REPERES - IREM . n°12 - juillet 1993

LES NARRATIONS DE RECHERCHE

Un outil pour apprendre à démontrer

Freddy BONAFE
Irem de Montpellier

1 — Qu'entendons-nous par narration de recherche ?

L.C. PAIS (91) définit ainsi une narration de recherche : "Un exercice scolaire qui consiste en un exposé détaillé, écrit par l'élève, d'une suite d'actions qu'il a réalisées au cours de la recherche de la solution d'un problème de mathématiques".

Les raisons qui nous ont conduit à proposer ce type de travail à nos élèves ont été exposées par A. CHEVALIER (89) et peuvent se résumer ainsi : les observations individuelles d'élèves en situation de recherche de problèmes montrent de leur part des capacités surprenantes, parfois une grande ingéniosité dans les stratégies mises en jeu, capacités et ingéniosité qui ne sont pas toujours mises en évidence dans le déroulement habituel de la classe.

Les difficultés liées à la gestion du temps faisant obstacle à ce type d'observation, il fallait obtenir une méthode permettant de faire apparaître et de développer ces capacités. C'est pourquoi nous proposons ces devoirs d'un type particulier, reposant sur *un contrat entre enseignant et élèves.* Ce contrat engage les élèves à raconter du mieux possible toutes les étapes de leurs recherches, joindre éventuellement leurs brouillons, préciser les aides éventuelles, comment leurs sont venues les nouvelles idées. En échange, l'enseignant s'engage à faire porter son évaluation sur les points évoqués ci-dessus, sans privilégier la solution. *Ce contrat est évolutif,* le travail demandé à l'élève va peu à peu être prolongé par des questions du type : "A la fin de ta narration présente un résumé clair de ta solution destiné à un camarade d'une autre classe qui n'aurait pas cherché le problème et que tu dois convaincre."

Les séances de compte-rendu vont donc s'orienter peu à peu vers la présentation d'une démonstration d'une solution du problème.

On peut ajouter qu'il s'agit d'un travail de longue haleine, qu'il faut deux, voire trois narrations avant que les élèves consentent à se livrer, que ce travail doit être donné "à la maison" au début mais que peu à peu on peut obtenir de bonnes productions lors de séances en classe.

On doit préciser enfin que le choix des sujets est primordial si l'on veut susciter une certaine motivation. G. AUDIBERT (91) donne quelques indications sur le choix de l'énoncé : il doit être vite compris, intéresser et rendre actif l'élève ; la solution ne doit être ni évidente, ni ambigüe ; il faut être attentif aux difficultés que crée un habillage. Les problèmes exhaustifs, ceux dont la réponse n'est pas connue et les problèmes de l'espace fournissent de bons sujets. On trouvera dans BASCOU-BONAFE-BRUNET (92) quelques sujets ayant déjà donné satisfaction, et dans CHEVALIER A., SAUTER M. (92) des conseils préalables à la mise en œuvre ainsi qu'à la gestion dans la classe de cette nouvelle pratique.

2 — La résolution de problèmes et la démonstration

La démonstration apparaît dans la scolarité des élèves à travers deux types de problèmes (GAUD (89)).

— Les problèmes relevant de l'évidence (la vue suffit à se convaincre) où la démonstration a pour fonction *d'expliquer* pourquoi le résultat est vrai.

— Les problèmes ne relevant pas de l'évidence (la vue ne suffit pas à se convaincre ni à conjecturer) où la démonstration a pour but *de savoir* si le résultat est vrai.

Si l'on adopte le point de vue de l'élève qui tente de résoudre un problème, soit *pour lui* cela relève de l'évidence, soit ce n'est pas le cas. Quoi qu'il en soit, la perception de cette évidence est subjective et son sentiment est déterminant. Pour deux élèves donnés d'un même niveau scolaire, un même problème peut donc se situer dans l'une ou l'autre des deux catégories et donner lieu de leur part à des traitements différents. C'est d'ailleurs ce qui explique en partie la question tant de fois entendue :

"Monsieur, et ça, il faut que je le démontre ?"

