REPERES - IREM. n°12 - juillet 1993

LES TRIBULATIONS D'UN PENTAGONE

(ou comment mener une recherche avec Cabri-Géomètre)

Pièce en cinq actes avec prologue et épilogues

Michel CARRAL, Roger CUPPENS
Irem et Iufm de Toulouse

"Figura demonis sive intelligentis."
Eléphant (1)

Ce travail a été présenté comme atelier à l'Université d'été "Informatique dans la formation en mathématique des maîtres" qui s'est tenue à Orléans en septembre 1992. A cette occasion, le titre a été suggéré par Michèle Dupérier.

Les acteurs : J.C. et M. : deux enseignants dans un IUFM, familiers de géométrie.

R. : un enseignant dans le même IUFM n'ayant pas fait de géométrie depuis de nombreuses années, mais ayant quelques connaissances en informatique.

C.G. : un acteur un peu particulier, puisqu'il s'agit d'un ordinateur Macintosh équipé du logiciel Cabri-Géomètre.

Prologue

(Un beau jour de printemps dans un couloir de l'IUFM.)

J.C. : Tu prends un pentagone convexe, une diagonale, tu vois ce que ça peut être, le côté opposé à une diagonale aussi...

M. : Oui. Une diagonale est un segment joignant deux sommets non consécutifs et le côté opposé est celui qui n'a pas d'extrémité commune avec la diagonale.

J.C. : Tu supposes que quatre couples diagonale-côté opposé sont parallèles. Que peux-tu dire du cinquième couple ?

M. : Tu veux me faire dire que tous les couples diagonale-côté opposé sont parallèles ? *(à part) :* Il me faut gagner du temps et trouver une solution élégante pour me défiler.

(à J.C.) : On peut aussi poser la question de la constructibilité de ces pentagones à la règle et au compas et de leur caractérisation. Qu'en dis-tu ?

Et la rumeur se propagea ...

(1) "La figure du démon ou de celui qui a compris". Commentaire de Eléphant, mathématicien toulousain, qui a donné vers 1360 une construction du pentagone régulier (d'après l'exposé de Guy Beaujouan au Colloque Mathématique en Occitanie, Toulouse, 10 au 13 décembre 1992).

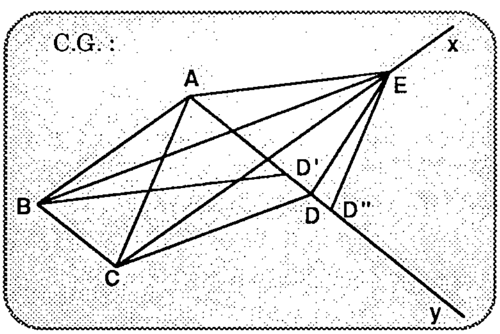
Acte 1

(Quelques temps plus tard, dans le bureau de R.)

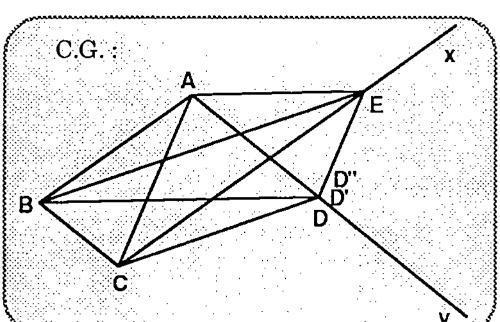
R. (à M.) : C.G. peut te montrer que ton résultat sur le pentagone est vrai.

(à C.G.) : Considère trois points non alignés A, B et C et trace les demi-droites Cx et Ay respectivement parallèles à AB et BC. Prends un point E sur Cx et trace la parallèle à BE passant par C ; elle coupe Ay en un point D. Puis, trace la parallèle à AE passant par B; elle coupe Ay en D'.

Pour vérification, trace enfin la parallèle à AC passant par E; elle coupe Ay en un point D".



R. (toujours à C.G.) : Maintenant, fais glisser le point E sur la droite Cx afin de faire coïncider les points D et D'.



R. (à M.) : Tu vois que, dans cette position, ces deux points coïncident avec D". Tu as donc ton pentagone et les cinq couples diagonale-côté opposé sont parallèles ! De plus, si tu fais varier E sur Cx,

(C.G. le fait à la demande)

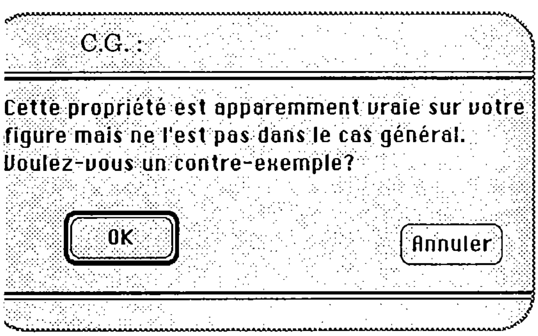
tu vois aussi que, sauf cas exceptionnel, il n'y a qu'une seule solution une fois les points A, B et C choisis. Es-tu convaincu ?

M. : Oui, mais ce n'est pas une démonstration !

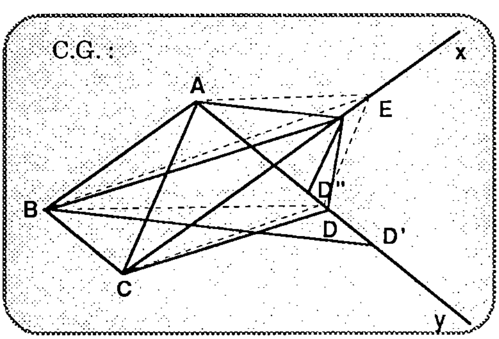
R. : Je ne t'ai pas dit que j'allais te fournir une démonstration, mais te montrer la véracité du résultat. Même si, en mathématique, une démonstration permet de montrer la véracité d'un résultat (à condition que les résultats utilisés lors de la démonstration soient eux-même vrais), les notions de vérité et de démonstrabilité sont distinctes. J'ajoute que mon raisonnement n'est guère différent de démonstrations parfaitement valides. Par exemple, pour démontrer qu'il existe une droite parallèle à un côté d'un triangle et partageant ce triangle en deux parties de même aire, on fait glisser la droite de manière qu'elle reste parallèle à elle même. Puisqu'on part d'une aire nulle pour arriver à l'aire totale du triangle, le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe une position médiane partageant le triangle en deux parties de même aire.

M. : A condition d'étudier un peu plus précisément les déplacements des points D et D' quand E parcourt Cx, tout ce que tu pourrais démontrer avec un tel raisonnement, c'est que pour trois points donnés A, B et C non alignés, il existe un pentagone convexe ABCDE et un seul qui a quatre couples diagonale-côté opposé parallèles, mais il faudrait démontrer que D" coïncide aussi avec D et D' (et non le vérifier expérimentalement) pour pouvoir affirmer que le dernier couple (AC,ED) est aussi parallèle. Mais qu'en dit C.G. pour ton pentagone ?

R. (à C.G.) : La droite AC est-elle parallèle à ED ?



R. (à C.G.) : OK.



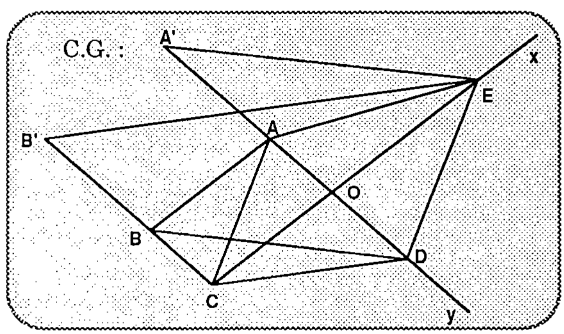
R. (à M.) : On n'est guère avancé. Si on avait une construction à la règle et au compas, C.G. pourrait être plus affirmatif. Mais c'est impossible en utilisant directement l'énoncé.

Acte 2

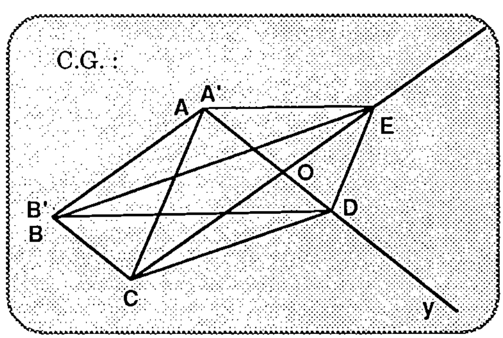
(Quelques jours plus tard, dans le même lieu.)

M. (à R.). : Dans le même registre, je te propose une démonstration valide.

(à C.G.) : Les trois points A, B et C sont donnés non alignés et les demi-droites Cx et Ay sont respectivement parallèles à AB et BC. Prends le point D sur Ay et le point E sur Cx de sorte que le segment DE soit parallèle à AC. Complète le pentagone ABCDE et ses diagonales et, pour vérification, trace le segment EA' parallèle à BD avec A' sur la droite AD et le segment EB' parallèle à CD avec B' sur la droite BC.

