# ADVERTISSEMENT AU LISEUR *

Ainsi la voilà, cette Analyse non-standard — ANS pour les intimes —, dont on nous rebat les oreilles ! La voici qui débarque dans les pages de *Repères*, ou plutôt qui se glisse insidieusement entre deux articles vantant les mérites de la méthode ou de l'hypothèse, ou traitant des contenus ou des programmes. Qu'est-ce à dire ? Dans une revue qui fleure bon l'institution ?

Serait-ce donc qu'elle pointerait le bout de son nez dans l'enseignement secondaire ? Serait-ce que l'on voudrait nous acclimater avant quelque coup de force mijoté dans le secret des cabinets ministériels ou irémiques ? Sortez les bases de filtre par la fenêtre et c'est l'ANS qui frappe à la porte ?

Que nenni ! *Repères*, comme son nom l'indique, se fait seulement un point d'honneur d'être, aussi, le reflet des discussions qui fleurissent dans les établissements, dans les groupes de formation et de recherche des Irems, tente de répondre aux interrogations, ou pour le moins, de susciter le débat, lorsqu'il est dans l'air, et s'impose tout simplement de faire le point sur la mathématique en mouvement, même si elle n'est pas objet d'enseignement dans les lycées et les collèges. Et après tout, les Irems ont vocation à la formation, plus que jamais même, depuis la création des Iufms ; ils sont d'ailleurs dotés d'une commission sur l'enseignement des mathématiques à l'université. Place donc à quelques pages bienvenues sur l'ANS.

(*) Comme l'on disait au XVIIème siècle, où tout, *en somme*, commença.

Le poète Thoreau prônait *le regard oblique*. Nul doute qu'un aperçu sur l'ANS, et sur ses implications didactiques, au niveau où elle peut être enseignée aujourd'hui, ne soit éclairant pour qui doit enseigner l'analyse classique — qu'il faudra peut-être maintenant qualifier de "standard" —. Nul doute qu'il sera bien accueilli par qui veut comprendre les enjeux de l'émergence d'un nouvel avatar de la quête mathématicienne : car on n'en a jamais vraiment fini avec l'infini, qui reste le moteur de la création mathématique. Et ce qui n'est pas le moins intéressant dans cette histoire d'aujourd'hui, c'est que nos non-standardistes — en mal de précurseurs comme tout innovateur qui cherche à faire sa place dans un milieu sceptique ou réticent —, redécouvrent ceux qu'ils aimeraient prendre pour leurs lointains aïeux, les Leibniz et autres Fontenelle: c'est dire si les amateurs d'histoire(s) y trouveront aussi leur compte.

Aussi, ne boudons pas notre plaisir : le comité de rédaction, dans sa grande largesse, a choisi de nous informer en deux temps, en distillant tout d'abord une synthèse permettant de se faire une idée sur ce qu'est l'ANS : ce sont les pages qui suivent, puis un article sur l'intérêt que l'on peut en retirer pour une réflexion sur l'enseignement de l'analyse (prévu pour le n°13) : *L'enseignement de la continuité et de la dérivabilité en ANS*, de Thérèse Gilbert (G.E.M. de Louvain-la-Neuve). Ce n'est pas dans les habitudes de la revue que de proposer des contenus mathématiques hors de toute situation d'apprentissage ; mais il est vite apparu qu'une information préalable s'imposait pour préparer la lecture du second article de Th. Gilbert. C'est donc bien un dyptique sur l'ANS que *Repères* propose aujourd'hui à ses lecteurs. Que ceux-ci affûtent leurs plumes : une analyse peut en cacher une autre.

Jean-Pierre Le Goff,
pour le comité de rédaction de *Repères*.

# QU'EST-CE QUE L'ANALYSE NON-STANDARD ?

Thérèse GILBERT
G.E.M. de Louvain-la -Neuve

L'article suivant constitue une introduction à l'analyse non standard (de Nelson). Il sera suivi d'un autre article sur la continuité et la dérivabilité en analyse non standard. Nous espérons que cette série d'articles donnera aux lecteurs l'envie de connaître un peu plus ce domaine des mathématiques et leur permettra de voir l'analyse d'un oeil nouveau. En effet, nous verrons que l'analyse non standard peut nous éclairer sur certaines notions et certains théorèmes d'analyse classique.

