REPERES - IREM . n°12 - juillet 1993

QUELLES CONCEPTIONS EPISTEMOLOGIQUES DE LA DEMONSTRATION POUR QUELS APPRENTISSAGES ?

Evelyne BARBIN
Irem de Paris-Nord

La certitude logique des preuves ne dépasse pas leur certitude géométrique.

L. WITTGENSTEIN(1),
Remarques sur les fondements des mathématiques

Dans l'enseignement français des mathématiques, une place importante est accordée à la démonstration : beaucoup d'enseignants considèrent que la démonstration constitue l'entrée dans le monde des mathématiques. Mais beaucoup d'élèves considèrent que la démonstration marque le début de leur échec dans la discipline scolaire. De plus, dans l'enseignement français des mathématiques, la démonstration est assimilée à la logique déductive.

La situation traditionnelle dans l'enseignement est donc la suivante : une démonstration est d'abord un texte qui répond à certaines normes, allant des hypothèses aux conclusions, énonçant correctement les théorèmes utilisés, usant à bon escient des conjonctions grammaticales. Une démonstration indique le bon chemin, bien différent du cheminement de la recherche. Car la mise en forme déductive efface toute trace des questionne-

Cet article reprend le texte d'une conférence paru dans les *Actes des Journées Paul Langevin*, ed. Rosmorduc, Université de Brest (1991) sous le titre "La démonstration mathématique : histoire, épistémologie et enseignement". Je remercie Nicolas Balacheff, Rudolf Bkouche, Chritine Docq, Jean-Claude Duperret, Jean Houdebine, Marc Legrand et Nicolas Rouche pour leurs remarques et critiques qui m'ont permis de préciser, modifier et rectifier le texte initial.

(1) WITTGENSTEIN, *Remarques sur les fondements des mathématiques*, p.160.

ments, des zones d'instabilité, des tensions qui sont le prélude au désir et au besoin de démontrer. Aussi, la démonstration apparaît souvent à l'élève comme un texte formalisé, normalisé et rituel. Il s'agit de produire un texte qui n'aura pas forcément un sens pour lui.

Récemment, plusieurs recherches ont été menées pour tenter de remédier à cette situation. Nous assistons à une certaine crispation autour de la démonstration, avec une certaine tendance à concevoir l'apprentissage de la démonstration de façon autonome par rapport à l'apprentissage des mathématiques, à la construction des objets mathématiques et à la construction d'une rationalité mathématique. Ainsi, la démonstration peut apparaître comme une activité qui ne prend pas sens par rapport au savoir mathématique.

Nous aborderons ici les problèmes posés par l'enseignement de la démonstration en nous interrogeant sur un certain nombre de questions de nature épistémologique : quel mode de connaissance des objets mathématiques suppose l'activité de démontrer ? quel sens cela a-t-il de démontrer ? à quelle conception du savoir renvoie le besoin de démontrer ? Pour traiter ces questions nous nous reporterons à l'histoire de la géométrie, et pour mieux cerner les genèses et les ruptures, nous nous centrerons sur la démonstration du théorème qui énonce que la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits. Tout enseignement de la démonstration suppose certaines conceptions épistémologiques, implicites ou explicites, dont il nous semble nécessaire qu'elles soient analysées. C'est de ce point de vue que nous analyserons ensuite quelques démarches vis-à-vis de l'enseignement de la démonstration géométrique.

Cette analyse n'a pas pour but de dire comment enseigner la démonstration, mais d'étudier un certain nombre de questions qui nous semblent préalables à une conception de l'apprentissage de la démonstration.

Quel mode de connaissance des objets mathématiques suppose l'activité de démontrer ?

Il y a trois façons de concevoir les objets mathématiques et leur mode de connaissance : une conception réaliste, une conception idéaliste et une conception constructiviste(2). En quoi se distinguent-elles ? Comment interviennent la démonstration et l'activité de démontrer dans chacune de ces différentes conceptions ?

Selon la conception *réaliste*, nous découvrons les objets mathématiques, les objets préexistent dans le réel. Dans la conception réaliste, les objets mathématiques, abstraits du réel, préexistent à l'activité de démontrer. La démonstration est alors vue comme un moyen de suppléer à l'insuffisance des moyens d'observation ou des instruments. Ainsi, la démonstration sur la somme des angles d'un triangle suivra des mesures au rapporteur des trois angles d'un ou de plu-

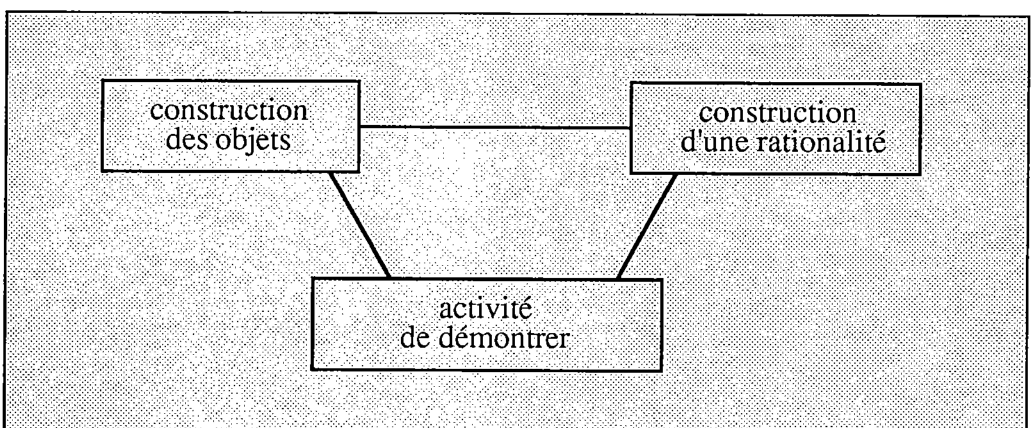
(2) Pour les termes de "réaliste" et "idéaliste", nous adoptons la terminologie de J. BOUVERESSE dans *Le pays des possibles*, p. 23.

sieurs triangles, et elle sera légitimée par l'imprécision des mesures.

Selon la conception *idéaliste*, nous inventons les objets mathématiques, les objets s'appliquent au réel. Dans la conception idéaliste, où les objets mathématiques sont de "libres inventions de l'esprit humain", la rationalité mathématique et les règles de la logique préexistent à l'activité de démontrer. Selon cette perspective, il apparaît comme nécessaire, avant tout enseignement de la démonstration, de connaître les règles de la logique — règles qui s'imposent d'elles mêmes. Les démonstrations devront être "tirées" des définitions des objets et de ces règles.

Selon la troisième conception, que je qualifierai de *constructiviste*, nous construisons les objets mathématiques, les objets structurent le réel. Selon cette conception, la réalité n'est pas un donné : elle est aussi construction humaine. Nous construisons une réalité en structurant le réel, c'est-à-dire en retenant et en reliant entre eux un certain nombre d'éléments du réel. Dans la conception constructiviste, il y a simultanéité entre la construction des objets mathématiques, la construction d'une rationalité mathématique et l'activité de démontrer[3]. Nous pouvons schématiser cette simultanéité par le diagramme représenté dans l'encadré ci-dessous.