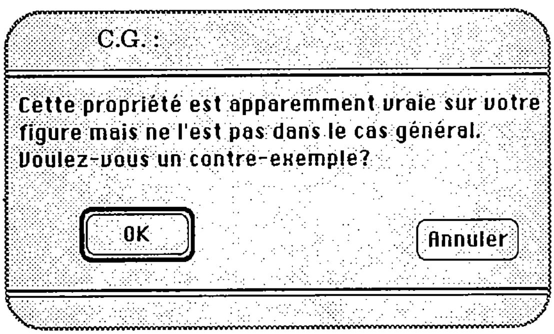


M. (à C.G.) : Maintenant, fais glisser DE en le laissant parallèle à AC jusqu'à ce que BE soit parallèle à CD, c'est à dire B' coïncidant avec B.



M. (à R) : Puisque A' coïncide avec A, tu vois que BD est parallèle à AE.

R (à CG) : Est-ce vrai ?



R. (à CG) : Annuler.
(à M.) : On est ramené au même point.

M. : Mais, si, au préalable, on a fait une affinité de sorte que les segments AB et BC soient égaux, les pentagones obtenus en faisant varier DE parallèlement à AC possèdent un axe de symétrie, à savoir la médiatrice de AC. Ainsi, si BE est parallèle à CD, par symétrie, BD est parallèle à AE. Puisqu'une affinité conserve le parallélisme, le résultat est démontré. D'accord ?

R. : Oui, il suffit d'ailleurs d'ajouter les remarques suivantes :

— pour que le pentagone ABCDE soit convexe, E doit se trouver sur la demi-droite Ox, O étant le point d'intersection de Cx et Ay,

— si E parcourt la demi-droite Ox, B' parcourt toute la demi-droite CB,

— la distance CB' est une fonction croissante de la distance OE,

pour avoir tous les éléments pour écrire une démonstration sous forme traditionnelle. Mais je ne pense pas qu'une telle démonstration ait plus de pouvoir de conviction que ce que donne C.G.

Avec ces mêmes raisonnements (étude du mouvement des points, coïncidence, affinité), on peut d'ailleurs rendre ma première méthode parfaitement valable. Je ne vois pas pourquoi on ne pourrait pas utiliser le mouvement que te montre si bien C.G. pour démontrer des résultats mathématiques.

M. : Sur ce point, tu rejoins R. Bkouche(2) qui, à propos de la démonstration de la somme des angles d'un triangle donnée par Thibaut en 1809 et que J.L. Chabert(3) appelle "méthode de la tortue Logo", a écrit :

"Une première critique repose sur le refus de l'utilisation explicite du mouvement dans le raisonnement géométrique, les vérités géométriques doivent être établies sans considération de mouvement, ce qui revient, d'une part à mettre en cause le principe de l'égalité par superposition et ainsi la conception euclidienne de la géométrie (qui n'est pas liée au postulat des parallèles), d'autre part à mettre en question de la même façon la construction de la géométrie non-euclidienne (celle des pères fondateurs Gauss, Bolyai, Lobatchevski) qui s'appuie aussi sur la conception euclidienne, y ajoutant un usage explicite du mouvement dans les démonstrations. Cette critique repose en fait sur un a priori idéologique, le refus du mouvement relevant moins de la logique que de la métaphysique, voire de la théologie".

Comme pour toute démonstration, une démonstration par le mouvement suppose que l'on précise les implicites, c'est à dire les résultats admis et les méthodes de démonstration admises. Si les interlocuteurs admettent les mêmes implicites (et

(2) R. Bkouche. Quelques grandes problématiques de l'histoire de la géométrie. Actes de l'Université d'été sur l'histoire des mathématiques (9-12 juillet 1986). Irem de Toulouse pp. 41-73.

(3) J.L. Chabert. Les géométries non euclidiennes. Repères-Irem n° 1 (octobre 1990) pp. 69-91.

partagent donc une même culture), une démonstration conforme à ces règles est et doit être considérée comme valide.

R. : En résumé, nous avons donc montré que pour trois points A, B et C non alignés, il existe un pentagone ABCDE et un seul vérifiant les conditions de parallélisme.

M. : C'est normal. Un pentagone est déterminé par 5 points, soit 10 valeurs dans un système de coordonnées. Par suite, la donnée de 3 points donne 6 valeurs et les 4 conditions de parallélisme donnent les 4 autres... Un géomètre algébriste, baigné de géométrie algébrique à l'italienne, te dirait qu'un pentagone est une courbe de degré 5 formée de 5 droites. L'espace des courbes qui sont produits de 5 droites est de dimension 10 et, chaque fois que tu assujettis l'espace des courbes à satisfaire des conditions linéaires (passer par un point simple, double, ..., tangente de direction donnée en un point donné, etc...), tu abaisses d'autant la dimension. C'est une propriété générale des systèmes de courbes.

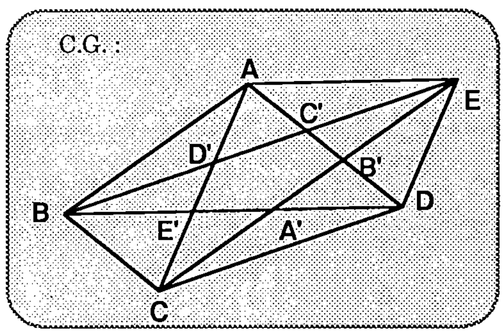
La donnée des trois points A, B et C implique que les deux droites AB et BC sont déterminées et que deux autres passent par l'un des points A ou C. Ainsi tu diminues la dimension de 2 X 2 + 1 + 1, soit 6; les 4 conditions de parallélisme abaissent la dimension de 4 et ton espace est de dimension 0. cqfd.

R. : Il serait quand même intéressant d'avoir une construction à la règle et au compas de notre pentagone.

M. (allant au tableau et commençant à griffonner une figure) : Mais ceci est facile. Si les conditions de parallélisme déterminent le pentagone ABCDE, une fois les trois points A, B et C donnés, les points d'intersection de AC avec BE et BD...

R. (à M) : Attends, je te fais une figure exacte.

(à C.G.) : Supprime les points A' et B' et appelle maintenant A', B', C', D' et E' les intersections respectives des diagonales BD et CE, CE et DA, DA et EB, EB et AC, AC et BD.



R. (à M.) : Que disais-tu ?

M. : Je disais que, si le parallélisme des couples (AD,BC), (BE,CD), (AB,CE) et (AE,BD) détermine le pentagone convexe ABCDE, une fois donnés les trois points A, B et C, les points D' et E' doivent être déterminés. Or, d'après Thalès, on a :

$$\frac{\overline{E'C}}{\overline{E'A}}=\frac{\overline{E'B}}{\overline{E'D}}=\frac{\overline{D'E'}}{\overline{CE'}}=\frac{\overline{D'E'}+\overline{E'C}}{\overline{C'E'}+\overline{E'A}}=\frac{\overline{D'C}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{D'E}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{D'A}}{\overline{AE'}}$$

D'où : $\overline{E'C}=\overline{AD'}$ et $\overline{D'C}=\overline{AE'}$.

Et les relations :

$$\frac{\overline{D'A}}{\overline{D'C}}=\frac{\overline{D'C}}{\overline{CA}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{E'C}}{\overline{E'A}}=\frac{\overline{E'A}}{\overline{AC}}$$

Tu vois : la petite partie est à la grande partie ce que la grande partie est au tout.

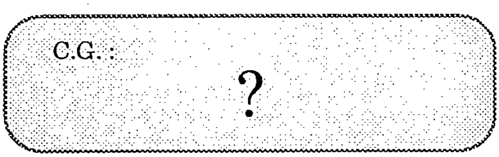
R. : Ça me rappelle quelque chose.

M. : Oui, ces rapports sont égaux au nombre d'or : $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

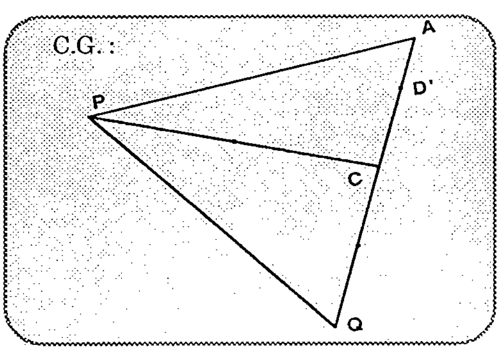
Les points A et C étant donnés, les points D' et E' sont déterminés et constructibles à la règle et au compas.