C'est avec l'aimable autorisation du Comité de Rédaction de la revue belge *Mathématique et Pédagogie* que cet article a pu être publié ici parallèlement à sa publication dans le n°89 de *Mathématique et Pédagogie.* Cette revue et *Repères IREM* n'ont pas beaucoup de lecteurs communs.

L'analyse non standard est un domaine des mathématiques dans lequel on légitime l'existence des infiniment petits et des infiniment grands. En analyse non standard, dire "si $x$ est infiniment proche de $a$ , $f(x)$ est infiniment proche de $f(a)$" n'est pas uniquement la formulation d'une intuition sur la continuité dont on se débarrasse vite pour s'exprimer ensuite plus rigoureusement. Cette expression a un sens précis et est strictement rigoureuse une fois installées les bases de l'analyse non standard.

Mais l'utilisation des infiniment petits en analyse ne date pas d'hier. Aux XVIIème et XVIIIème siècles, Leibniz et l'Hospital, puis Euler, ont tenté d'en faire accepter l'utilisation par les mathématiciens de leur époque. Mais leur existence suscitait bien des critiques. Une des difficultés surgissant à leur emploi fut, comme le rappellent F. et M. Diener, "relevée au début du XVIIIème siècle par G. Berkeley dans un pamphlet célèbre. Partant du principe que la somme de deux infiniment petits est encore un infiniment petit, on ajoute à lui-même un tel nombre $\delta$ , et on obtient $2\delta$ , $3\delta$ , ... $N\delta$ . Survient le moment où la goutte fait déborder le vase : si $N\delta$ est le dernier des infiniment petits, le suivant $N\delta + \delta$ ne l'est plus, ce qui est absurde puisqu'il est la somme de deux infiniment petits."[3]

Les mathématiciens s'efforcèrent donc soit de légitimer, soit d'évacuer ces infiniment petits pour fonder l'analyse sur des bases plus rigoureuses, ce à quoi Cauchy et surtout Weierstrass parvinrent au XIXème siècle. La définition de la continuité en $\varepsilon$ , $\delta$ , par exemple, montre bien comment ils furent évacués :

*On dit que la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue en $x$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$$
$$|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon .$$

Puis coup de théâtre lorsque A. Robinson, en 1961, présente l'analyse non standard, une nouvelle théorie où l'usage des infiniment petits trouve sa justification. Depuis, une deuxième version de l'analyse non standard est apparue. Elle fut introduite par E. Nelson en 1977.

Mais comment a-t-on pu contourner des paradoxes comme celui énoncé ci-dessus et fonder l'analyse non standard ? Peut-on faire de l'analyse non standard et penser en termes d'infiniment petits et d'infiniment grands sans devoir ranger son bon sens au placard ? En quoi l'analyse non standard est-elle plus simple, plus intuitive que l'analyse classique ? En quoi est-elle plus compliquée, plus choquante ? Nous tâcherons de donner quelques éléments de réponses à ces questions en présentant l'analyse non standard de Nelson.

Nous donnerons d'abord quelques idées et images mentales sur les nombres et objets non standard (1) sans chercher à les définir rigoureusement. Nous présenterons ensuite les fondements de l'analyse non standard dans une deuxième section intitulée "axiomatique IST de Nelson". Le lecteur qui trouverait cette deuxième section trop ardue pourra directement passer à la troisième, dans laquelle nous montrons sur des exemples comment fonctionne en pratique l'analyse non standard. Pour terminer, nous relèverons quelques "faits choquants" que l'on rencontre en faisant de l'analyse non standard.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, merci à C. Hauchart, M. Henry, B. Jadin, H. Lombardi et Nicolas Rouche qui ont contribué à améliorer ce texte.

## 1 — Familiarisation avec les objets non standard.

### 1.1. Les naturels.

L'ensemble $\mathbb{N}$ , l'addition, la multiplication dans $\mathbb{N}$ sont tels que nous les avons toujours utilisés. Toutes les propriétés et les règles de calcul restent inchangées. Simplement, dans $\mathbb{N}$ , on distingue deux sortes d'entiers :

— les standard ou (selon l'expression de G. Reeb [2]) les naïfs ;

— les non standard ou infiniment grands.