Cette question qui paraît poser exclusivement le problème de la nécessité de certaines démonstrations, et ceci du point de vue de l'évidence, en soulève en fait bien d'autres :

— le contexte dans lequel elle se situe,

— le public auquel elle s'intéresse,

— la forme qu'elle doit prendre.

On peut voir là des permanences de la démonstration et plus particulièrement divers caractères donnés à son sujet par R. BKOUCHE (89) : caractère *a priori*, caractère de nécessité, caractère historique.

Dans un problème posé en terminale C, on connaissait une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ ainsi que son signe sur $\mathbb{R}$. Une question était :

"Déterminer les variations de F sur R avec $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ ".

On obtient quatre types de réponses concernant l'expression correcte de F' :

Type 1 : on sait que $F'(x) = f(x)$

Type 2 : comme F est la primitive de f qui s'annule en 0, on a $F'(x) = f(x)$

Type 3 : $F(x) = G(x) - G(0)$ où G est une primitive de f. Comme G(0) est constant, F et G sont deux primitives de f et de $F'(x) = f(x)$

Type 4 : $F(x) = G(x) - G(0)$ où G est une primitive de f donc :

$$F'(x) = (G(x) - G(0))' = G'(x) - (G(0))' = G'(x) = f(x)$$

Sur ce genre de question, parfaitement stéréotypée à ce niveau, les réponses données montrent bien quelles sont les hésitations des élèves sur la nécessité, la forme et le public auquel s'adresse la démonstration. Doit-on déduire de la réponse du type 1 qu'elle masque des insuffisances ? Qu'il s'agit là d'une évidence et que le problème est ailleurs ? Quel serait le discours tenu par un enseignant s'adressant à un autre ? Quant aux types 2, 3, 4 qu'est-ce qui les distingue sinon la forme ? Est-ce qu'un élève donnant les réponses 3 ou 4 n'aurait pas donné 1 ou 2 s'il avait dû s'adresser à un autre élève ? Qu'en est-il de la rigueur tant de fois évoquée ? La rigueur reste tout à fait relative, relative aux difficultés rencontrées et aux connaissances acquises. (LEHMANN (89)).

Dans un autre problème posé en classe de seconde :

"Peut-on trouver 3 entiers impairs consécutifs dont la somme soit 2526",

on trouve quatre types de réponses qui conduisent à la solution :

Type 1 : Soit x un impair, les suivants x+2 et x+4, donc :

$$x + (x+2) + (x+4) = 2526$$
$$3x + 6 = 2526$$
$$x = 840$$

On ne peut pas car x est pair.

Type 2 : Soit n un entier, 2n + 1 est impair et les suivants sont 2n + 3 et 2n + 5 d'où :

$$(2n+1) + (2n+3) + (2n+5) = 2526$$
$$6n + 9 = 2526$$
$$6n = 2517$$

On ne peut pas car n n'est pas entier.

Type 3 : la somme de 3 impairs consécutifs est impaire donc c'est impossible.

Type 4 : c'est impossible car la somme de 3 impairs est impaire.

Peut-on dire que pour les élèves ayant donné les réponses 3 ou 4 il s'agissait d'une évidence qu'il fallait expliquer et que pour les réponses 1 ou 2 il s'agissait de savoir si le résultat conjecturé était vrai. Les élèves ayant donné les réponses 3 ou 4 devaient-ils donner une démonstration de leur affirmation concernant la somme de 3 impairs consécutifs ou non ?

Il faut donc admettre que pour un niveau scolaire donné, il existe plusieurs niveaux d'évidence qui peuvent résulter de connaissances préalables, de situations-problèmes déjà rencontrées et qui ont contribué à modifier ces niveaux d'évidence.