(à CG) : Voici la solution que je te propose : prends deux points A et C et construis sur le segment AC le point D' vérifiant :

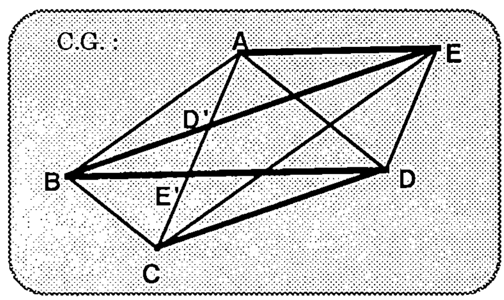
$$\frac{\overline{D'A}}{\overline{D'C}} = \frac{\overline{D'C}}{\overline{CA}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$



M. : Pour ceci, prends sur la perpendiculaire en C à AC un point P vérifiant CP = 2.AC, puis le point Q de la droite AC tel que C soit entre A et Q et AQ = AP. Le point D' est le symétrique du milieu de CQ par rapport à C.



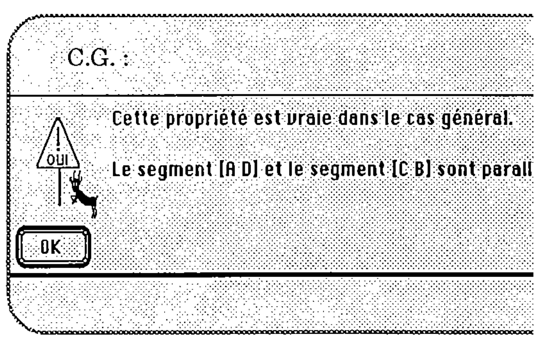
M : Maintenant, efface les constructions auxiliaires en ne gardant que le segment AC et le point D' et prends un point B non aligné avec A et C. Construis le point E' symétrique de D' par rapport au milieu de AC et trace la parallèle à BD' passant par le point C qui coupe BE' au point D et la parallèle à BE' passant par le point A qui coupe BD' au point E. Complète le pentagone ABCDE et ses diagonales.



M. (à R.) : La figure obtenue répond à la question.

R. : Vérifions. On a évidemment BE parallèle à CD et BD parallèle à AE.

(à CG) : AD est-il parallèle à BC ?



M. : Je trouve que C.G. est un peu catégorique dans son affirmation.

R. : On ne va pas recommencer notre discussion de la dernière fois sur la notion de vérité. C.G. est convaincu de la véracité du résultat. A-t-il tort ou a-t-il raison ? C'est au questionneur d'en décider. Tout ce que je reprocherais à la réponse de C.G., c'est qu'il aurait pu nous renvoyer la balle en ajoutant "Es-tu capable de le démontrer ?". Au fait, l'es-tu ?

M. : Oui. Ceci se déduit de :

$$\frac{\overline{E'B}}{\overline{E'D}} = \frac{\overline{E'D'}}{\overline{E'C}} = \frac{\overline{E'C}}{\overline{E'A}} .$$

R. : Par symétrie de construction, on a aussi AB parallèle à CE. Il reste à vérifier que AC est parallèle à DE. (à C.G.) : Est-ce vrai ?

C.G. :

OUI

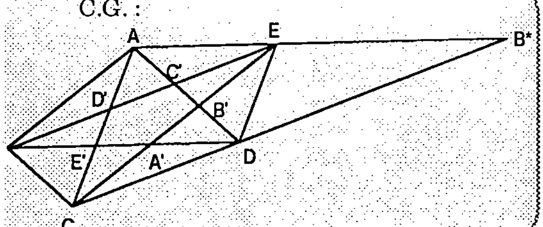
Cette propriété est vraie dans le cas général.

Le segment [A C] et le segment [D E] sont parallèles.

OK

M. : Pour le montrer, c'est un peu plus compliqué. Appelons A', B', C' les autres points d'intersection des diagonales et introduisons le point d'intersection B* de AE et CD.

C.G. :



M. : On a alors :

$$\frac{\overline{A'E'}}{\overline{A'D}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EB^*}} = \frac{\overline{D'A}}{\overline{D'C}} = \frac{\overline{E'C}}{\overline{E'A}} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'E}} .$$

R. : Si on déplaçait l'un des points de base pour voir l'évolution du pentagone ?

C.G. :

OK

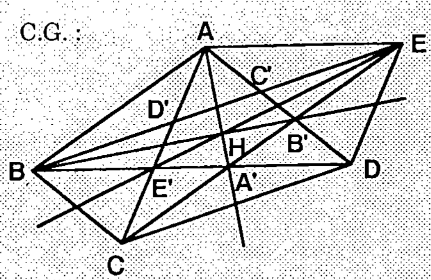
R. (à M) : Regarde : les droites AA', BB', CC', DD' et EE' semblent concourantes. (à C.G.) : Est-ce vrai ?

C.G. :

?

R. : Supprime le point B*, trace les droites AA', BB' et EE' et nomme H le point d'intersection de BB' et EE'.

C.G. :



R. : Les points A, A', H sont-ils alignés ?

C.G. :

Cette propriété est vraie dans le cas général.

Les points A, A' et H sont alignés.

OUI

OK

M. : On peut même préciser que les pentagones ABCDE et A'B'C'D'E' sont homothétiques, H étant le centre d'homothétie. Puisque le quadrilatère AE'DE est un parallélogramme, le rapport est égal à :

$$\frac{\overline{D'C}}{\overline{CA}}\text{ , soit }\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

R. : On pourrait peut être donner une démonstration utilisant les homothéties.

M. : Sans doute, mais ceci risque d'être plus délicat car, si une fois montré que les cinq couples diagonale-côté opposé sont parallèles, il n'est pas compliqué d'avoir le centre de l'homothétie, il faudra auparavant montrer que ce centre est aligné avec les points A, A', puis C, C', puis D, D' si tu le détermines comme étant l'intersection de BB' et EE'.

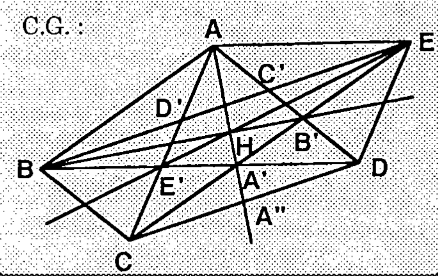
R. : On dirait que AA' passe par le milieu du segment CD. (à C.G.) : Est-ce vrai ?

C.G. :

?

R. : Nomme A" l'intersection de la droite AA' et du segment CD.

C.G. :



R. : Les segments A"C et A"D ont-ils des longueurs égales ?

C.G. :

Cette propriété est vraie dans le cas général.

Les longueurs des segments [C A"] et [A" D] sont é

OUI

OK

M. : Je vais y réfléchir.

Acte 3

(Quelques jours plus tard, dans le même lieu.)

M. : Il est facile de démontrer que AA' passe par le milieu de CD. En effet, le quadrilatère EABA' est un parallélogramme et

$\overline{EC'} = \overline{D'B}$ puisque C' et D' divisent le segment EB en un rapport égal au nombre d'or. Par suite AA' passe par le milieu de C'D' et, par une conséquence de Thalès (ou, si tu veux, de l'homothétie de centre A), la droite AA' passe par le milieu de CD. Ceci m'a donné une idée pour de nouvelles constructions d'un tel pentagone.

(à C.G.) : Prends trois points C, D et H (le centre d'homothétie) non alignés et construis l'image C' de C dans l'homothétie de centre H et de rapport : $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$.

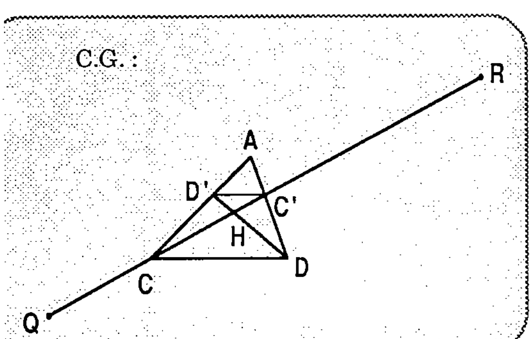
Pour ceci, prends le point Q tel que :

$$\overline{HQ} = \sqrt{5}.\,\overline{HC}$$

et le point R tel que :

$$\overline{HR} = -\,3.\,\overline{HC} \;;$$

le point C' est alors le milieu de QR. Puis construis le point D' intersection de HD avec la parallèle en C' à CD, puis le point A intersection de CD' et C'D.