Pour faire comprendre ce que sont les naïfs, citons G. Reeb [2] :

"*a) l'entier 0 est décrété naïf ;*

*b) si $n \in \mathbb{N}$ a été décrété naïf, alors $n$+1 sera décrété naïf.*

*De plus, ne sont réputés naïfs que les entiers nantis de ce titre en vertu de a) ou b) .*

*Il est permis de raisonner en utilisant le principe de récurrence.*"

(1) "Standard" est invariable.

Cette dernière affirmation signifie ceci : si une propriété $P$ est vraie pour 0 et si, dès qu'elle est vraie pour le naïf $n$, elle l'est aussi pour $n+1$, alors $P$ est vraie pour tous les naïfs.

Ces affirmations ne font pas partie des axiomes servant à construire l'analyse non standard ; néanmoins, elles sont vraies au sens où elles se déduisent de ces axiomes. Nous les citons pour faire comprendre ce qu'est un naturel standard (ou naïf).

Nous connaissons maintenant quelques naïfs : 0 , 1 , 2 , 3 , ... 100 . D'autre part, on peut prouver que la somme et le produit de deux naïfs sont naïfs. De même, la puissance d'un naïf par un naïf est un naïf. Donc, $10^{10}$ , ... $10^{1000}$ sont naïfs.

Parlons maintenant des non naïfs. Que pouvons-nous en dire en nous basant sur les affirmations de G. Reeb reprises ci-dessus ?

Si $\omega \in \mathbb{N}$ n'est pas naïf et si $n \in \mathbb{N}$ est naïf, alors $\omega > n$ . Et encore, si $\omega \in \mathbb{N}$ n'est pas naïf, alors $\omega - 1$ non plus.

### 1.2. Paradoxes.

A ce stade beaucoup auront déjà envie de s'écrier : "existe-t-il des naturels non naïfs ?".

En effet, en appliquant le principe de récurrence classique (celui qui concerne l'ensemble $\mathbb{N}$ ), on trouve :

Puisque 0 est naïf et puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ , dès que $n$ est naïf, $n+1$ l'est aussi, on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $n$ est naïf. Et l'on conclut qu'il n'y a pas de non naïf dans $\mathbb{N}$ et que "naïf" signifie exactement "entier naturel".

On peut formuler la gêne que nous inspire l'existence de non naïfs dans $\mathbb{N}$ d'une autre façon :

Les naturels sont bien ordonnés. Ceci signifie que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Cette propriété est vraie aussi en analyse non standard puisque l'on n'a rien changé à l'ensemble $\mathbb{N}$. S'il existe des non naïfs dans $\mathbb{N}$, l'ensemble de ces non naïfs a un plus petit élément $\omega$. Donc $\omega - 1$ n'est pas naïf ; ce qui contredit la propriété citée plus haut.

La "réponse" à ces paradoxes est la suivante :

La propriété "être naïf" n'est pas une propriété classique(2) (nous verrons plus précisément ce que cela signifie dans la section 2). Pour cette raison, elle ne répond pas au principe de récurrence habituel portant sur l'ensemble $\mathbb{N}$. Le seul principe de récurrence que l'on peut appliquer à cette propriété est celui énoncé en 1.1 et qui donne : puisque 0 est naïf, et puisque pour tout $n$ naïf, dès que n est naïf, $n+1$ l'est aussi, on a que pour tout n naïf, n est naïf ; ce qui n'est pas contradictoire.

D'autre part, comme "être naïf" n'est pas une propriété classique, les entiers la vérifiant ne forment pas une partie(3) de $\mathbb{N}$ (ce point sera également expliqué dans la section 2). Le fait de ne pas pouvoir former

(2) "classique" pourrait s'exprimer aussi par "traditionnelle" par opposition à "non standard".

(3) Il faut prendre ici le mot partie non pas dans son sens intuitif, mais bien comme désignant un "ensemble" satisfaisant à la théorie des ensembles qui fonde les mathématiques (voir deuxième partie). On sait que certains "ensembles" conçus intuitivement (naïvement) ne sont pas acceptables : par exemple, l'ensemble de tous les ensembles.

un ensemble à partir d'une propriété non classique, comme "être naïf", par exemple, est la clef qui permet de contourner beaucoup de paradoxes. Cela nous apparaît un peu comme un tour de passe-passe, mais c'est le prix à payer pour faire de l'analyse non standard.