Si l'on considère alors que résoudre un problème c'est produire de l'évidence et la faire partager, devant une affirmation de sa part un élève est (doit être) confronté en permanence aux questions suivantes :

— Dois-je la démontrer dans un tel contexte ?

— A quel public dois-je m'adresser ?

— Selon quelle forme ?

L'enseignement de la démonstration doit donc intervenir à deux niveaux :

— Induire ce questionnement chez l'élève

— Proposer des réponses à ces questions.

3 — Un outil pour apprendre à démontrer

Nous avons vu que dans un premier temps au moins une narration de recherche consiste en un exposé d'une suite d'actions réalisées par un élève au cours de sa recherche. Cela nécessite de sa part et avant tout une recherche. En faisant en sorte que le sujet proposé ne produise pas de réponse immédiate et évidente pour l'élève mais qu'il lui permette des conjectures, une action rapide, nous tentons de faire naître ou de développer chez lui le goût de la recherche. Il faut qu'il puisse y avoir rapidement appropriation du problème de sa part afin qu'il ait rapidement des actions à exposer.

C'est à partir de la réalisation de cet exposé que l'élève va devoir commencer une réflexion sur ses propres pratiques, ne serait-ce que pour les décrire.

Anne-Sophie (2nde) dans le problème consistant à rechercher le centre de gravité d'un triangle incomplet (Annexe 1) effectue des calculs à partir de mesures, elle écrit ensuite :

"J'ai voulu vérifier ... les 3 droites ne concourraient pas ... soit j'ai une erreur de calcul soit mon raisonnement est faux. Je vérifie mes calculs ... et oui c'était bien une erreur de calcul (un 25 s'est subitement transformé en 50). Je vérifie encore une fois et les droites ne concourrent pas ... mais cette fois l'écart est minime. Je vérifie une fois de plus. Je ne vois pas d'erreur. Je considère que l'écart est du aux erreurs d'approximation".

Cette description des pratiques conduit parfois à une réflexion qui tend à modifier la méthode choisie :

Marie-Nathalie, 2nde, qui procède de même sur le même problème écrit :

"Tout compte fait cette méthode est très laborieuse et fait intervenir des nombres, elle est donc imprécise".

Elle propose alors une autre méthode dans laquelle elle ne fait intervenir aucune mesure d'angle ou de longueur.

Parfois même les élèves portent un jugement sur leurs erreurs :

Alexandra, 2nde, dans le même problème :

"Au départ une grossière erreur m'avait conduite à un mauvais résultat"

Elle avait effectivement pris pour hypothèse que le centre de gravité était équidistant des sommets dans tout triangle.

A partir de là, par le soin apporté aux annotations des copies — annotations qui seront volontairement orientées vers la justification des affirmations qui ne correspondent pas à des théorèmes connus ou supposés connus — par la confrontation lors du compte-rendu des divers résultats avec mise en cause des élèves concernés, se crée peu à peu le besoin d'une explication ou d'une preuve. Il devient indispensable aux yeux de tous de confirmer ou d'infirmer certaines affirmations.

C'est le moment de montrer la pertinence d'un contre-exemple, l'insuffisance d'une conjecture. Les narrations fourmillent d'exemples à ce sujet...

Dans le problème consistant à compter le nombre maximum de segments pouvant être tracés à partir d'un nombre de points donnés (Annexe 2).

Nathalie, 2nde, écrit : "Après avoir commencé à chercher les résultats à l'aide de figures géométriques ... j'ai constaté qu'il y avait une liaison entre les nombres eux-mêmes et leur nombre de segments ... j'ai essayé de trouver quelle était cette relation, j'ai d'abord pensé qu'il y avait une proportionnalité

1	*0*
2	*0*
3	*3*
4	*6*
5	*10*

... mais $4 \times 10 \neq 5 \times 6$. J'ai donc abandonné cette piste".