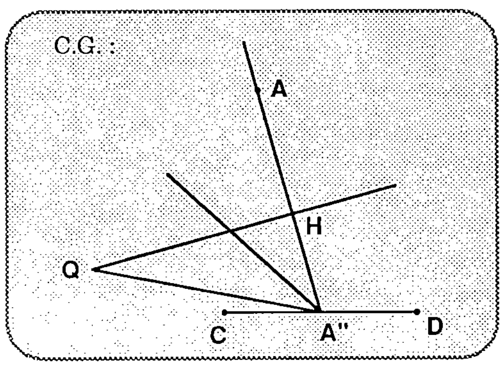


M. (à R.) : On complète alors facilement le pentagone.

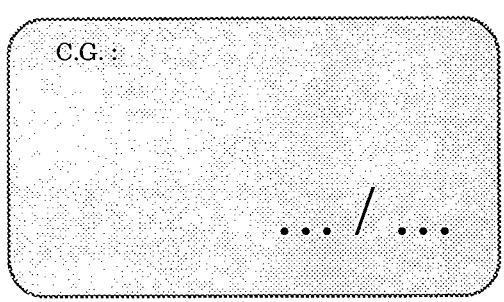
(à C.G.) : Tu peux aussi construire le point A comme l'homothétique du milieu A" de CD dans l'homothétie de centre H et de rapport :

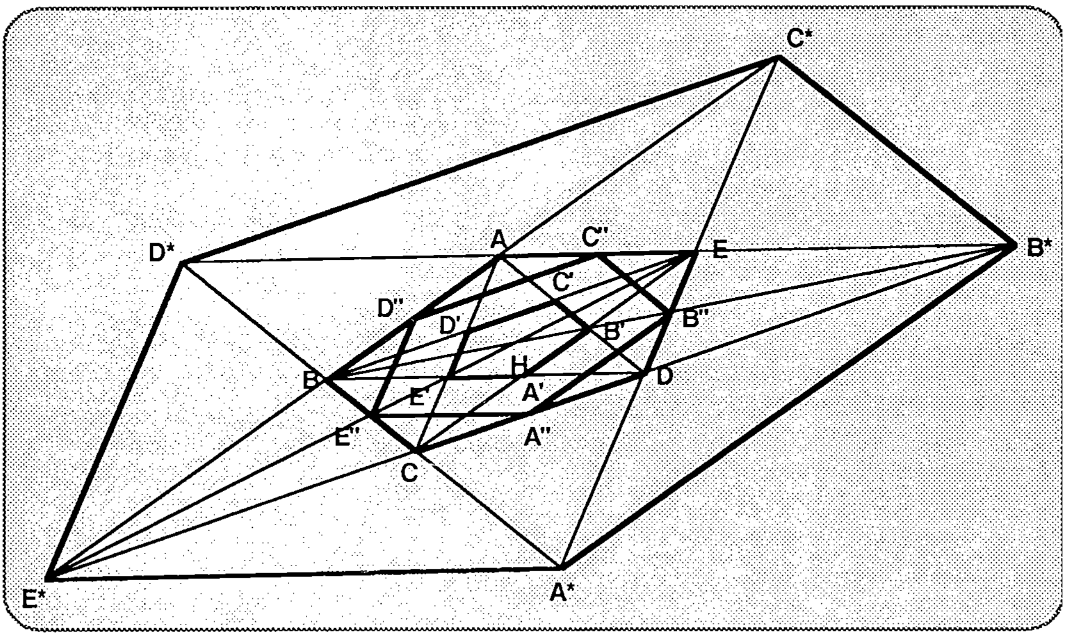
$$1 - \sqrt{5}\,.$$

Pour ceci, prends sur la perpendiculaire en H à HA" un point Q tel que HQ = 2 HA". Le point A est alors le symétrique de Q par rapport à la bissectrice de l'angle des demi-droites A"H et A"Q.



R. : On peut voir aussi que l'on a un "effet de zoom" : tous les pentagones construits à partir du premier en prolongeant les côtés, en prenant les milieux des côtés, en considérant ceux formés par les diagonales, etc... possèdent la même propriété de parallélisme.

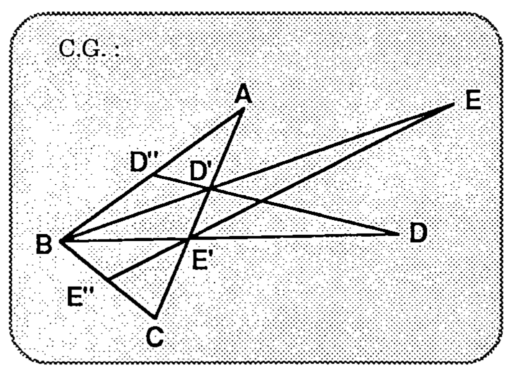




M. : C'est ce qui pose problème car ces pentagones apparaissent naturellement lorsqu'on veut étudier le pentagone ABCDE. On a beaucoup d'informations (qui sont les mêmes modulo des homothéties de rapport positif ou négatif) et il faut organiser ces informations et choisir seulement celles dont on a besoin. Il faut conduire la recherche des rapports dans un but déterminé et non se laisser emporter par la griserie d'une succession d'égalités certes intéressantes, mais qui ne font qu'obscurcir l'étude de la configuration.

Le fait que les droites joignant les sommets homologues par l'homothétie de centre H passent par les milieux des côtés opposés fournit une autre construction basée sur le quadrilatère complet.

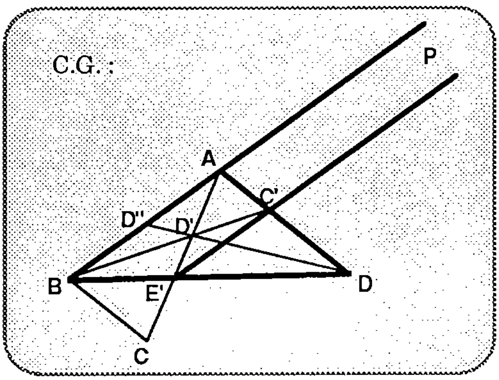
(à C.G.) : Commence de la même manière avec trois points A, B et C non alignés et les points D' et E' partageant AC suivant le nombre d'or. Nomme D" et E" les milieux respectifs de AB et BC, D le point d'intersection des droites BE' et D'D" et E le point d'intersection des droites BD' et E'E".



M. : Le pentagone ABCDE répond à la question.

R. : Où est le quadrilatère complet?

M. : Attends. Notons P le point d'intersection des droites AB et C'E' et considérons le quadrilatère complet PABE'C'D.



M. : Les points B, A, D", P forment une division harmonique et, comme D" est le milieu de AB, le point P est rejeté à l'infini : les droites C'E' et AB sont parallèles.

Par suite : $\dfrac{\overline{D'C'}}{\overline{D'B}} = \dfrac{\overline{D'E'}}{\overline{D'A}} = \dfrac{\overline{D'A}}{\overline{D'C}}$.

et les droites BC et AD sont parallèles. On montre de même que les droites BC et D'A' sont parallèles en considérant le quadrilatère complet ED'BCA'Q et la division harmonique B, C, E", Q où Q est le point d'intersection des droites A'D' et BC. On est ramené aux conditions de la première construction, mais, si on veut, on peut continuer à montrer les autres parallélismes de la même manière. Comme tu l'as remarqué, le pentagone A"B"C"D"E" vérifie les mêmes conditions de parallélisme.

R. : Je te propose une autre construction qui semble être davantage dans l'esprit de Cabri puisqu'elle revient à appliquer deux macro-constructions.

(à C.G.) : Fabrique une macro-construction "parallélo" qui fournit le quatrième sommet d'un parallélogramme lorsqu'on se donne les trois autres et une macro-construction "homdor" qui fournit le transformé d'un point dans une homothétie de centre donné et de rapport le nombre d'or :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

à partir du point et du centre.

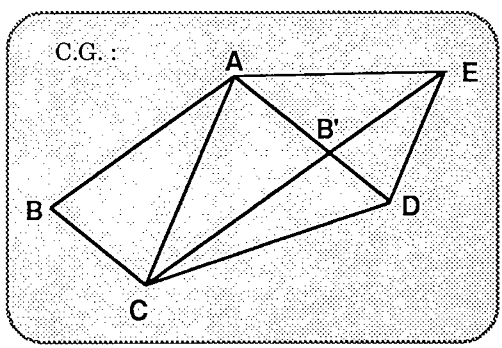
Se donnant A, B et C, construis :

B' = parallélo(A,B,C),

puis D = homdor(B',A)

et E = homdor(B',C).

Le pentagone ABCDE répond à la question.



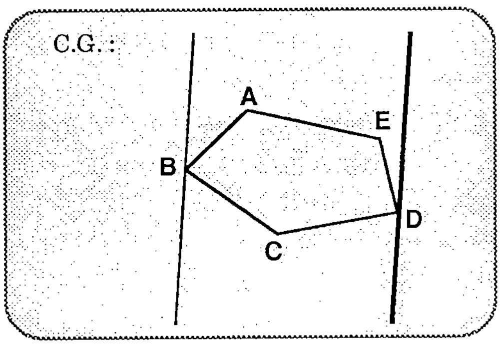
R. : Toutes ces constructions me donnent envie de regarder ce qui se passe quand deux des points A, B et C sont fixés et le troisième mobile.

(à C.G.) : Fabrique une macro-construction qui donnera automatiquement le pentagone ABCDE quand on se donne A, B et C.