La troisième conception peut s'imposer après une étude historique des savoirs mathématiques. Pour comprendre cette approche, nous prendrons un exemple historique qui concerne la genèse de l'angle et les théorèmes concernant angles et triangles. En effet, les Ioniens, au VIème siècle avant J.C., savaient mesurer la distance d'un bateau en mer. Comment pouvaient-ils procéder ? [4] Nous nous trouvons



(3) On pourra trouver des exemples historiques de cette simultanéité dans *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Actes du Colloque inter Irem. de Besançon, 1989. Lire en particulier l'article de R. BKOUCHE, Quelques remarques sur la démonstration.

(4) Nous utilisons les indications données dans M. CAVEING, *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, tome II

Figure 1

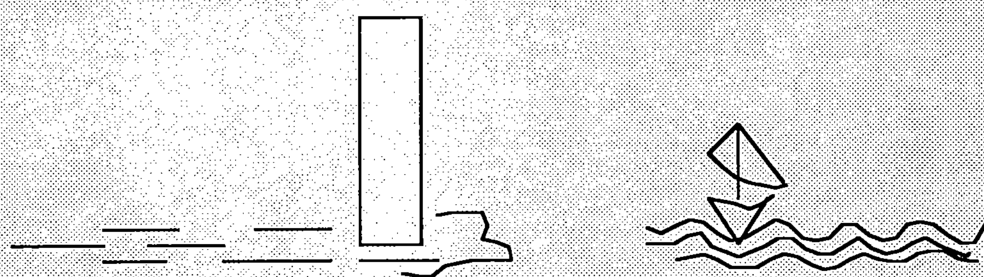
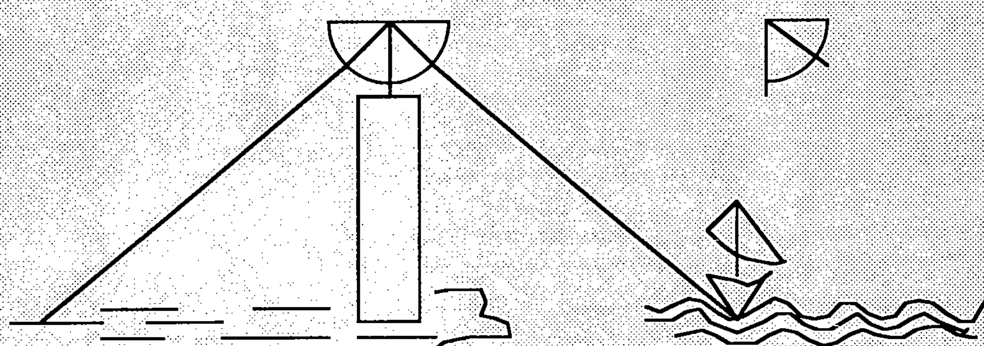


Figure 2



dans la situation d'une distance inaccessible : il est impossible de reporter sur l'eau un bâton qui servirait d'unité de mesure (voir fig.1).

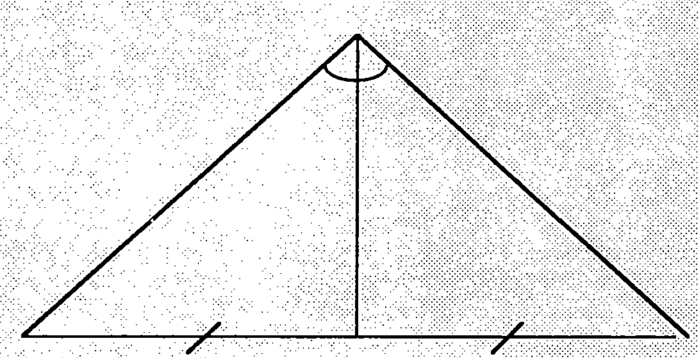
Mais, en montant au haut d'une tour en bord de mer, il est possible à l'aide d'un quadrant d'opérer une visée. Un quadrant est constitué d'un quart de cercle et d'une partie flexible permettant d'effectuer une visée en direction du bateau. Ensuite, on pourra se retourner vers la terre ferme et pointer, avec la même visée, un endroit dont on pourra déterminer la distance à la tour (fig.2).

Ainsi, nous juxtaposons à la situation problématique du départ une figure géométrique (fig.3). Le rôle de cette figure est de représenter cette situation : les segments représentent des rayons visuels — sans épaisseur — et les angles correspondent à des visées.

Lorsque nous concluons que l'égalité des visées implique l'égalité des distances, nous raisonnons sur cette figure et nous énonçons un théorème concernant la configuration angle-triangle. Ainsi, nous procédons d'une pensée à la fois rationnelle et géométrique qui structure le réel et nous donne prise sur lui. Nous avons bien ici, à la fois, construction d'objets géométriques, construction d'une rationalité et genèse d'un raisonnement. Objets, rationalité, et raisonnement prennent sens dans une même situation.

L'histoire des mathématiques nous indique, qu'à la même époque et dans un même lieu — la Grèce Antique —, naissent *à la fois* une pensée rationnelle et géomé-

Figure 3



trique, l'exigence d'une science démonstrative et une conception idéale des objets géométriques(5). Cette remarque doit avoir des implications directes dans la manière de concevoir l'enseignement de la géométrie, où là aussi tout est à construire : la conception idéale des figures, la rationalité mathématique, le raisonnement géométrique. Il n'y a aucun préalable : la pertinence de la figure géométrique, l'appel à la déduction, le besoin de démontrer doivent se manifester *dans le même temps* à partir de situations problématiques. Pour prendre en compte tous ces aspects, les situations proposées aux élèves doivent être riches et constituer des problèmes : elles ne peuvent pas se réduire à des tâches parcellaires demandées aux élèves. Nous reviendrons sur cet aspect plus loin.

Quel sens cela a-t-il de démontrer ?

Pour aborder cette question, nous comparerons trois démonstrations concernant la somme des angles d'un triangle : celle des *Eléments* d'Euclide (IIIème siècle avant J.C.), celle des *Nouveaux éléments de géométrie* d'Arnauld (1667) et celle des *Eléments de géométrie* de Clairaut (1765)(6). Elles prennent place dans des corpus où il s'agit d'enseigner des "éléments" de géométrie. Ces trois démonstrations ont la particularité de reposer sur le même argument géométrique, tout en donnant à la démonstration des significations différentes.

Les *Eléments* d'Euclide reposent sur un "système axiomatico-déductif" : chaque livre de l'ouvrage débute par des définitions et des axiomes — demandes et notions communes —, et se poursuit par des propositions. Chaque proposition est déduite des axiomes et des propositions précédentes. La proposition qui nous intéresse est la proposition XXXII du Livre I. Euclide définit l'angle rectiligne comme inclinaison entre deux droites, ce qui nous renvoie sans doute à la genèse de ce concept. Mais cette définition n'est pas opératoire : elle permet de savoir de quel objet on parle, mais elle ne sera pas utilisée dans les démonstrations. Ainsi, pour comparer deux angles, Euclide ne compare pas des inclinaisons, il enferme les angles concernés dans des triangles tels que AB égale DE et AC égale DZ puis il compare BC et EZ (fig.4). Ce procédé lui permet de démontrer dans la proposition XVI que l'angle extérieur d'un triangle est plus grand que chacun des angles intérieurs opposés(7) (fig.5).