Marie, 2nde, de même :
"n points correspondent n + ... segments
6 points correspondent 6+9 segments
je remarque que $(9/3) \times 2 = 6$
la formule pourrait être $(8/9) \times 2 = n$
Mais cela ne marche que pour 6 car pour n=4 on ne peut pas le faire.
J'ai trouvé plusieurs formules comme

$n \times (n-1)$
ou $n+n \times (n-2)$
ou $n+ (n-2) + (n-3)$

Mais à chaque fois cela marchait pour un cas précis ..."

Son bricolage la conduira à

$$n + (n \times [(n-3) \times 0,5])$$

qu'elle ne peut infirmer et qu'elle acceptera en disant "Espérons que ce soit la bonne".

Cette dernière réponse et la remarque qui l'accompagne mettent en évidence deux approches fréquentes concernant la démonstration chez l'élève : l'absence de contradiction et l'indication de leur part que cela est peut-être insuffisant. Voilà donc une brêche dans laquelle on peut s'engouffrer.

Parfois au détour d'une copie, une démonstration apparaît.

Cécile, 2nde, dans le même problème explique ses constructions pour 3, 4, 5 points puis écrit :

"Lorsqu'on a x points et que l'on veut trouver le nombre de segments que peuvent former x points, on multiplie x par (x-1) car un point ne peut être relié à lui-même puis l'on divise par 2, car chaque segment est écrit 2 fois mais en sens inverse. Exemple : un segment AB et un segment BA est le même segment".

Que manque-t-il à cela pour être admis comme démonstration ? Quelques précisions sans doute, particulièrement au début, mais les constructions qui précédaient ce texte étaient suffisamment claires et explicites pour que celui-ci soit admis par tous les lecteurs. Seul le problème de la forme se pose encore.

En demandant, au cours de l'apprentissage, un résumé clair de la solution destiné à un autre élève, en indiquant la forme qu'il peut prendre on parvient alors à des productions intéressantes.

Nicolas, 2nde, dans le problème du centre de gravité (3ème narration, en classe) écrit :

"En griffonant sur mon brouillon je me suis aperçu que si l'on trace les parallèles de certains côtés du triangle, les 2 côtés et les 2 parallèles forment un parallélogramme et le 3ème côté une diagonale ... la médiane qui passe par le 3ème côté est la deuxième diagonale ... je chercherai le centre de gravité par la loi des 2/3. (figure 1)

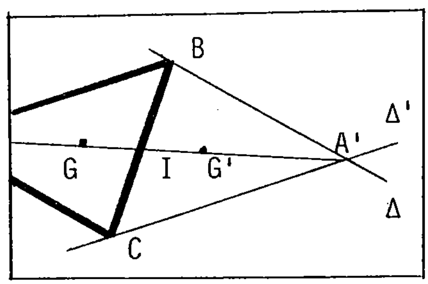


Figure 1

Plus mathématique, on démontre :

** Le triangle ABC n'est pas entièrement représenté, A est en dehors du dessin.*

** Soit la parallèle Δ de [AC] qui passe par B*
Soit la parallèle de Δ' de [AB] qui passe par C
Δ et Δ' se coupent en A'.

** Dans le quadrilatère ABA'C on a (BA') | | (CA) et (CA') | | (BA) donc ABA'C est un parallèlogramme et [AA'] et [BC] se coupent en leur milieu I*

** Dans ABC, [AI] ... est la médiane*

issue de A. Dans le triangle BCA' le centre de gravité G' est au (2/3) de la distance A'I en partant de A' et au (1/3) en partant de I.

** Dans la symétrie centrale à I sur la droite (AA') on a G' → G*

G est le centre de gravité de ABC car il est au (1/3) de I sur [AI]".