C.G. :

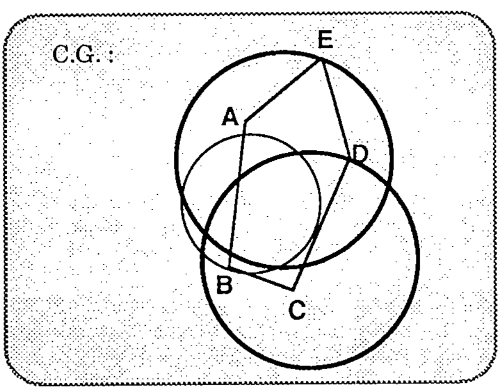
OK

R. : Maintenant, prends A et C fixes et B sur une droite quelconque. Construis le pentagone ABCDE. Quel est le lieu de D quand B parcourt la droite ?



R. (à M.) : Regarde : une droite parallèle !

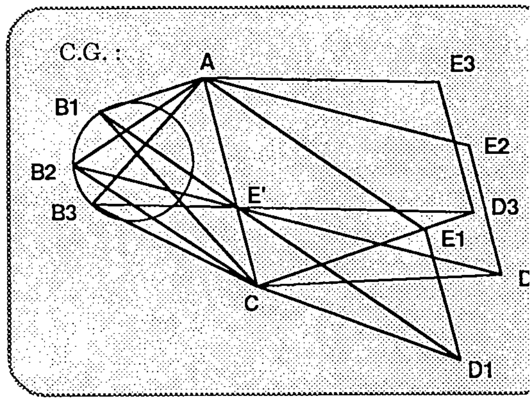
(à C.G.) : Quels sont les lieux de D et E quand B parcourt un cercle ?



R : Deux cercles égaux !

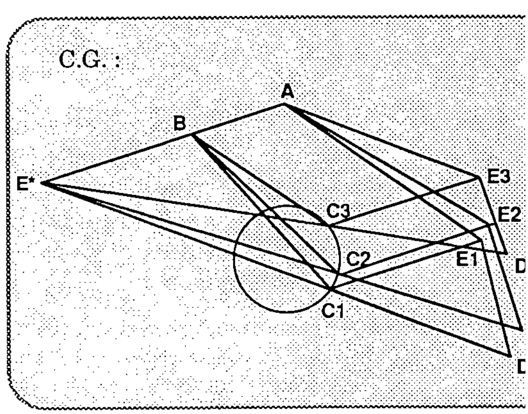
M. : On peut penser que l'on passe de A à D et E par des homothéties (ou similitudes) de même rapport.

(à C.G.) : Pour préciser, peux-tu me donner les transformés de trois points B_1 , B_2 et B_3 sur le cercle ?



M. : Puisque les quatre segments B_1D_1, B_2D_2 , B_3D_3 et AC sont concourants au point E', on peut conjecturer que l'on passe de B à D par une homothétie de centre E'. S'il en était ainsi, on passerait de B à E par une homothétie de centre D' et de même rapport que la précédente.

R. (à C.G.) : Peux-tu faire la même chose avec A et B fixés et C parcourant un cercle ?



R : Puisque les droites C_1D_1 , C_2D_2 , C_3D_3 et AB sont concourantes, on peut conjecturer que D est le transformé de C dans une homothétie ayant pour centre un point E* de la droite AB et, puisque les vecteurs $\overrightarrow{C_1E_1}$, $\overrightarrow{C_2E_2}$ et $\overrightarrow{C_3E_3}$ sont égaux, on peut conjecturer que E est le transformé de C dans une translation.

M. : Supposons que les points A et C sont fixés. Alors il en est de même des points D' et E' et on passe du point B au point D (resp. E) par une homothétie de centre E' (resp. D') et de rapport : $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Par suite, si B parcourt une courbe $\mathcal{C}$, les points D et E décrivent les courbes transformées de $\mathcal{C}$ dans ces homothéties et on passe de la courbe décrite par D à celle décrite par E par une translation de vecteur $\overrightarrow{E'A}$.

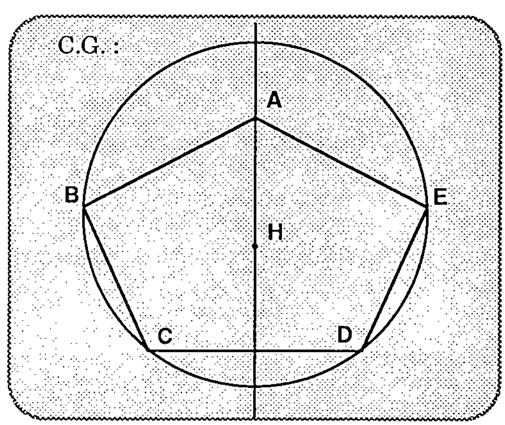
De même, si on suppose que les points A et B sont fixés et que le point C décrive une courbe $\mathcal{C}$, on passe du point C au point E' (resp. D') par une homothétie de centre A et de rapport $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (resp. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$) et on passe du point E' (resp. D') au point D (resp. E) par une homothétie de centre B et de rapport $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Le centre d'homothétie E* faisant passer du point C au point D est situé sur la droite AB et B divise le segment AE* suivant le nombre d'or (toujours l'effet de zoom !). De même, si on note C* le centre de l'homothétie faisant passer de E à D, C* est situé sur la droite AB et A divise le segment BC* suivant le nombre d'or. Enfin, on passe du point C au point E par une translation de vecteur $\overrightarrow{E^*B}$.

R. : A quelle condition le pentagone est-il inscriptible dans un cercle ?

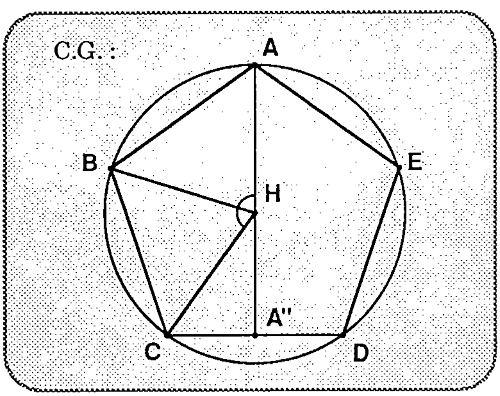
M. : Si on suppose que le pentagone est inscriptible, il est facile de voir qu'il est régulier, les conditions de parallélisme impliquant que les arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DE}$ et $\overset{\frown}{EA}$ sont égaux.

R. : Par contre, si le centre d'homothétie H appartient à la médiatrice de CD, quatre points du pentagone sont sur un même cercle comme le montre C.G.



R. : Je propose d'appeler pentagone isocèle un tel pentagone. Puisqu'un pentagone régulier est un pentagone isocèle tel que HA = HB = HC = HD = HE, ceci me donne une idée de construction simple d'un pentagone régulier.

(à C.G.) : Prends deux points H et A". Construis l'homothétique A de A" dans l'homothétie de centre H et de rapport $1 - \sqrt{5}$. Nomme C et D les intersections du cercle $\mathcal{C}$ de centre H et de rayon HA avec la perpendiculaire en A" à A"H, puis B (resp. E) l'intersection de $\mathcal{C}$ avec la bissectrice des demi-droites HA et HC (resp. HD). Le pentagone ABCDE est régulier.



R. : On peut de même construire un pentagone régulier ABCDE de centre H et de sommet A donnés en construisant le milieu A" de CD comme le transformé de A dans l'homothétie de centre H et de rapport

$$-\frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

et terminer comme précédemment.

M. : On sait que pour un point A donné sur un cercle $\mathcal{C}$, il existe un pentagone régulier et un seul inscrit dans $\mathcal{C}$ et ayant pour sommet le point A. On peut essayer de généraliser ce problème aux pentagones isocèles : se donnant deux points sur un cercle $\mathcal{C}$, combien y a-t-il de pentagones isocèles ayant les deux points pour sommets et deux autres sommets sur le cercle $\mathcal{C}$?

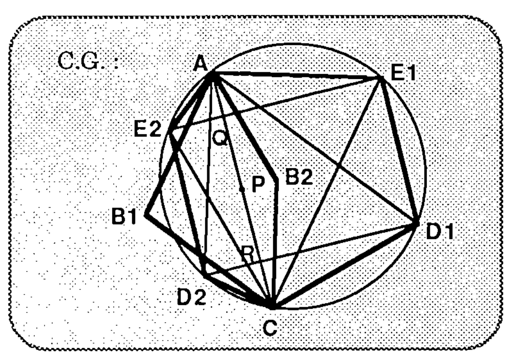
Acte 4

(Quelques jours plus tard,
dans le même lieu.)

R. : On peut résoudre le problème sur le nombre de pentagones isocèles en utilisant le fait que ces quatre sommets forment un trapèze isocèle dont les bases sont dans le rapport du nombre d'or.