Pour démontrer que la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits, Euclide doit montrer que la juxtaposition de ces trois angles est égale à la juxtaposition de deux angles droits. A partir de la proposition XIX, Euclide utilise le fameux axiome V des parallèles qui lui permet de comparer les angles définis par une sécante à deux parallèles. La démonstration de la proposition XXXII consiste à mener la parallèle au côté AB, puis à remarquer l'égalité des angles BAC et ACE, et des angles ABC et ECD, pour pouvoir conclure (fig.6).

(5) On pourra se rapporter à l'ouvrage de VERNANT, *Mythe et pensée chez les Grecs*, et à l'ouvrage de M. CAVEING cité plus haut.

(6) Pour une étude détaillée de ces trois démonstrations, on pourra se rapporter à E. BARBIN, Trois démonstrations pour un théorème élémentaire de géométrie. Sens de la démonstration et objet de la géométrie.

(7) sur cette démonstration et sur la construction des significations de l'angle dans les livre I des *Eléments* d'Euclide, on peut se reporter à E. BARBIN, La pensée mathématique dans l'histoire et dans la classe, in *Bul. de l'APMEP.*

Figure 4

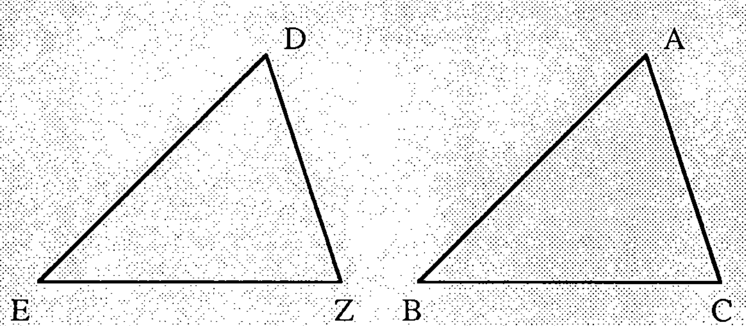


Figure 5

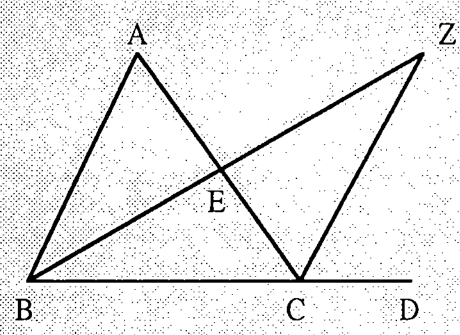
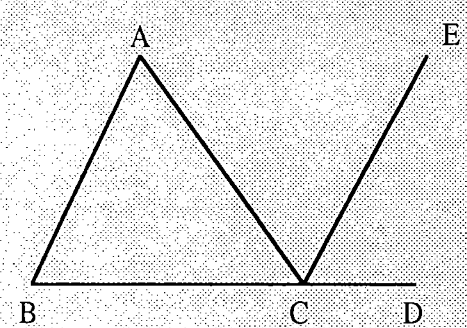


Figure 6



Cette démonstration permet de reconnaître le caractère absolu, universel et nécessaire de la proposition. Le lecteur ne peut être que convaincu que, pour tout triangle, la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits. En effet, la force d'un raisonnement déductif qui part de prémisses vraies, est de rendre irréfutable la conclusion. Le lecteur sait donc, mais il ne sait pas comment on sait. Car, ici, comme dans tous les *Eléments,* Euclide n'indique pas comment il a trouvé la démonstration : pourquoi cette merveilleuse parallèle qui permet de voir, de constater le résultat ? Le lecteur ne sait pas non plus pourquoi démontrer la proposition XVI et pourquoi attendre encore seize propositions pour avoir un résultat complet sur la somme des angles d'un triangle. En effet, l'ordre des démonstrations des *Eléments* est celui qu'impose la procédure de déduction, et non pas un ordre d'invention ou de besoin des résultats.

Cette insatisfaction à la lecture d'Euclide est exprimée au XVIIème siècle par Arnauld et Nicole qui reprochent aux géomètres Anciens "d'avoir plus de soin de la certitude que de l'évidence, et de convaincre l'esprit que de l'éclairer"(8). L'esprit ne se satisfait pas seulement de savoir, il veut aussi savoir comment on sait (9). Arnauld, arguant que les *Eléments* d'Euclide sont "confus et brouillés", écrit en 1667 des *Nouveaux éléments de géométrie* pour remédier à ce défaut.

La proposition sur la somme des angles d'un triangle apparaît dans le Livre VIII, livre consacré exclusivement aux angles rectilignes. Arnauld définit l'angle comme une portion de surface "déterminée selon la partie proportionnelle d'une circonférence dont le centre est au point où ces lignes se joignent"(10) (fig.7). Puis il explique à son lecteur qu'il y a quatre façons de mesurer l'angle : l'arc AC, la corde AC, le sinus DE et la base DF (fig.8). Pour chacune de ces grandeurs, il indique, à la suite, les problèmes que cette conception de la mesure de l'angle permet de résoudre.

Arnauld donne enfin une cinquième façon de comparer les grandeurs des angles en considérant les "angles faits par les lignes entre les parallèles", et en énonçant que toute oblique entre deux parallèles fait des angles alternes égaux (fig.9). Cette propriété lui permet de démontrer une propriété de l'angle, à savoir que "tout angle plus les deux angles que font ses côtés sur la base sont égaux à deux droits"(11). Si BC et BD sont les côtés d'un angle et CD sa base, on peut conclure le résultat en menant MN parallèle à CD (fig.10).

Ainsi, le chapitre sur les angles d'Arnauld ne se veut pas un catalogue de propositions : c'est une méthode pour comparer des angles et résoudre des problèmes. Le lecteur pourra savoir comment on sait : il sera éclairé. Dans ce chapitre, l'ordre des propositions n'est pas régi par l'ordre déductif, mais par la portée des connaissances induites par ces propositions. Autrement dit, la place de chaque proposition est déterminée selon sa pertinence dans la résolution d'un certain type de problème. Ainsi, Arnauld explique que l'arc est la seule "mesure vraie et naturelle" de l'angle, et la base "la plus imparfaite" mesure. En effet, la trisection de l'angle opère une tri-

(8) ARNAULD & NICOLE, *La logique ou l'art de penser*, p.326.

(9) Sur les critiques de la démonstration grecque au XVIIème siècle, on pourra se reporter à E. BARBIN, La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques.

(10) ARNAULD, *Nouveaux éléments de géométrie*, p.142.

(11) ARNAULD, op.cit., p.154.

