a déjà eu lieu. C'est sous cette hypothèse qu'il peut calculer la probabilité de voir partir la voiture. Son calcul est pertinent s'il s'applique à un assez grand nombre d'émissions à venir et s'il veut s'en servir pour estimer le coût moyen de ces émissions. Il n'est pas pertinent s'il s'applique à l'émission en cours, car le candidat n'appartient pas à la fois aux populations L, M, et N avec les probabilités susdites. Il est parfaitement déterminé, l'expérience aléatoire l'ayant choisi a eu lieu, il n'y a plus de probabilité le concernant.

Par contre, le candidat voit une autre expérience aléatoire, celle décrite au début. Celle-là seule l'intéresse et il peut la modéliser comme nous l'avons fait. Il peut donc, sa stratégie étant choisie, savoir la probabilité de gagner la voiture.

Cette dernière remarque montre combien il est important de bien décrire l'expérience aléatoire et ses événements dont on veut connaître les probabilités. Non seulement cela permet de conduire un calcul fondé, mais c'est aussi la condition *sine qua non* pour éviter de tomber sur des conclusions paradoxales ou contradictoires, qui découleraient trop rapidement de conceptions erronées largement installées chez tout un chacun, avant un apprentissage de caractère scientifique du calcul des probabilités.

ANNEXE

*Simulation de jets de dés par les décimales de $\sqrt{2}$
(on a retenu les décimales comprises entre 1 et 6)*

141	344	461	122	362	632	244	246	533	242	141	546	666	455	366	264	333	444	615	133	634
421	314	244	226	156	311	265	542	433	515	363	154	656	445	232	456	232	652	512	366	234
356	321	154	411	226	434	565	345	252	145	263	263	416	456	163	544	434	224	251	642	326
233	453	213	253	552	155	323	364	546	315	111	516	212	264	232	461	411	612	136	222	116
541	626	342	622	635	665	333	662	551	255	642	362	215	245	666	442	533	216	332	113	135
624	362	425	453	145	143	436	544	644	344	231	244	313	416	126	111	125	131	536	144	261
265	525	666	165	422	142	456	255	154	451	115	555	236	253	263	625	316	331	221	326	153
661	146	146	413	665	233	566	631	624	126	436	363	213	332	525	655	116	224	616	312	412
536	253	242	663	323	113	512	644	636	223	366	453	563	636	211	634	564	564	251	331	444
431	365	143	645	646	265	622	131	344	441	612	115	416	213	645	146	553	451	251	131	311
663	463	554	253	151	243	353	633	411	356	341	332	544	353	135	416	115	545	225	343	122
324	312	415	642	121	362	666	615	415	635	616	662	456	532	331	544	413	614	216	421	542
462	646	565	662	624	453	121	213	655	646	146	216	534	513	562	163	433	641	511	255	652
135	261	666	641	155	141	525	344	554	231	614	422	265	651	336	561	232	551	563	515	516
353	525	532	345	113	515	626	515	264	622	555	551	244	364	532	444	153	635	224	456	536
432	352	226	654	515	622	336	633	551	655	553	326	424	444	223	421	364	241	423	524	651
641	355	454	232	455	544	361	325	233	324	613	423	123	564	126	332	611	561	264	556	131
523	445	415	132	312	143	245	465	142	224	115	614	161	563	646	153	211	313	233	366	423
513	525	516	624	565	121	421	455	126	265	161	152	445	412	642	423	426	453	446	314	662
462	612	254	442	263	624	435	661	311	534	363	132	436	636	565	323	232	362	464	612	652
312	355	422	622	146	365	361	213	332	522	532	261	436	451	514	335	411	262	623	551	561
224	522	652	612	112	265	426	223	516	364	545	445	433	632	261	311	362	232	534	461	213
243	335	262	455	426	642	213	452	436	464	516	665	445	154	436	564	525	416	645	134	146
655	315	554	211	536	112	145	142	554	213	444	646	411	153	363	544	432	665	114	622	443
532	113	466	445	424	316	513	636	352	223	524	561	262	354	146	336	512	455	311	355	642
126	543	521	421	351	262	231	551	564	125	115	631	221	633	155	531	433	444	242	242	263
441	463	453	551	453	553	246	322	115	335	143	552	455	423	433	662	443	512	355	262	224
214	444	344	122	162	541	632	143	636	233	564	642	251	252	255	144	361	552	453	426	152
353	163	326	444	256	255	536	232	115	122	533	434	121	543	444	351	435	323	633	423	536
141	664	513	134	313	346	222	426	465	412	636	635	413	262	353	256	636	661	631	616	562
322	153	113	125	511	323	563	133	666	312	136	566	313	456	312	341	242	543	124	326	634
266	544	246	314	634	632	646	644	365	542	453	446	215	412	541	346	515	215	664	455	124
525	231	461	153	156	261	625	634	514	645	442	223	365	551	532	626	223	551	625	443	214
552	645	526	633	361	424	166	316	656	365	355	663	562	416	332	416	432	625	411	322	632
555	424	315	131	615	262	535	152	561	342	325	352	315	315	153	241	131	133	444	636	335
511	236	454	263	236	226	256	134	361	151	136	642	136	541	446	165	666	315	251	343	432
522	423	316	141	452	115	133	561	413	161	331	562	646	443	533	346	411	314	251	144	242
651	616	434	111	236	535	224	252	243	612	513	316	533	563	646	343	131	652	164	633	413
415	215	214	116	232	265	534	211	565	622	154	561	614	355	626	164	545	665	334	633	244
516	546	226	316	143	211	435	644	241	211	134	313	522	162	116	146	463	644	514	254	635
524	311	414	512	655	625	644	243	515	531	421	425	322	215	615	255	643	241	634	525	244
534	156	526	641	656	261	625	662	621	543	421	564	351	434	351	613	444	524	612	611	144
566	661	361	516	656	541	216	231	163	332	252	626	341	515	546	314	353	242	263	426	345
214	313	313	521	455	534	145	163	526	536	116	516	322	152	462	424	335	544	343	361	251
251	156	355	521	155	643	425	621	431	462	515	216	641	143	663	452	134	126	165	262	141
416	156	256	222	516	455	345	633	365	112	534	426	664	666	455	613	451	556	543	553	354
416	232	113	514	442	114	523	661	461	222	443	333	365	253	361	666	523	321	563	332	151
552	352	224	426	453	223	452	156	235	321	361	362	242	442	641	634	666	565	166	164	261
322	526	245	463	663	114	665	345	614	164	314	556	643	122	444	662	515	322	235	366	351