Si on se donne A et C sur un cercle, on prend le milieu P de AC et les points Q et R homothétiques de A et C dans l'homothétie de centre P et de rapport $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

La perpendiculaire en Q (resp. R) à AC coupe le cercle en E_1 et E_2 (resp. D_1 et D_2). Si D_1 et E_1 (resp. D_2 et E_2) sont d'un même côté de AC, on construit B_1 (resp. B_2) comme l'intersection de la parallèle en C à AD_1 (resp. AD_2) avec la parallèle en A à CE_1 (resp. CE_2). Les pentagones $AB_1CD_1E_1$ et $AB_2CD_2E_2$ sont les deux solutions.

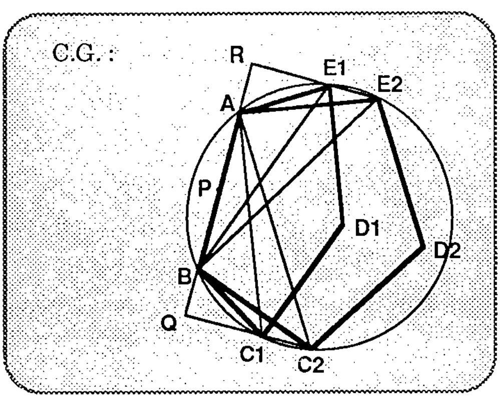


R. : Si on se donne A et B, on construit de même le milieu P de AB, les points Q et R transformés de B et A dans l'homothétie de centre P et de rapport : $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, puis les intersections C_1 et C_2 (resp. E_1 et E_2) de la perpendiculaire en Q (resp. R) à AB avec le cercle. Si C_1 et E_1 (resp.C_2 et E_2) sont d'un même côté de AB, on définit D_1 (resp. D_2) comme l'intersection de la parallèle à BE_1 (resp. BE_2) en C_1 (resp. C_2) avec la parallèle à AC_1 (resp. AC_2) en E_1 (resp. E_2).

— si $AB < r(\sqrt{5}-1)$, il y a deux solutions $ABC_1D_1E_1$ et $ABC_2D_2E_2$;

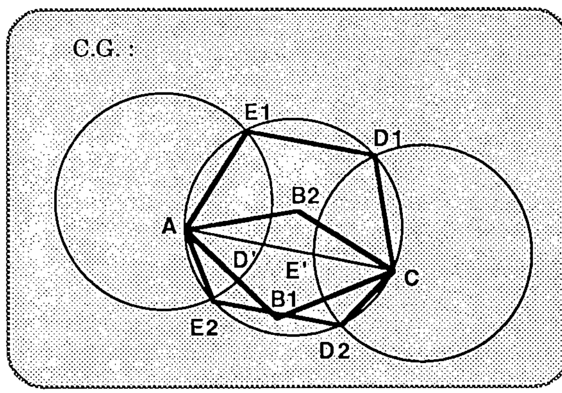
— si $AB = r(\sqrt{5}-1)$, C_1 et C_2 (resp. E_1 et E_2) sont confondus et il y a une seule solution ABCDE, CE étant le diamètre du cercle parallèle à AB ;

— si $AB > r(\sqrt{5}-1)$, il n'y a pas de solution.

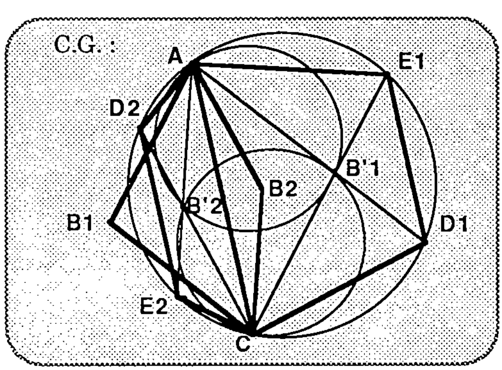


R. : En déplaçant le point B, on voit bien que, si AB est trop grand, les pentagones disparaissent.

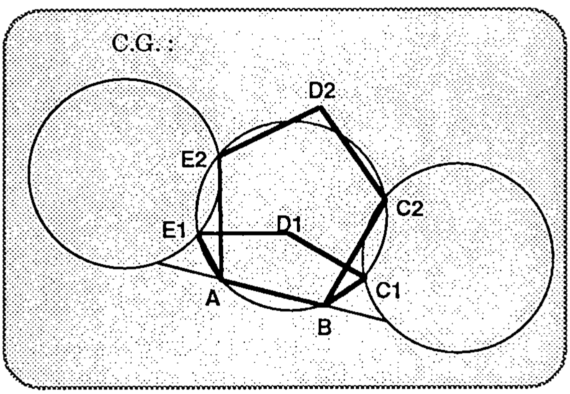
M. : On peut aussi donner des constructions des pentagones isocèles basées sur les résultats obtenus la dernière fois. Si A et C sont fixés sur le cercle $\mathcal{C}$, le point D (resp. E) est l'intersection de C avec le translaté de C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AE'}$ (resp. $\overrightarrow{BD'}$).



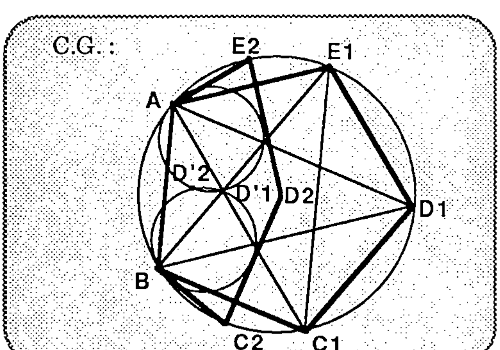
M. : Une troisième solution consiste à construire le point B' comme l'intersection des transformés du cercle $\mathcal{C}$ dans les homothéties de centre A et C et de rapport $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.



M. : Si A et B sont fixés sur le cercle $\mathcal{C}$, le point C (resp. E) est l'intersection de C avec le translaté de C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AE^*}$ (resp. $\overrightarrow{BC^*}$), E* (resp. C*) étant le point de la droite AB tel que B (resp. A) divise AE* (resp. BC*) suivant le nombre d'or.



M. : Ici aussi, une autre solution consiste à construire le point D' comme l'intersection des transformés du cercle $\mathcal{C}$ dans les homothéties de centre A et B et de rapport $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.



M. : On peut aussi préciser que si on se donne deux points sur un cercle $\mathcal{C}$, on n'aura un pentagone régulier inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ que si le rapport entre le segment défini par ces deux points et le rayon du cercle est égal à $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$, si ce segment est un côté du pentagone, ou à $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$, si ce segment est une diagonale. Ainsi, il n'existe que quatre cercles (deux à deux symétriques par rapport au segment) du faisceau de cercle à points de base défini par ces deux points pour lesquels le pentagone est régulier.

R. : Je pense que nos pentagones sont toujours inscriptibles dans une ellipse, mais là C.G. ne peut pas nous répondre.

Acte 5

(Quelques jours plus tard, dans le même lieu.)

R. : Voici une démonstration analytique de l'inscriptibilité de notre pentagone dans une ellipse et de quelques autres propriétés intéressantes.

Prenons comme système de coordonnées des axes portés par les droites BC et BA.

Alors B = (0,0), C = (c,0), A = (0,α), D = (d,δ) et E = (e,ε). Les conditions de parallélisme des couples (AD,BC), (CE,AB), (BE,CD) et (BD,AE) se traduisent par les relations suivantes :

$\delta = \alpha$, $e = c$, $e\delta = \varepsilon(d - c)$ et $e\delta = d(\varepsilon - \alpha)$.

Par suite, $\alpha d = \varepsilon c$, d'où l'on déduit que $c(\delta - \varepsilon) = \alpha(e - d)$, ce qui prouve que les droites AC et DE sont parallèles.

On obtient aussi facilement que $\frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{d}{c} = r$

vérifie $r^2 - r - 1 = 0$ et donc que :

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

d'où l'on déduit que $\frac{\overline{D'C}}{\overline{CA}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

D'autre part, en utilisant le fait que le centre d'homothétie H est le point d'intersection des droites DD" et DE", on obtient pour H les coordonnées :

$$\left(\frac{\varepsilon c}{2\varepsilon - \alpha}, \frac{\varepsilon \alpha}{2\varepsilon - \alpha}\right),$$

soit :

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,c\ ,\ \frac{\sqrt{5}}{5}\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,\alpha\right),$$

et le pentagone A"B"C"D"E" est homothétique du pentagone ABCDE dans l'homothétie de centre H et de rapport $-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

et du pentagone A'B'C'D'E' dans l'homothétie de centre H et de rapport $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$.