Figure 7

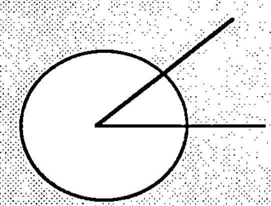


Figure 8

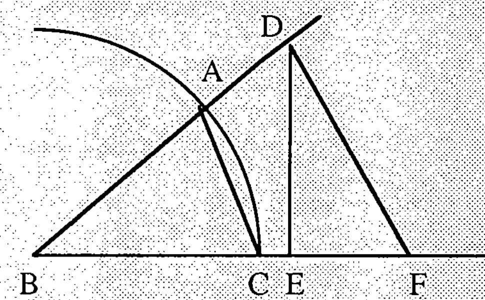


Figure 9

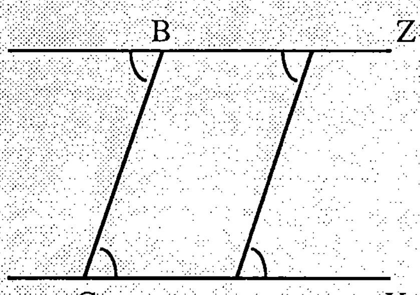
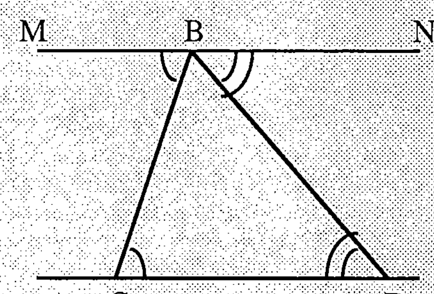


Figure 10



section de l'arc et non pas une trisection de la base.

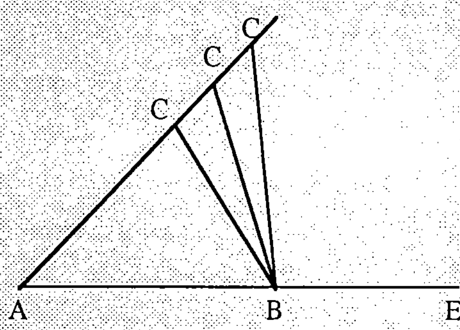
La volonté d'éclairer le lecteur anime également Clairaut lorsqu'il écrit, près d'un siècle plus tard, ses *Eléments de géométrie*. Bien plus, Clairaut précise dans la préface à son ouvrage qu'il a voulu écrire un traité qui "réunisse les deux avantages d'intéresser et d'éclairer" son lecteur. Dans ce but, il conçoit une géométrie problématisée, c'est à dire une géométrie dans laquelle les concepts et les savoirs ont un sens parce qu'ils sont des instruments pour résoudre des problèmes. Ainsi le lecteur saura, et saura pourquoi on sait. Les problèmes proposés par Clairaut s'organisent autour d'une même problématique, celle de la mesure des terrains(12).

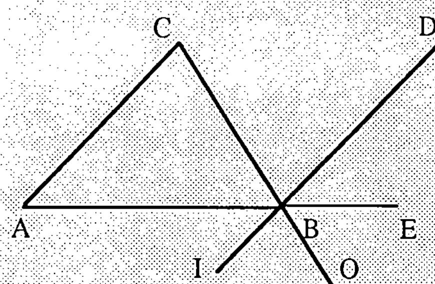
Puisqu'il s'agit, non de convaincre le lecteur, mais de l'éclairer et de l'intéresser, la forme euclidienne de la démonstration ne peut convenir. Clairaut écrit, dans la préface, qu'il "évite avec soin de donner aucune proposition sous la forme de théorèmes, où l'on démontre que telle vérité ou telle vérité est, sans faire voir comment on est parvenu à la découvrir". Il poursuit en expliquant que "Si les premiers auteurs de mathématiques ont présenté leurs découvertes en théorèmes, ç'a été, sans doute, pour donner un air plus merveilleux à leurs productions, ou pour éviter la peine de reprendre la suite des idées qui les avaient conduits dans leurs recherches". Au contraire, Clairaut veut occuper ses lecteurs à résoudre des problèmes, car ainsi ils "aperçoivent, à chaque pas qu'on leur fait faire, la raison qui détermine l'inventeur ; et par là ils peuvent acquérir plus facilement l'esprit d'invention". L'ordre qui régit son ouvrage est l'ordre des inventions.

Clairaut n'introduit les concepts et les propositions qu'au fur et à mesure, aux moments où ils deviennent nécessaires pour résoudre des problèmes. Ainsi, le concept d'angle est introduit dans une situation où on ne peut mesurer que deux côtés d'un triangle : il s'agit donc d'un problème de distance inaccessible. Clairaut explique qu'il faut construire un triangle semblable, en utilisant la manière dont un des deux côtés mesurés "penche" sur l'autre. L'angle est alors défini comme inclinaison d'une ligne sur une autre. Dans la suite, Clairaut explique comment mesurer un angle à l'aide d'un rapporteur.

La proposition concernant la somme des angles d'un triangle intervient également comme un moyen de résoudre un problème : il s'agit de trouver un moyen simple et efficace de s'assurer que les mesures des trois angles d'un triangle sont exactes. Si l'on considère un triangle ABC, Clairaut explique d'abord que l'on "sent que la grandeur" de l'angle C doit résulter de celles des angles A et B, car lorsque l'on change celles-ci, les droites AC et BC changent et l'angle C aussi. Pour trouver comment l'on peut conclure la grandeur de l'angle C à partir de celles des angles A et B, Clairaut suppose que BC tourne autour du point B vers la droite BE (fig.11). Il écrit alors : "Il est clair que pendant que BC tournerait, l'angle B s'ouvrirait continuellement ; et qu'au contraire, l'angle C se resserre de plus en

(12) Sur l'ouvrage de CLAIRAUT, voir E. BARBIN, Les Eléments de géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée.





plus ; ce qui d'abord pourrait faire présumer que, dans ce cas, la diminution de l'angle C égalerait l'augmentation de l'angle B, et qu'ainsi la somme des trois angles A, B, C, serait toujours la même, quelle que soit l'inclinaison des lignes AC, BC, sur la ligne AE".

Lorsque la droite BC arrive à la position limite où elle est parallèle à AC, ce résultat pourra être démontré : Clairaut écrit que "cette induction présumée porte avec elle sa démonstration" et il mène la droite ID parallèle à AC (voir fig.12). Ce faisant, Clairaut nous apprend comment le géomètre a l'idée de construire cette parallèle au côté AC, idée-clé qui permet de démontrer la proposition.

Ainsi, pour Clairaut, démontrer, c'est aussi savoir pourquoi et comment l'on sait — c'est-à-dire que le savoir implique le processus par lequel on sait. Pourquoi une connaissance devient-elle l'objet de recherche du géomètre ? Comment le géomètre parvient-il à la vérité ? Comment le géomètre invente-t-il son savoir ? Ainsi, pourquoi et comment le géomètre sait-il que la somme des angles d'un triangle égale deux angles droits ? Pour Clairaut, le savoir du géomètre est un moyen de résoudre des problèmes : son lecteur apprend donc quel problème amène à s'interroger sur la somme des angles d'un triangle (le pourquoi), et quelles investigations conduisent à construire la parallèle à l'un des côtés du triangle (le comment). Le lecteur peut faire sien le savoir : il est éclairé et intéressé.