Bertrand dans le même problème (3ème narration, en classe) :

"Faisant un brouillon je me rends compte que si je trace la parallèle à (AB) ; A et B étant les 2 côtes du triangle que l'on voit, je constate que la médiane issue de C, C étant le troisième coin du triangle, passe par le milieu de cette parallèle que j'appelerai (EF), E étant l'intersection de la parallèle à (AB) coupant (BC). Bien sûr, je "vois" sur mon dessin..(figure 2)

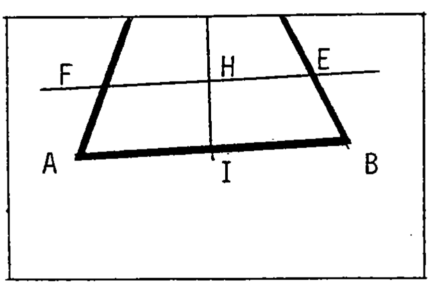


Figure 2

Je prouve maintenant que la médiane issue de C coupe [EF] en H et H milieu de [EE].
(EF) | | (BA) donc d'après le théorème de Thalès

$$\frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CA} = \frac{EF}{BA}$$

I est le milieu de [BA], dans le triangle CIB :
(EH) | | (BI) donc d'après le même théorème

$$\frac{CE}{CB} = \frac{HE}{BI}$$

Dans le triangle CIA : (HF) | | (IA) donc

$$\frac{CF}{CA} = \frac{HF}{IA}$$

$$\frac{CE}{CB} = \frac{HE}{BI} \quad et \quad \frac{CF}{CA} = \frac{FH}{IA} \quad or \quad \frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CA}$$

$$donc \quad \frac{EF}{BI} = \frac{HF}{IA}$$

comme I est milieu de [BA] alors H milieu de [EF]".

Bien sûr, tous les élèves ne vont pas avancer au même rythme mais les productions des uns ou des autres vont servir d'exemples, voire de révélateur pour ce qu'il faut faire, ou ne pas faire.

"Il ne suffit pas de proposer de bons problèmes et d'apprendre à les résoudre pour apprendre à démontrer. Il ne suffit pas de savoir rédiger des démonstrations pour être bien armé sur la résolution de problèmes" (HOUDEBINE (90)).

C'est bien cette articulation entre résolution et démonstration qui est au cœur de la narration de recherche. Cette méthode de travail autorise l'élève à décrire sa recherche dans son langage, sans auto-censure, et donc à fournir des démonstrations non formelles, mais avec l'envie d'être compris. C'est cette envie d'être compris qui le conduit à préciser son niveau d'évidence, à expliquer aux autres pourquoi un résultat est vrai, et par là même se l'expliquer aussi. Si l'on veut bien admettre que résoudre c'est chercher pour soi, et démontrer c'est expliquer en exposant aux autres, apprendre à démontrer ne peut résulter que d'un débat au sein d'une communauté au sujet d'une recherche et de son exposé.

La narration de recherche est donc un moyen de préparer à ce débat par une réflexion préalable et par un texte écrit.

BIBLIOGRAPHIE

• AUDIBERT G. 1991- La Géométrie dans l'enseignement. Repères n°4. Pages 21 à 52.

• BASCOU N. - BONAFE F. - BRUNET R. 1992- Enseignement modulaire - fascicule 1 Classe de 2nde. Pages 3 à 12. Edition Irem USTL, Place E. Bataillon Montpellier.

• BKOUCHE R. 1989 - De la démonstration. Irem de Lille. Nouvelle édition : actes du colloque inter-IREM Géométrie Mai 1988. Pages 192 à 199. Edition Irem - USTL, Place E. Bataillon Montpellier.

• CHEVALIER A. 1989 - Narration de recherche en classe de 4ème : influence sur les stratégies et la motivation des élèves. Actes de 41ème rencontre CIAEM.

. CHEVALIER A. - SAUTER M. 1992 - Narrations de recherche - Edition Irem - USTL Place E. Bataillon. Montpellier.

• GAUD D. 1989 - Les deux fonctions de la démonstration. Actes du colloque inter-Irem Géométrie Mai 1988. Pages 202 à 208. Edition Irem - USTL, place E. Bataillon Montpellier.

• HOUDEBINE J. 1990 - Démontrer ou ne pas démontrer, voilà la question. Repères N°1. Pages 5 à 27.