L'équation générale d'une conique est :

$$P(x,y) = 0$$

avec :

$$P(x,y) = k\,x^2 + m\,x\,y + n\,y^2 + p\,x + q\,y + r\,.$$

Puisque le polynôme P est défini à un facteur multiplicatif non nul près, on peut supposer que k = 1. Si le pentagone est inscrit dans une conique (Γ), les coordonnées des sommets vérifient cette équation, ce qui nous donne le système :

$$\begin{cases} r = 0 \\ p = -c \\ q = -n\alpha \\ m = \dfrac{c-d}{\alpha} \\ n = \dfrac{m\,c}{\alpha - \varepsilon} \end{cases}$$

qui a pour solution :

$$\begin{cases} r = 0 \\ p = -c \\ q = -\dfrac{c^2}{\alpha} \\ m = -\dfrac{c}{\alpha}\,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ n = \dfrac{c^2}{\alpha^2} \end{cases}$$

En multipliant tous les coefficients par α^2, on obtient finalement pour (Γ) :

$$P(x,y) = \alpha^2x^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\alpha c x y + c^2y^2 - \alpha^2 c x - c^2\alpha y$$

et, puisque $\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2}\,\alpha^2c^2 - 4\,\alpha^2c^2 < 0$,

(Γ) est une ellipse.

Cherchons-en le centre. En posant :

$$(x = X + u \,;\, y = Y + v)$$

on obtient en reportant dans l'expression de P(x,y) :

$$\alpha^2 (X+u)^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \alpha c (X+u)(Y+v)$$

$$+ c^2 (Y+v)^2 - \alpha^2 c (X+u) - c^2 \alpha (Y+v) .$$

Puisque le coefficient de X est

$$2\alpha^2 u - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \alpha c v - \alpha^2 c$$

et celui de Y est

$$2c^2 v - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \alpha c u - c^2 \alpha$$

les coordonnées (u,v) du centre de l'ellipse vérifient le système :

$$\begin{cases} 2\alpha u - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} c v = c \alpha \\[2ex] 2c v - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \alpha u = c \alpha \end{cases}$$

qui a pour solution :

$$u = \frac{\sqrt{5}}{5} \frac{1+\sqrt{5}}{2} c \quad , v = \frac{\sqrt{5}}{5} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \alpha .$$

Donc H est le centre de l'ellipse.

Peut-on le voir géométriquement ?

M. : Considérons un polygone régulier $A_0B_0C_0D_0E_0$: il est inscriptible dans un cercle. Pour trois points non alignés A, B et C, il existe une affinité qui transforme A_0 en A, B_0 en B et C_0 en C. Comme une affinité conserve le parallélisme, l'image du pentagone régulier n'est autre que le pentagone que nous étudions. On en déduit immédiatement le parallélisme du cinquième couple, l'inscriptibilité dans une ellipse, la caractérisation de tous ces pentagones : ce sont des pentagones réguliers vus dans un espace projectif.

Il est clair que l'image du centre du cercle circonscrit par cette affinité n'est autre que le centre d'homothétie H puisqu'une affinité conserve l'alignement et les points de concours (il suffit de remarquer que les droites antécédentes des droites AA', BB', CC', ... passent par le centre du cercle). Comme une affinité conserve les rapports, le point H est le centre de l'ellipse.

R. : On pourrait donc appeler *pentagone projectivement régulier* notre pentagone. On peut donc voir qu'un tel pentagone est inscrit dans une ellipse de centre H.

(à C.G.) : Fabrique une macro-construction "affinité" qui fournit le transformé M d'un point M_0 dans l'affinité qui transforme A_0 en A, B_0 en B, C_0 en C :

M = affinité(M_0,A_0,B_0,C_0,A,B,C).

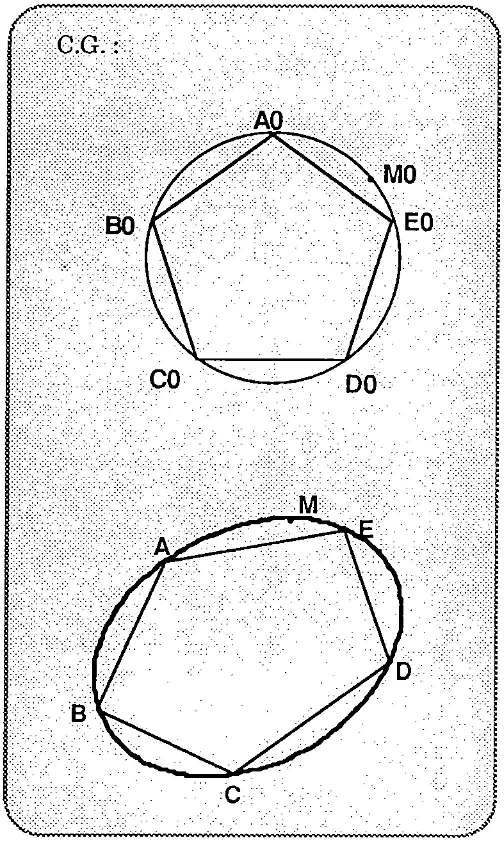
Puis trace un pentagone régulier $A_0B_0C_0D_0E_0$, son cercle circonscrit $\mathcal{C}$ et considère un point M_0 sur ce cercle. Si A, B et C sont donnés et si

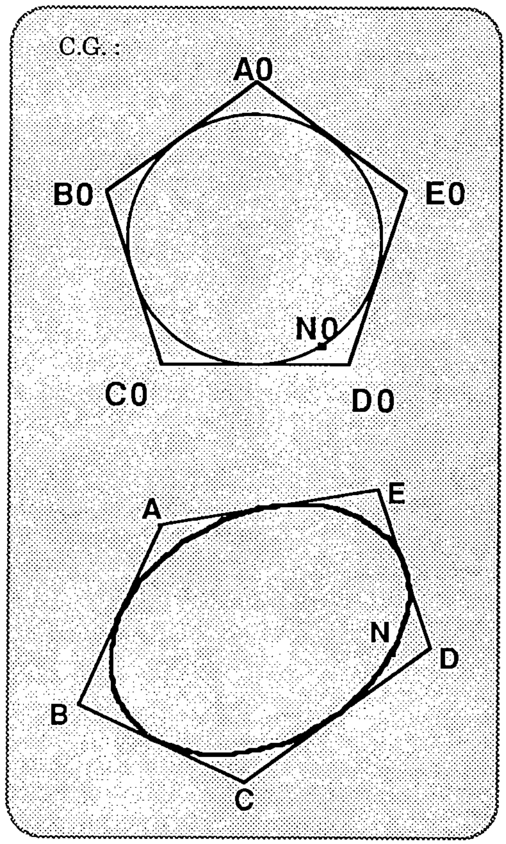
D = affinité(D_0,A_0,B_0,C_0,A,B,C),

E = affinité(E_0,A_0,B_0,C_0,A,B,C),

M = affinité(M_0,A_0,B_0,C_0,A,B,C),

alors ABCDE est un pentagone projectivement régulier et le lieu de M quand M_0 parcourt $\mathcal{C}$ est l'ellipse circonscrite à ce pentagone.





R. : De même, si N_0 est un point du cercle inscrit dans le pentagone régulier $A_0B_0C_0D_0E_0$, le lieu de

$$N = \text{affinité}(N_0,A_0,B_0,C_0,A,B,C)$$

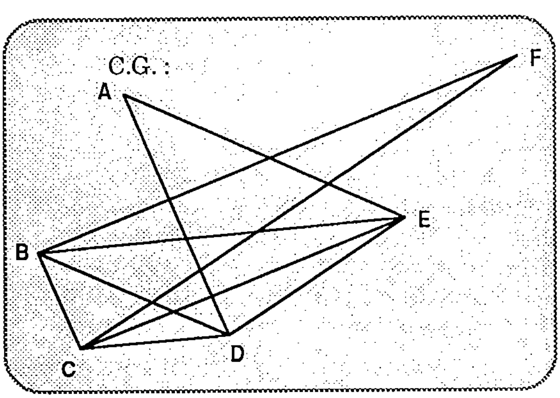
quand N_0 parcourt le cercle inscrit est une ellipse inscrite dans le pentagone ABCDE et cette ellipse de centre H se déduit de la précédente par une homothétie de centre H et de rapport : $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

R. : Oui, mais n'est-ce pas dû à la “richesse” de cette configuration ? Si on prend un polygone avec plus de cinq côtés, crois-tu qu'on obtiendrait les mêmes résultats ?

M. : Tout dépend de ce que tu veux garder dans cette généralisation. Si on veut que le polygone ainsi défini soit l'image d'un polygone régulier par une affinité et garder ainsi les résultats sur l'ellipse, il faut que trois points le définissent, c'est à dire que l'on ait suffisamment de conditions indépendantes de parallélisme. Rappelle toi ce que je t'ai dit de la géométrie algébrique à l'italienne.

Par exemple, pour un hexagone convexe, tu peux définir des "grandes" et des "petites" diagonales. Si l'hexagone est régulier, tu vois qu'à chaque grande diagonale sont opposés deux côtés parallèles, ce qui fait six conditions de parallélisme, et que deux petites diagonales opposées sont parallèles, ce qui donne trois conditions de parallélisme. Si on se donne trois sommets définissant l'affinité, puisque ce sont des points doubles, ceci donne six conditions. Puisque l'espace des courbes qui sont produits de six droites est un espace de dimension 12, la donnée de six conditions de parallélisme indépendantes suffit à déterminer un hexagone vérifiant les trois autres conditions.