En utilisant les termes historiques, nous dirons que l'activité de démontrer peut avoir trois significations, qui correspondent à des exigences différentes, celles de : *convaincre* pour savoir, *éclairer* pour savoir comment on sait et *intéresser* pour savoir pourquoi on sait([13]). Ces exigences correspondent à des conceptions différentes du savoir, et nous pouvons donc élargir la question du sens de l'activité de démontrer à celle du sens du savoir.

A quelles conceptions du savoir renvoie le besoin de démontrer ?

Nous avons dit qu'Arnauld et Clairaut adressent un certain nombre de critiques aux *Eléments* d'Euclide. Ces critiques correspondent à une nouvelle conception du savoir qui trouve ses origines dans les pratiques mathématiques des géomètres du XVIIème siècle. Ces géomètres voient dans les écrits d'Euclide ou d'Archimède un savoir figé, un savoir qui commande l'assentiment, mais un savoir qui ne permet pas d'inventer. Ils vont surtout avoir à cœur de produire des méthodes qui leur permettent de résoudre des problèmes — méthode cartésienne, méthode des indivisibles, méthode des tangentes, méthodes projectives — et donc de répondre à leur soif d'inventer. Ainsi, *La géométrie* de Descartes de 1637 n'est pas un catalogue de propositions géométriques, mais une méthode pour résoudre les problèmes géométriques en les ramenant à des résolutions d'équations algébriques.

Nous pouvons voir ici une opposition entre : un savoir conçu comme un *produit*, qui s'inscrit dans un discours constitué et qui prend cohérence dans ce discours, et un savoir conçu comme un *processus*, qui est construit à partir de problèmes et qui prend sens dans des pratiques ([14]).

Selon la seconde conception, une démonstration n'est pas seulement un texte, mais l'ensemble du processus qui transforme une question en un objet de recherche, qui amène à définir ou à modifier des concepts et qui conduit à la résolution d'un problème : "une démonstration mathématique est l'analyse de la proposition mathématique"([15]). Cette dernière remarque a des implications didactiques sur lesquelles nous allons revenir en nous interrogeant sur les conceptions épistémologiques qui sous-tendent un enseignement de la démonstration.

Les conceptions épistémologiques sous-jacentes à l'enseignement de la démonstration

"Si je savais à quoi sert le théorème de Pythagore, comment on l'a inventé, je pourrais l'apprendre, mais comme ça, je me méfie"

Virginie, élève de 3ème.([16])

(13) Dans une approche didactique, Gilah HANNA distingue entre les démonstrations celles qui démontrent et celles qui expliquent : celles qui expliquent ne montrent pas seulement que la proposition est vraie, mais aussi pourquoi elle est vraie, elles doivent être préférées dans l'enseignement (voir G. HANNA, Proofs that Prove and Proofs that Explain).

(14) Sur la pertinence de cette distinction dans la formation, lire B. CHARLOT, Enseigner, Former : Logique des discours constitués et logique des pratiques .

(15) WITTGENSTEIN, *Philosophische Bemerkungen*, cité par BOUVERESSE, *Le pays des possibles*, p.61.

(16) in NAUDIN, *A quoi ça sert d'apprendre ? Rapport au savoir, rapport à l'avenir*, D.E.A. Sciences de l'éducation, dir. B. CHARLOT, Paris VIII, 1990. Concernant le rapport au savoir mathématique des élèves, voir B. CHARLOT et ali, Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques in *Repères IREM* n°10.

Tout enseignement des mathématiques repose sur des conceptions épistémologiques, c'est-à-dire sur des conceptions du savoir mathématique, le plus souvent implicites. Quelles sont celles qui concernent l'enseignement de la démonstration ? Pour étudier cette question, nous nous reporterons à quelques exemples d'enseignement, depuis l'enseignement traditionnel jusqu'à l'enseignement par situations-problèmes.

Un enseignement "traditionnel" : il est inutile de donner ici beaucoup d'explications sur ce que j'entends par ce qualificatif, puisque c'est l'enseignement que beaucoup d'enseignants d'aujourd'hui ont connu quand ils étaient élèves. Dans l'enseignement traditionnel, il n'y a pas à proprement parler d'apprentissage de la démonstration. Pour montrer aux élèves ce qu'est une démonstration, le professeur écrit des démonstrations au tableau. Il montre comment présenter à gauche les hypothèses, et à droite les conclusions. La démonstration consiste à aller des unes aux autres, par un raisonnement déductif, en citant les théorèmes utilisés ou en les spécifiant par un codage — "d'après la proposition V sur les parallèles..." —, et en montrant bien à quels objets sont appliqués les théorèmes — "les segments AB et CD sont parallèles, par hypothèse, et la droite EF les coupe, donc...". Ensuite, les élèves sont invités à démontrer. Ici, les choses se compliquent : comment trouver la démonstration ? Le professeur donne un corrigé : mais comment a-t-il trouvé ?

Le processus est caché. Caché au point que beaucoup d'élèves ne comprennent pas quel sens peut bien avoir ce texte, qu'ils n'imaginent pas un seul instant que pour démontrer, il faut penser, essayer, raturer et se tromper. "Penser, c'est aller d'erreur en erreur. [...] Ce qui fait que la mathématique est une épreuve redoutable, c'est qu'elle ne console point de l'erreur" écrit Alain, comme si lui aussi n'avait point soupçonné que faire des mathématiques, c'est penser(17). Alors beaucoup d'élèves se retirent de ce jeu, dont ils ne comprennent pas le sens même si on leur a donné les règles. Ils écriront à gauche les hypothèses et à droite les conclusions, ce qui leur assurera deux points au devoir. Certains plus opiniâtres écriront un texte qui ressemble à une démonstration ... et qui effarera le professeur.

Dans l'enseignement traditionnel, la démonstration est bien conçue comme un produit. La rationalité que suppose la production d'une démonstration est déjà supposée présente dans la tête des élèves, car on ne voit pas comment elle pourrait s'acquérir par mimétisme en regardant le professeur écrire des démonstrations : conception idéaliste. Cette démonstration peut-elle convaincre de la vérité des conclusions ? Elle convainc sans doute les élèves qui ont compris qu'il s'agissait d'établir des vérités. La plupart ne seront ni éclairés, ni intéressés, car leur échec leur aura fait croire que, de toute façon, "les mathématiques, ce n'est pas pour eux".

Ce tableau pourra paraître très noirci : après tout, il y a bien des élèves qui réussissent à écrire des démonstrations avec l'enseignement traditionnel. Mais beaucoup d'enseignants constatent l'inefficacité de cet enseignement et se demandent avec les collègues de l'APMEP : "Comment apprend-on les démonstrations ? Généralement on fait des démonstrations devant les élèves,

(17) ALAIN, *Propos sur l'éducation*, p.76.

on leur demande ensuite de faire pareil. Chacun sait les difficultés rencontrées". [18]

Depuis quelques années, des recherches ont été menées, en particulier dans les IREM, pour suppléer aux déficiences de l'enseignement traditionnel et s'interroger sur ce que devrait être un apprentissage de la démonstration. Le progrès est net dans son propos : il s'agit enfin d'apprendre aux élèves à démontrer.