**1.3. Les réels.**

De même que pour l'ensemble $\mathbb{N}$, pour $\mathbb{R}$, les réels, les opérations définies sur les réels, leurs propriétés et tout ce qu'on avait défini ou établi en analyse classique restent inchangés. Ce qui change, c'est qu'on distingue dans $\mathbb{R}$ d'une part les réels standard, d'autre part les réels non standard qui peuvent être soit infiniment grands, soit infiniment proches d'un réel standard et, parmi ces derniers, les infiniment petits (c'est-à-dire infiniment proches de 0). On définit ces trois dernières notions à partir du mot "standard" :

*Soient* $\varepsilon, \omega, x, y \in \mathbb{R}$ *; on dit que*

$\varepsilon$ *est infiniment petit (i.p) si* $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$ *standard,* $|\varepsilon| < |x|$ ,

$\omega$ *est infiniment grand (i.g) si* $\forall\ x \in \mathbb{R}$ *standard,* $|\omega| > |x|$ ,

$x$ *est infiniment proche de* $y$ *(*$x \simeq y$*) si* $x - y$ *est i.p.*

Sur la droite réelle, on peut donc imaginer des nombres standard, autour de chacun d'eux un "halo" d'infiniment proches — en particulier, autour de 0, le "halo" des infiniment petits — et très loin à gauche et à droite, les infiniment grands.

**1.4. Notation.**

Nous réserverons les lettres $\varepsilon$ , $\alpha$ et $\beta$ pour les i.p et $\omega$ pour les i.g (et nous noterons $\omega \simeq \infty$ ).

Nous abrégerons les expressions :

$[\forall x\ \ x \text{ standard} \Rightarrow F(x)]$ par : $[\forall^{S} x\ \ F(x)]$ ,

et

$[\exists x\ \ x \text{ standard} \wedge F(x)]$ par : $[\exists^{S} x\ \ F(x)]$ .

**1.5. Quelques objets non standard.**

Des nombres : $\sqrt{2}$ , e , $10^2$ sont standard, par contre, $10^{\omega}$, $\sqrt{2} + \varepsilon$ , $-\omega$ sont non standard.

Le terme "standard" s'applique aussi à d'autres choses que les nombres. Par exemple, des fonctions ou des ensembles peuvent être non standard parce qu'ils sont définis à l'aide de constantes explicitement non standard. En voici quelques exemples.

Des fonctions : les fonctions réelles définies par les expressions

$f(x) = \omega x + 1$ ; $g(x) = \omega.\sin \frac{x}{\varepsilon}$ ;

$h(x) = -\varepsilon$ si $x<0$ , $h(x) = \varepsilon$ si $x \geq 0$ ;

sont non standard. On peut dire par exemple que la "pente" de la droite représentant $f$ est i.g, que $\forall x \in \mathbb{R}\ h(x) \simeq 0$ , etc.

Des ensembles : $[-\varepsilon , \varepsilon ]$ , $]-2-\varepsilon , 2+\varepsilon [$ , $[0 , \omega ]$ , $\{ n\varepsilon \mid n \in \mathbb{N} \}$ sont des ensembles non standard. Ce sont néanmoins des ensembles au sens classique (puisque $\varepsilon$ et $\omega$ sont des réels), ce qui n'est pas le cas de $\{n \in \mathbb{N} \mid n$ est naïf$\}$ comme nous l'avons vu plus haut.

### 1.6. Les non standard et l'intuition.

Comment peut-on se représenter les réels standard et non standard ? Laissons A. Deledicq [5] nous donner son point de vue. Peut-être cela pourra-t-il nous éclairer ne fût-ce que fugitivement.

"Lorsque l'on commence à se familiariser avec les objets non standard, une question vient parfois nous effleurer : "Comment ai-je pu jusqu'ici, faire fonctionner une image mentale qui n'incluait pas l'existence de ces objets ?". Ne pas envisager ou même nier leur "existence" n'est-ce pas en effet l'expression d'un immense orgueil : celui qui consisterait à croire que tout nous est accessible. Or n'est-il pas "évident" qu'à tout moment et quels que soient nos moyens il existe quelque chose d'inaccessible ; quelque chose que nous ne pourrons jamais atteindre, voir, sentir, ou même concevoir. [...]

Nous proposons donc de penser aux nombres et aux objets standard comme à des nombres ou objets dont nous avons vu ou dont nous pourrions, un jour, voir une réalisation. [...]

Nous proposons de penser aux objets non standard comme à des objets dont jamais personne nulle part n'a vu ou ne pourra voir une réalisation."