• LEHMANN D. 1989 - La démonstration. Irem de Lille. 16 pages.

• PAIS L.C. 1991 - Représentation des corps ronds dans l'enseignement de la géométrie au collège : pratiques d'élèves, analyses de livres. Thèse de doctorat. Pages 265 à 282. Editions Irem - USTL, place E. Bataillon. Montpellier.

ANNEXE 1

CONSTRUIRE LE CENTRE DE GRAVITE DU TRIANGLE SANS UTILISER DE TRACES EN DEHORS DE LA FEUILLE

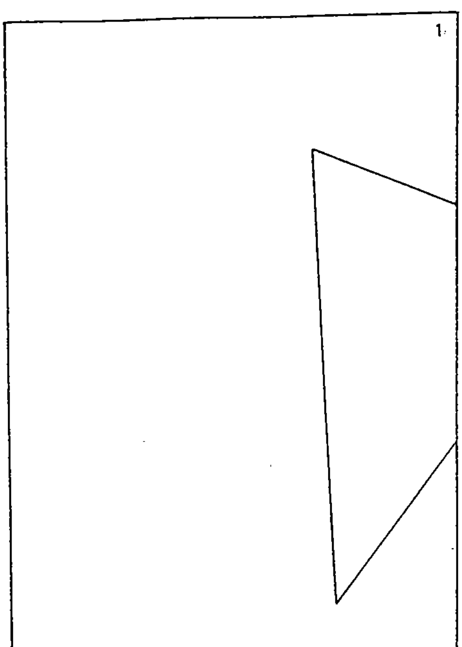
(On rappelle que le centre de gravité est le point d'intersection des trois médianes du triangle)

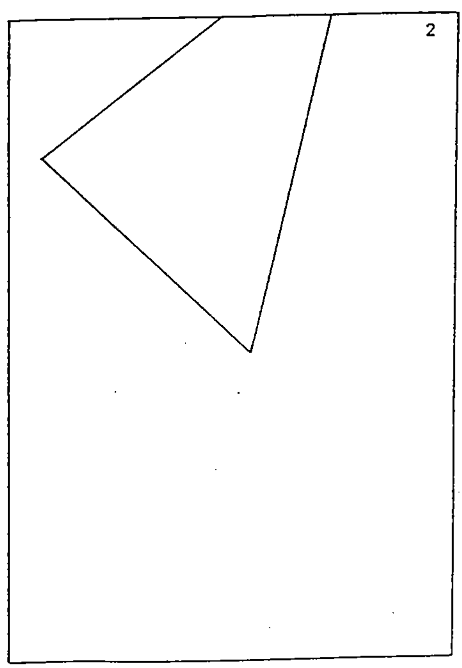
Racontez sur votre feuille :

— les différentes étapes de votre recherche,

— vos remarques,

— les observations que vous avez pu faire et qui vous ont fait changer de méthode ou progresser.





ANNEXE 2

Complétez le tableau ci-dessous :

Si j'ai...	Je peux tracer au plus
1 point	0 segment
2 points	1 segment
3 points	3 segments
4 points	6 segments
5 points	
6 points	
7 points	
12 points	
20 points	
108 points	
n points ($n \in \mathbb{N}$)	

Racontez sur votre feuille

1) - Les différentes étapes de votre recherche. (Vous pouvez minuter le temps, joindre les brouillons)

2) - Les observations que vous avez pu faire et qui vont ont fait progresser ou changer de méthode. (Il vaut mieux chercher seul mais si à un moment donné quelqu'un vous a aidé, dites-le).

3) - La façon dont vous expliqueriez votre solution à un camarade qui n'a pas cherché le problème (et que vous devez convaincre).

Attention : l'évaluation ne portera pas sur la nature de la solution (juste ou fausse voire incomplète) mais sur les trois points évoqués ci-dessus ainsi que sur la clarté de votre exposé.