Les travaux de Dominique Gaud et Jean-Paul Guichard s'inscrivent dans cette perspective : ils écrivent que "démontrer cela s'apprend" et que "l'élève apprend en faisant et non en regardant faire". Ces collègues considèrent qu'il faut séparer, dans l'apprentissage, les deux moments de recherche et de rédaction d'une démonstration pour répondre à ce qu'ils estiment la double difficulté de la démonstration : logique et rédactionnelle[19]. Ils accordent une grande importance aux méthodes de démonstration en privilégiant certaines formes de raisonnement déductif. L'explicitation des méthodes en classe les conduit à faire de la démonstration un objet d'enseignement. Comme le font remarquer A.L. Mesquita et J.-C. Rauscher, la méthodologie vise surtout "les élèves qui avaient déjà compris de quoi il retournait dans une démonstration"[20]. Je dirais qu'elle constitue une aide pour les élèves qui ont déjà compris le sens d'une démonstration et ont un mode de connaissance des objets géométriques propre à une démarche déductive. Si l'approche s'intéresse bien au processus de la démonstration, elle ne repose pas sur une conception constructiviste et elle ne répond pas à la question du sens de la démonstration.

S'opposant aux collègues poitevins, Nicolas Balacheff, chercheur à l'IMAG de Grenoble, écrit : "Il est fréquent, par exemple en situation scolaire, de considérer la rédaction de la solution d'un problème hors de la résolution, ceci ne nous paraît pas pertinent. En effet, [...] rédiger la solution d'un problème conduit à son analyse et donc à une éventuelle remise en cause ; la formulation est associée à l'administration de la preuve"[21]. Cette conception, qui prend en compte le sens que les élèves peuvent avoir de la démonstration, est fondamentale dans la méthode des narrations de recherche proposée par l'IREM de Montpellier[22].

La question du sens de la démonstration est centrale dans les recherches de Nicolas Balacheff[23]. Ce chercheur a élaboré une séquence didactique afin que des élèves de 5ème "qui n'ont pas encore étudié la notion de démonstration, aient à émettre une conjecture et à considérer le problème d'en fournir la preuve"[24]. Cette séquence concerne le théorème sur la somme des angles d'un triangle.

(18) Compte-rendu du groupe Géométrie premier cycle, Journées Nationales de l'APMEP, Grenoble, 1979, cité par N. BALACHEFF in Preuve et démonstration en mathématiques au collège.

(19) D. GAUD et J.P. GUICHARD, Apprentissage de la démonstration, in *Petit x*, n°4, 1984.

(20) A.L MESQUITA et J.-C. RAUSCHER, Sur une approche d'apprentissage de la démonstration, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1988.

(21) N. BALACHEFF, op.cit.

(22) voir l'article de F. BONAFE dans ce numéro de *Repères.*

(23) lire, par exemple, N. BALACHEFF, Processus de preuve et situations de validation, in *Educational Studies in Mathematics*, 1987.

(24) N. BALACHEFF, *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*, vol. 2, p.361.

La séquence didactique comporte trois activités que nous résumons ici. Dans la première activité, chaque élève trace un triangle, mesure les angles et en fait la somme, puis le professeur recense les résultats sur un histogramme et demande des commentaires à la classe. Dans la seconde activité, le professeur remet aux élèves le même triangle, chaque élève formule un pari, mesure les angles, en fait la somme, commente la différence avec le pari, puis l'enseignant fait un histogramme et demande des commentaires. Dans la troisième activité, l'enseignant remet aux élèves une copie avec les mêmes trois triangles -deux gros, un petit, un plat, un pointu-, chaque élève fait un pari, mesure les angles, fait la somme, puis le professeur recueille les résultats et demande des commentaires aux élèves. Le professeur doit rester en retrait, afin que le problème soit "dévolu" à la classe et que s'instaure un débat socio-cognitif.

Cette séquence est élaborée avec l'hypothèse que : "La disqualification de la mesure comme moyen de connaître cette somme légitimera l'exigence de preuves intellectuelles de la conjecture attendue". Elle s'ancre donc dans une conception réaliste, où la démonstration vient suppléer à une incertitude des mesures. Elle ne relève pas, à notre sens, d'une conception cons-tructiviste dans la mesure où la situation proposée aux élèves ne prend pas place dans une problématique suffisamment riche pour conduire à la construction de la notion d'angle. Or l'angle, qui est le même quelle que soit la longueur de ses côtés, est une notion difficile que les élèves de 5ème maîtrisent difficilement. Il devrait donc y avoir des "perturbations épistémologiques" dans le déroulement de la séquence. C'est effectivement le cas dans la première classe où la situation est expérimentée. En effet, des élèves ont dessiné des triangles trop petits et le professeur se sent obligé d'intervenir : "si vous ne voyez pas très clairement, prolongez les côtés", "c'est toujours le même angle, ce n'est pas la longueur ici que tu mesures, Karelle, c'est l'ouverture de l'angle". Pour éviter ces perturbations, le second professeur qui expérimente la séquence indique d'emblée aux élèves de tracer un triangle "assez grand, parce que vous allez mesurer les angles du triangle et il ne faut quand même pas qu'il soit trop petit". A ce moment, la question épistémologique de l'angle est court-circuitée.

Dans aucune des deux classes, la classe ne s'engage dans "une procédure de validation". Dans la première classe, les élèves s'accordent à dire que la somme des angles d'un triangle fait à peu près 180°. Ce qui est tout à fait exact : on aura beau prendre de nombreux triangles dessinés avec soin et utiliser un bon rapporteur, on ne peut guère en dire plus. La démonstration de la somme des angles d'un triangle engage un autre type de savoir, elle n'est pas affaire de sommation de mesures numériques mais affaire de comparaison géométrique de grandeurs : la juxtaposition des trois angles égale la juxtaposition de deux angles droits(25). Dans la seconde classe, les élèves sont habitués aux règles du débat sociocognitif et se mettent rapidement d'accord pour dire que la somme des angles d'un triangle vaut 180°. Ainsi, l'idée de démonstration destinée à convaincre chacun de la certitude du résultat échoue, puisque chacun est convaincu d'avance ... quitte à tricher un peu sur les mesures.