## 2 — L'axiomatique IST de Nelson.

Dans la première partie, nous nous sommes familiarisés avec les notions "standard" et "non standard" sans souci de rigueur. Nous allons maintenant présenter les bases de l'analyse non standard. Mais avant revenons aux mathématiques classiques. Toutes les mathématiques classiques peuvent être fondées à partir de l'axiomatique ZFC (Zermelo-Fraenkel-Axiome du Choix) de la théorie des ensembles. Dans cette théorie, tout n'est qu'ensemble. Le nombre 0, par exemple, est défini comme étant l'ensemble vide $\emptyset$, 1 est l'ensemble $\{0\}$ c'est-à-dire $\{\emptyset\}$, 2 est l'ensemble $\{0,1\}$ c'est-à-dire $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, etc. Les relations, les fonctions sont également des ensembles.

L'axiomatique ZFC comprend neuf axiomes. L'axiome de l'ensemble vide, par exemple, s'énonce comme suit :

$$\exists x \ \forall y \ [\neg(y \in x)] .$$

Il assure l'existence d'un ensemble tel qu'aucun élément ne lui appartient. Citons comme deuxième exemple l'axiome appelé "schéma de substitution" :

$$\forall z_1, z_2, \dots, z_n$$

$$[\forall x,y,y' \ [F(x,y, z_1, z_2, \dots, z_n) \wedge F(x,y', z_1, z_2, \dots, z_n) \Rightarrow y = y']$$
$$\Rightarrow \forall u \ \exists v \ \forall y \ [y \in v \Leftrightarrow \exists x \ [x \in u \wedge F(x,y, z_1, z_2, \dots, z_n)]]],$$

il est plus difficile à "déchiffrer" (et nous ne le ferons pas ici), mais une de ses conséquences est très souvent utilisée en mathématiques élémentaires : étant donné un ensemble $E$ et une propriété $P$, on peut former le sous-ensemble $A$ comprenant les éléments de $E$ vérifiant la propriété $P$. On dit qu'on peut *collectiviser* les éléments de $E$ vérifiant $P$. On note le sous-ensemble $A$, $\{x \in E \mid P(x)\}$. Par exemple, à partir de $\mathbb{N}$ et de la propriété "être pair", on peut former l'ensemble $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est pair}\}$. La connaissance de cet axiome facilitera la compréhension de l'axiome de standardisation expliqué plus loin.

Pour former la théorie des ensembles IST (Internal Set Theory) sur laquelle repose toute l'analyse non standard de Nelson, on ajoute aux axiomes de la théorie des ensembles ZFC, le prédicat (nouveau terme primitif) "standard" et trois axiomes régissant l'usage de ce prédicat : l'idéalisation, la standardisation, le transfert.

**2.1. L'axiome d'idéalisation.**

Cherchons encore à nous représenter des non naïfs de $\mathbb{N}$. Ou plutôt cherchons à nous persuader de leur existence — pas au sens formel du terme, mais plutôt au sens philosophique.

Prenons $10^{(10^{10})}$ par exemple ; c'est "très grand", mais c'est un naïf. Mais on peut voir qu'il existe des nombres "beaucoup" plus grands : imaginons par exemple le nombre s'écrivant dans la base $10^{(10^{10})}$ à l'aide d'un 1 suivi d'une suite de 0 d'une longueur de 1000 années lumières (à raison d'un 0 tous les 3mm) ! Eh bien, c'est encore un naïf mais il y a une infinité de nombres "immensément" plus grands que celui-là et qu'on ne peut isoler par la pensée.

Ainsi, chaque fois que l'on pense à un nombre, on est obligé d'admettre qu'il y a une infinité de nombre encore plus grands. Prendre comme principe qu'il y a des non naïfs dans $\mathbb{N}$ peut alors paraître moins choquant à certains. Ceux que ce "raisonnement" ne convainc pas accepteront sans doute l'existence des infiniment grands après avoir lu la propriété suivante qui ressemble fort au raisonnement ci-dessus, mais qui découle directement de l'axiome d'idéalisation : *puisque toute partie finie standard de* $\mathbb{N}$ *est majorée, il existe un entier (nécessairement non standard) qui majore tout les entiers standard.*