R. : (à C.G.) : Pour illustrer ceci, je te propose une construction. Prends trois points A, B et C non alignés et un point D tel que AD soit parallèle à BC. Puis, construis le point E tel que AE soit parallèle à BD et BE parallèle à CD, puis le point F tel que BF soit parallèle à CE et CF parallèle à DE.



R. : AF semble parallèle à CD.

(à C.G.) : Est-ce vrai ?

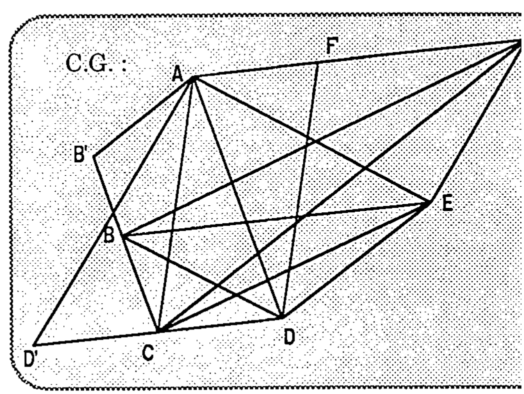
C.G. :

Oui.

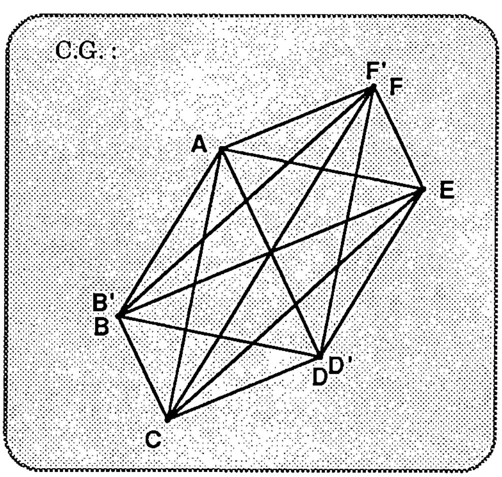
M. : Ceci montre que les conditions de parallélisme sont dépendantes et que les six conditions ne peuvent pas être choisies arbitrairement. Puisque, pour un polygone projectivement régulier à n côtés, le nombre de couples diagonale-côté opposé parallèles est $\frac{n(n-3)}{2}$.

Et puisque la donnée de 3 sommets ne laisse que $2n-6$ conditions arbitraires, ce problème de la dépendance des conditions de parallélisme est normal et ne peut aller qu'en "augmentant" avec n.

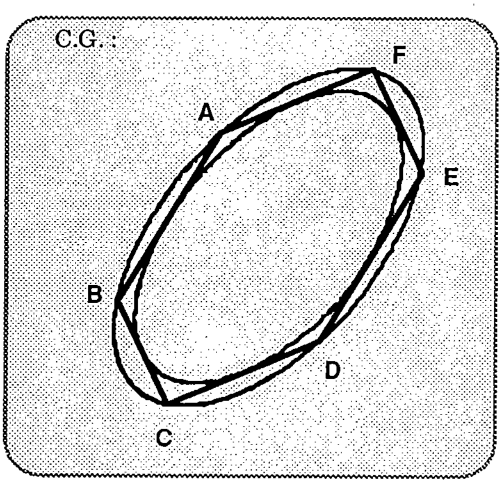
R. : Maintenant, trace la parallèle en A à EF qui coupe CD en D', la parallèle en A à CF qui coupe AB en B' et la parallèle en D à AC qui coupe AF en F'.



R. : Fais glisser le point D de sorte que le point D' se confonde avec le point D.



R. : Tu vois que B' est confondu avec le point B et F' avec le point F. L'hexagone ABCDEF vérifie bien les neuf conditions de parallélisme. Il est inscrit dans une ellipse et circonscrit à une ellipse homothétique de la précédente comme le montre C.G.



M. : Bien sûr, on peut recommencer le débat du début : est-ce vrai ou est-ce démontré ? Aussi, je te suggère pour marquer une pause avant de se quitter et pour alimenter la polémique de se référer à Pascal en citant deux de ses réflexions(4) :

"L'art de persuader a un rapport nécessaire à la manière dont les hommes consentent à ce qu'on leur propose, et aux conditions des choses qu'on veut faire croire."

"On peut avoir trois principaux objets dans l'étude de la vérité : l'un, de la découvrir quand on la cherche; l'autre, de la démontrer quand on la possède; le dernier, de la discerner d'avec le faux quand on l'examine. Je ne parle point du premier : je traite particulièrement du second, et il enferme le troisième."

Epilogue

(Par une belle fin d'après midi d'automne dans le couloir où tout a commencé.)

M. : Ton pentagone convexe est une configuration intéressante. Pourquoi en avais-tu besoin ?

J.C. : Pour rien ! C'est P. qui m'avait soumis cette question car c'est un problème posé dans la revue Quantum.

M. : Il serait intéressant de voir si la solution proposée dans cette revue diffère de celles que nous avons trouvées.

J.C. : Je n'y suis pas arrivé par les angles. On a une inconnue de plus que d'équations et je n'ai pas pu conclure...

(4) B. Pascal. De l'esprit géométrique et de l'art de persuader. In Oeuvres complètes, édition de la Pléiade, pp. 575-604.

M. : Vu l'étude que nous avons faite, c'est normal car c'est plus une configuration de l'espace projectif que du plan euclidien. Mais la culture géométrique anglo-saxonne est plus proche de la géométrie d'Euclide que la nôtre : l'étude des aires et des volumes est étroitement imbriquée dans la reconnaissance et l'apprentissage des configurations et non isolée dans un chapitre à part comme un mal nécessaire. Il se pourrait que l'on y donne une démonstration intéressante.

J.C. : La voici telle que la donne A. Pechkovsky dans le numéro de novembre-décembre 1991 de la revue Quantum :

Deux segments MN et PQ sont parallèles si et seulement si les triangles MPQ et NPQ ont même aire puisqu'ils ont même base et le rapport de leur aire est dans le rapport de leur hauteur. Si on suppose que les quatre couples (BD,AE), (CE,AB), (AD,BC) et (EB,CD) sont parallèles, on a les égalités : aire (ADE) = aire (ABE) = aire (ABC) = aire (BCD) = aire (CDE) , et AC est parallèle à DE.

Epilogue (bis)

(Le bureau de R.)

R.(à M.) : Regarde, je viens de trouver ton énoncé dans un livre de Coxeter(5).

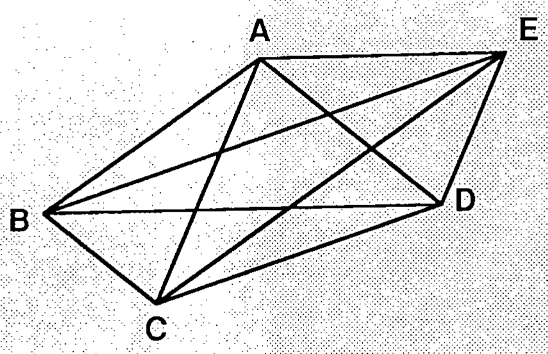
M. : Quelle solution propose-t-il ?

R. : Par les aires et Thalès.

M. : La solution de Pechkovsky !

R. : J'étais en train de consulter C.G. à ce sujet et regarde ce qu'il me donne.

C.G. :



Calculs dans "PentaAire"

Aire(A D E)	= 3,309 948 979 591 836 732 cm2
Aire(A B E)	= 3,309 948 979 591 836 736 cm2
Aire(A B C)	= 3,309 948 979 591 836 735 cm2
Aire(B C D)	= 3,309 948 979 591 836 735 cm2
Aire(C D E)	= 3,309 948 979 591 836 733 cm2
Aire(A B C D E)	= 11,975 507 909 191 297 360 cm2

(5) H.S.M. Coxeter. Introduction to Geometry, second edition. J. Wiley & sons, 1989, p. 207.

R. : J'ai montré par un calcul assez long que le rapport de l'aire de ces triangles à l'aire du pentagone ABCDE est égal à :

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,.$$

Puisqu'une calculette me donne pour cette quantité et pour :

$$\frac{3{,}309\,948\,98}{11{,}975\,507\,91}$$

la même valeur 0,276 393 202 3 , je pense qu'il n'y a pas de doute sur la validité du résultat.

M. : Avec cette méthode des aires, on démontre d'ailleurs facilement les résultats sur l'hexagone projectivement régulier que nous a montrés C.G.

R. : Ce qui est curieux, c'est que cet exercice soit proposé pour un paragraphe intitulé "Equiaffinities".

M. : Ce problème est-il affine, projectif ou euclidien ? Et le concept d'aire relève-t-il de l'affine ou de l'euclidien ? A quoi peut-on se fier dans ce bas monde !

R. Crois-tu surtout qu'avec les indications fournies par Coxeter dans son paragraphe "Equiaffinities", notre étude aurait été la même ?