(25) sur la grandeur angle et sur la mesure des grandeurs, lire N. ROUCHE, *Le sens de la mesure.*

Est-ce que cette séquence didactique s'intéresse au processus de production de la preuve ? Pour répondre oui, il faudrait savoir en quoi mesurer la somme des angles de plusieurs triangles peut permettre d'induire un raisonnement. Le passage à la démonstration, comme le note ailleurs Nicolas Balacheff, "relève d'une construction à la fois des connaissances et de la rationalité"([26]). Est-ce que le débat socio-cognitif peut permettre cette construction ? Dans un article récent, Nicolas Balacheff indique certaines limites de ce débat, en particulier avec de jeunes élèves, mais il estime que la solution est "dans l'étude et la meilleure compréhension du phénomène relatif au contrat didactique, la condition de sa négociation, qui est souvent implicite, et la nature de son résultat : la dévolution de la responsabilité de l'apprentissage aux élèves"([27]). Serait-ce donc en améliorant le "socio" du "socio-cognitif" qu'on pourra obtenir un meilleur enseignement de la démonstration ? La séquence relatée plus haut nous invite plutôt à nous interroger sur le "cognitif" : pour qu'il y ait débat cognitif, il faut qu'il y ait confrontation de connaissances. Or, ici, les élèves sont surtout amenés à défendre la qualité de leurs mesures, mais très peu leurs conceptions de ce qu'est un angle, ou de ce qui se passe quand on ferme un angle.

Pourquoi démontrer ? L'intérêt de posséder une démonstration sur la somme des angles d'un triangle semble surtout, dans la séquence proposée, de pouvoir mettre toute la classe d'accord sur un résultat. Mais ce n'est pas pour cette dernière raison que les hommes ont construit des concepts et des savoirs mathématiques.

Nous abordons un autre exemple d'enseignement avec l'enseignement par situations-problèmes. Nous devons rapidement définir ce que nous mettons derrière ce terme. Il s'agit d'un enseignement qui part de champs de problèmes pour construire des champs de savoirs. Une situation-problème doit être à la fois une situation de construction ou de réinvestissement de savoirs, et un problème qui déclenche une activité intellectuelle de l'élève.

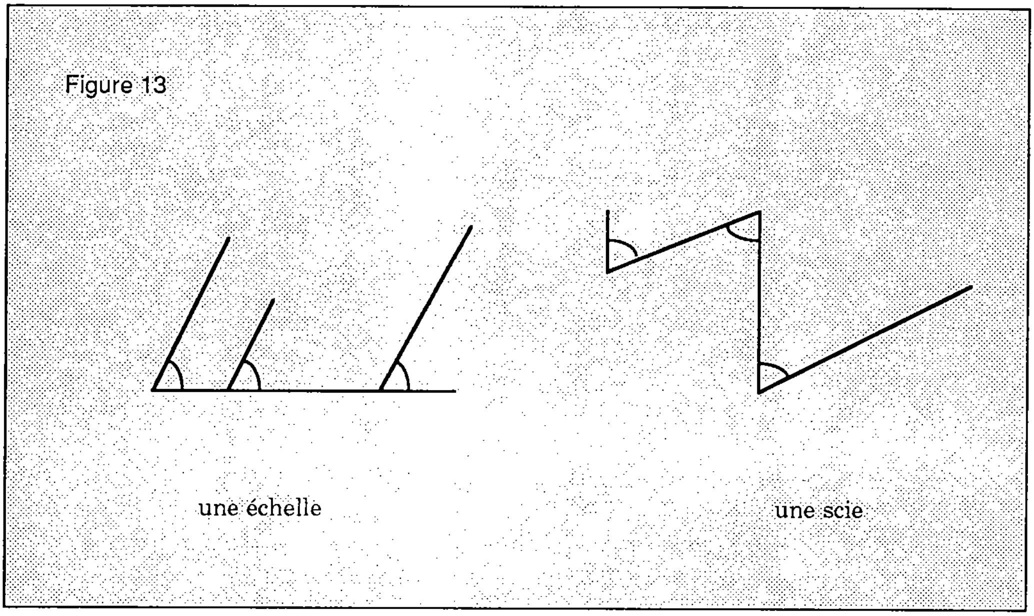
Dans une recherche didactique assez ancienne, Dina Van Hiele propose un "enseignement de la géométrie s'appuyant sur les pavages" qui a pour objectifs la construction des concepts de la géométrie élémentaire, en même temps que la construction d'une rationalité géométrique([28]). Nous résumons rapidement la démarche de cet enseignement qui occupe dix-sept séances destinées à des élèves de 12 ans, en Hollande. Après avoir intégré les notions de figures congruentes — même forme et même mesure — et de pavage, les élèves sont invités à dessiner des pavages réalisés avec des figures congruentes à un carré, un losange, un polygône régulier ou irrégulier, un triangle, un parallélogramme, etc. Au fur et à mesure, les élèves vont construire et définir des concepts qui permettent de résoudre les problèmes posés : parallélisme de droites, cercle, angles, etc.

Après plusieurs séances, alors que les élèves ont déjà travaillé sur toutes sortes de pavages, la question se pose de savoir

(26) dans N. BALACHEFF, Processus de preuve et situations de validation, in *Educational Studies in Mathematics*, 1987.

(27) dans N. BALACHEFF, The benefits and limits of social interaction : the case of mathematical proof, in BISHOP, *Mathematical Knowledge : its Growth Through Teaching.*

(28) D. VAN HIELE-GELDOF, *De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.*, Thèse de doctorat, Utrecht, 1957.



s'il est possible "de prévoir" les pavages réalisables, c'est-à-dire de savoir avec quel polygone il est possible de paver. Ces questions conduisent les élèves à des premiers raisonnements sur les angles, puis à introduire dans leurs raisonnements "des structures géométriques visuelles" qu'ils appellent les scies et les échelles (fig.13).

Ces configurations sont des "structures structurées", elles interviennent dans les pavages en englobant les propriétés de parallélisme et d'égalité d'angles, qui vont devenir des "structures structurantes"[29], c'est-à-dire qui permettent d'engendrer et d'organiser les connaissances (voir fig.14 page suivante). L'organisation des connaissances consiste à construire "un arbre généalogique", selon l'expression utilisée par Dina Van Hiele. L'échelle et la scie sont les "ancêtres" à partir desquels sont déduites les propositions.

La valeur de la somme des angles d'un triangle est une question qui intervient à propos du problème des noeuds d'un pavage triangulaire (fig.14). La pertinence de ce savoir est d'assurer la "bonne jointure" du pavage. La question de sa démonstration se pose quand il s'agit de lui trouver des "ancêtres" dans le "grand arbre de la géométrie". A cette question, deux élèves proposent aussitôt comme démonstration, le premier deux scies (fig.15), le second une échelle et une scie (fig.16).

Cet enseignement s'appuyant sur les pavages relève d'une conception constructiviste, dans la mesure où il s'agit de construire en même temps des concepts

(29) Je reprends, ici, les expressions utilisées par P. BOURDIEU dans un autre champ problématique, cf. *Le sens pratique*, p.88.