En fait, l'axiome d'idéalisation est beaucoup plus général. Il dit, pour reprendre la formulation de A. Deledicq et M. Diener [5], que *si, pour tout ensemble standard fini A, il existe un x où viennent "concourrir" les liens avec tous les éléments y de A, alors il existe un* $x_0$ *"idéal" où viennent concourrir les liens avec tous les standard.* Plus formellement :

*Pour toute formule classique* [4] $F$,

$$[\ \forall^{s\ fini} A\ \exists x\ \forall y{\in}A\ \ F(x,y)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists x_0\ \forall^s y\ \ F(x_0,y)\ ]\ .$$

En remplaçant $F(x,y)$ par :

$$[x{\in}\mathbb{N} \wedge (y{\in}\mathbb{N} \Rightarrow y{<}x)]\ ,$$

on obtient la proposition assurant l'existence de non naïfs dans $\mathbb{N}$ énoncée ci-dessus.

Comme autre conséquence de cet axiome, citons le théorème surprenant assurant l'existence d'un ensemble fini $X_0$ contenant tous les standard de $\mathbb{R}$ (et beaucoup d'autres réels) et que l'on obtient en remplaçant $F(X,y)$ par :

$$[X{\subset}\mathbb{R} \wedge X \text{ est fini} \wedge (y{\in}\mathbb{R} \Rightarrow y{\in}X)]\ .$$

**2.2. Remarque.**

La raison pour laquelle l'axiome d'idéalisation n'est pas en contradiction avec les autres axiomes de ZFC est que toute formule ne pouvant pas s'exprimer sans l'usage du prédicat "standard" n'est pas classique. Elle ne doit donc pas respecter les axiomes de ZFC comme, par exemple, le schéma de substitution dont nous avons parlé plus haut. Plus précisément, la propriété "ne pas être standard" n'est pas une propriété classique. Il n'existe donc pas forcément un ensemble $\{x{\in}\mathbb{N} \mid x$ n'est pas

(4) Par "formule classique", il faut entendre une formule construite dans le système ZFC, c'est-à-dire une formule d'analyse classique.

standard}. Nous avons vu que l'existence de cet ensemble entraînerait une contradiction. Il n'existe donc forcément pas.

**2.3. L'axiome de standardisation.**

Si on ne peut en général pas collectiviser les éléments d'un ensemble standard $E$ vérifiant une propriété non classique $P$, l'axiome de standardisation assure néanmoins l'existence d'un ensemble standard $A$ dont les éléments standard sont exactement ceux de $E$ vérifiant $P$ ; on peut montrer (en utilisant l'axiome de transfert que nous présenterons à la section 2.4) que cet ensemble est unique, on le note :

$$A = {}^{S}\{ x\in E \mid P(x) \}$$

et on appelle l'ensemble $A$ le standardisé de $\{ x\in E \mid P(x) \}$.

Voici l'énoncé exact de l'axiome da standardisation :

*Pour toute formule $F$ (classique ou non),*
$[\forall^{S} E \ \exists^{S} A \ \forall^{S} x \ ( x\in A \Leftrightarrow x\in E \wedge F(x) ) ]$.

Par exemple, l'ensemble :

$${}^{S}\{ x\in \mathbb{R} \mid -2-\varepsilon \leq x \leq 2+\varepsilon \}$$

où $\varepsilon$ est un i.p positif est l'intervalle [-2,2] puisque c'est l'unique ensemble standard dont les éléments standard vérifient la propriété citée. De même, l'ensemble :

$${}^{S}\{ x\in \mathbb{N} \mid x \text{ est standard} \}$$

est exactement l'ensemble $\mathbb{N}$.

**2.4. L'axiome de transfert.**

L'axiome de transfert permet de déduire des propriétés concernant les non standard en se basant sur ces propriétés sur les standard :

*Pour toute formule classique F,*

$$\forall^{S} z_1, z_2, \dots, z_n \ [ \forall^{S} x \ \ \mathrm{F}(x, z_1, z_2, \dots, z_n ) \Leftrightarrow \forall x \ \ \mathrm{F}(x, z_1, z_2, \dots, z_n ) ].$$

Cet axiome permet, par exemple, d'affirmer que deux ensembles standard sont égaux s'ils ont mêmes éléments standard. En effet, en remplaçant $\mathrm{F}(x,A,B)$ par $(x\in A \Leftrightarrow x\in B)$, on obtient :

$$\forall^{S} A,B \ [ \forall^{S} x \ (x\in A \Leftrightarrow x\in B) \Leftrightarrow \forall x \ (x\in A \Leftrightarrow x\in B) ].$$

Une autre conséquence de cet axiome est que si une fonction standard est continue en chaque point standard, elle est continue partout.