Figure 14

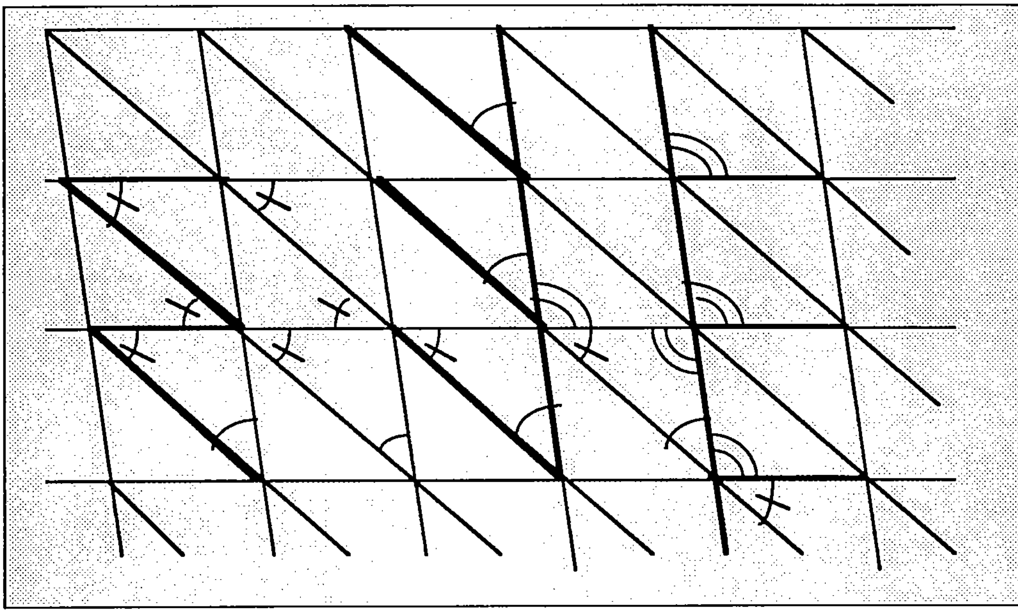
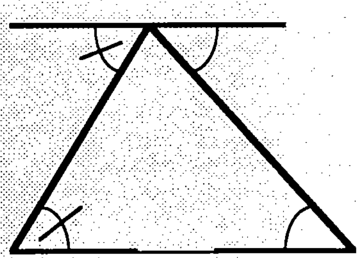
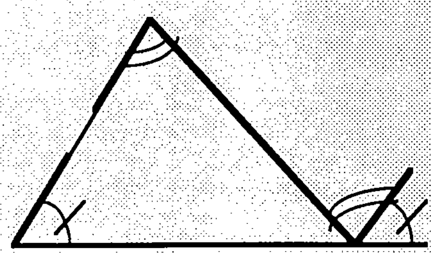


Figure 15



deux scies

Figure 16



une échelle et une scie

et des démonstrations, à partir d'un champ de problèmes s'organisant autour d'une même problématique. Le sens de l'activité de démontrer n'est pas de convaincre, mais de comprendre pourquoi et comment. La démonstration présente un intérêt, en elle même, dans une entreprise de rationalisation et de compréhension d'une problématique. L'enseignante explique à ses élèves que la géométrie consiste à faire un immense arbre généalogique (il faut trois ans pour cela !). Ainsi, elle explicite et met au premier plan le processus du savoir géométrique.

Une conception constructiviste du savoir implique que démontrer, "cela s'apprend par étapes, des étapes marquées chacune non seulement par un changement de l'univers du sens, mais encore une modification du rapport au sens, des modes d'accès à l'ensemble des référents"(30). La lecture de l'expérience de Dina Van Hiele est intéressante car elle met en évidence les étapes d'un enseignement de la démonstration. Or, c'est sur ces étapes que doit porter notre réflexion d'enseignant.

La perspective constructiviste nécessite une réflexion épistémologique approfondie. Comme le remarque très justement Jean-Claude Duperret, elle suppose aussi de la part de l'enseignant un cheminement, depuis l'enseignement traditionnel, qui répond également à des stratégies de survie vis-à-vis de ce difficile métier, jusqu'à l'enseignement constructiviste, qui demande de maîtriser de nouvelles situations.

(30) N. ROUCHE, Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications in *La démonstration mathématique dans l'histoire.*

Références bibliographiques

ALAIN, *Propos sur l'éducation*, P.U.F., Paris, 1969.

ARNAULD, *Nouveaux éléments de géométrie*, réédition I.R.E.M. de Dijon, 1982.

ARNAULD & NICOLE, *La logique ou l'art de penser*, P.U.F., Paris, 1965.

BALACHEFF N., Preuve et démonstration en mathématiques au collège, in *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol.3, n°3, 1982.

BALACHEFF N., Processus de preuve et situations de validation, in *Educational Studies in Mathematics*, n°18, 1987.

BALACHEFF N., *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de Collège*, Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1988.

BALACHEFF N., The benefits and limits of social interaction : the case of mathematical proof, in BISHOP, *Mathematical Knowledge : its Growth Through Teaching*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1991.

BARBIN E., *La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques*, Bulletin A.P.M.E.P. n°366, 1988.

BARBIN E., Trois démonstrations d'un théorème élémentaire de géométrie. Sens de la démonstration et objet de la géométrie in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, I.R.E.M. de Lyon, 1989.

BARBIN E., Les *Eléments de géométrie* de Clairaut : une géométrie problématisée, *Repères I.R.E.M.*, n°4, 1991.

BKOUCHE R., Quelques remarques sur la démonstration in Comission inter-IEM Epistémologie, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, I.R.E.M. de Lyon, 1989.

BOURDIEU P., *Le sens pratique*, Les éditions de Minuit, Paris, 1980.

BOUVERESSE J., *Le pays des possibles*, Les éditions de Minuit, Paris, 1988.

CAVEING M., *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, Université de Lille III, 1982.

CHARLOT B., Enseigner-Former : Logique des discours constitués et logique des pratiques, *I.N.R.P. Recherche-Formation*, n°8, 1990.

CHARLOT B. et BAUTIER E., Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques in *Repères IREM* , n°10.

CLAIRAUT, *Eléments de géométrie*, réédition Siloë, Laval, 1986.

EUCLIDE, *Les éléments*, traduction Peyrard, Blanchard, Paris, 1986.

GAUD D. et GUICHARD J.-P., Apprentissage de la démonstration, in *Petit x*, n°4, 1984.

HANNA G., Proofs that Prove and Proofs that Explain, in *Actes de la 13ème Conférence PME*, Paris, 1989.

MESQUITA A.-L. et RAUSCHER J.-C., Sur une approche d'apprentissage de la démonstration, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°1, 1988.

NAUDIN M., *A quoi ça sert d'apprendre ? Rapport au savoir, rapport à l'avenir,* D.E.A. Sciences de l'éducation, dir. B. CHARLOT, Paris VIII, 1990.

ROUCHE N., Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, I.R.E.M. de Lyon, 1989.

ROUCHE N., *Le sens de la mesure*, Didier Hatier, Bruxelles, 1992.

VAN HIELE D., *De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van V.H.M.O.,* Thèse, Université d'Utrecht, 1957, traduction G.E.M., Louvain la Neuve.

VERNANT J.-P., *Mythe et pensée chez les Grecs*, Maspero, Paris, 1971.

WITTGENSTEIN L., *Remarques sur les fondements des mathématiques*, Galli mard, Paris, 1983.