**2.5. Remarque.**

Un résultat important de logique nous assure qu'un théorème classique démontré en analyse non standard (c'est-à-dire en utilisant le prédicat standard et les trois nouveaux axiomes) possède une démonstration classique (c'est-à-dire n'utilisant que la théorie des ensembles ZFC). Cela a d'ailleurs permis de fournir de nouveaux théorèmes classiques par le biais de l'analyse non standard.

## 3 — Comment fonctionne en pratique l'analyse non standard ?

**3.1. Règles de calcul.**

Pour pouvoir utiliser les nombres infiniment petits et infiniment grands [5], il faut d'abord établir certaines règles de calcul. Nous les présentons sous forme de tableaux. L'abréviation "app." signifie *appréciable* c'est-à-dire ni i.p, ni i.g.

(5) Pour les définitions de ces termes, nous renvoyons à la section 1.

$x + y$

| $y$ / $x$ | i.p | app. | i.g |
|---|---|---|---|
| i.p | i.p | app. | i.g |
| app | app. | app. ou i.p | i.g |
| i.g | i.g | i.g | ? |

$x \cdot y$

| $y$ / $x$ | 0 | i.p $\neq$ 0 | app. | i.g |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| i.p $\neq$ 0 | 0 | i.p | i.p | ? |
| app. | 0 | i.p | app. | i.g |
| i.g | 0 | ? | i.g | i.g |

$x / y$

| $y$ / $x$ | i.p $\neq$ 0 | app. | i.g |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| i.p $\neq$ 0 | ? | i.p | i.p |
| app. | i.g | app. | i.p |
| i.g | i.g | i.g | ? |

Démontrons par exemple que la somme de deux i.p est un i.p. Nous allons utiliser la définition d'i.p et le fait rassurant et facilement démontrable que tout "objet" construit classiquement et univoquement à partir d'objets standard est standard; en particulier, nous utiliserons le fait que si $x$ est standard, alors $x/2$ l'est aussi.

Soit $\varepsilon$ et $\varepsilon'$, deux réels i.p. Il faut prouver que :

$$\forall^{s} x \in \mathbb{R}^{*} \quad |\varepsilon + \varepsilon'| < |x|.$$

Soit donc $x \in \mathbb{R}^{*}$ un réel standard ; $x/2$ est également standard et puisque $\varepsilon$ et $\varepsilon'$ sont i.p,

$$|\varepsilon| < |x/2| \text{ et } |\varepsilon'| < |x/2| .$$

D'où

$$|\varepsilon+\varepsilon'| \leq |\varepsilon| + |\varepsilon'| < 2\,|x/2| = |x| .$$

Par contre, nous ne pouvons rien dire *a priori* du produit d'un i.p et d'un i.g. Il pourrait être app. comme $(1/\omega)\cdot\omega$ , i.p comme $(1/\omega^2)\cdot\omega$ ou i.g comme $(1/\omega)\cdot\omega^2$ .

Ce cas correspond au cas d'indétermination que l'on note $( 0 \cdot \infty )$ en analyse classique. Toutefois, le produit de 0 et d'un infiniment grand est bien sûr égal à 0 puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \cdot x = 0.$$

De ces règles de calcul on peut déduire, par exemple, la propriété de transitivité de la relation "être infiniment proche". En effet, si $x \simeq y$ et $y \simeq z$ , alors $x \simeq z$ puisque si $x = y + \varepsilon$ et $y = z + \varepsilon'$, alors :

$$x = z + \varepsilon + \varepsilon'$$

où $\varepsilon + \varepsilon' \simeq 0$ .

### 3.2. La continuité.

**Définition 1.** Soient $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x$ un réel ; on dit que $f$ est *S-continue en $x$* si :

$$\forall y \in \mathbb{R}\ [\, x \simeq y \Rightarrow f(x) \simeq f(y)\,]$$

c'est-à-dire si :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ [\alpha \simeq 0 \Rightarrow f(x+\alpha) \simeq f(x)\,].$$

Cette définition de S-continuité n'est pas équivalente à la définition classique de continuité. Montrons-le par quelques exemples:

1°. La fonction réelle définie par $f(x) = 1/x$ (voir Fig. 1) est continue (au sens classique) sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas S-continue sur $\mathbb{R}^*$. En effet,

$$f(\varepsilon + \alpha) - f(\varepsilon) = \frac{-\alpha}{\varepsilon(\varepsilon + \alpha)}$$

et si $\alpha \simeq \varepsilon$,

$$f(\varepsilon + \alpha) - f(\varepsilon) = -1 / 2\varepsilon \simeq \infty .$$

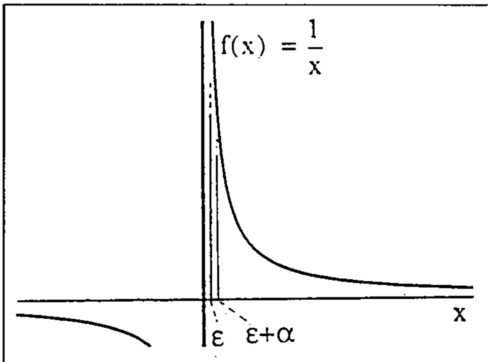


Fig.1

2°. La fonction réelle définie par $g(x) = -\varepsilon$ si $x<0$ et par $g(x) = \varepsilon$ si $x\geq 0$ , est discontinue (au sens classique) en 0, alors qu'elle est S-continue sur $\mathbb{R}$.

On pourrait néanmoins prouver que, pour les fonctions f standard et les réels $x$ standard, la continuité en $x$ et la S-continuité en $x$ sont des concepts équivalents.

Montrons maintenant sur un exemple comment fonctionne la définition de S-continuité dans une démonstration.

**Proposition.** *La composée de deux fonctions $f$ et $g$ S-continues sur $\mathbb{R}$ est S-continue sur $\mathbb{R}$.*

**Démonstration.** Soient $x$ et $y$ deux réels. Si $x \simeq y$ , alors par S-continuité de la fonction $f$,

$$f(x) \simeq f(y)$$

et par S-continuité de la fonction g ,

$$g(f(x)) \simeq g(f(y)).$$

On voit que la définition de S-continuité est plus facile à manipuler que la définition classique de continuité qui exige que l'on jongle avec les quantificateurs en ε , δ. Toutefois, ne nous réjouissons pas trop vite car nous avons vu que les notions de S-continuité et de continuité ne sont pas équivalentes. Et si l'on veut définir cette dernière notion avec les outils de l'analyse non standard, cela n'est pas aussi simple ; ceux qui n'ont pas lu la partie de cet article sur l'axiomatique IST ne pourront d'ailleurs pas comprendre la définition que nous donnons ci-dessous car elle utilise l'axiome de standardisation (ils peuvent passer directement à la section 4 concernant les “faits choquants”).

Pour $f$ et $x$ standard, on peut prouver que la notion de S-continuité est équivalente à la notion classique de continuité. Nous voudrions définir la notion de continuité avec les outils de l'analyse non standard de telle façon que, d'une part, elle prolonge celle de S-continuité, d'autre part, elle soit équivalente à la notion classique quels que soient $f$ et $x$ . En fait, les axiomes de standardisation et de transfert nous permettent de le faire en posant :

**Définition 2.** Soient $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x$ un réel ; on dit que $f$ est *continue en $x$* si :

$(f,x) \in {}^{S}\{(g,y) \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mid g \text{ est S-continue en } y\}$

où $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, on peut facilement prouver que cette définition est équivalente à la définition classique. En effet, on peut transformer l'affirmation (admise plus haut) :

$$\forall^{S} f \ \forall^{S} x \ [f \text{ est S-continue en } x \Leftrightarrow f \text{ est continue en } x \text{ (au sens classique)}]$$

en

$$\forall^{S} f \ \forall^{S} x \ [(f,x) \in S = {}^{S}\{(g,y) \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mid g \text{ est S-continue en } y\} \Leftrightarrow f \text{ est continue en } x \text{ (au sens classique)}]$$

Puisque S est un ensemble standard, on peut maintenant appliquer l'axiome de transfert, ce qui donne

$$\forall f \ \forall x \ [(f,x) \in S = {}^{S}\{(g,y) \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mid g \text{ est S-continue en } y\} \Leftrightarrow f \text{ est continue en } x \text{ (au sens classique)}]$$

c'est-à-dire, par définition,

$$\forall f \ \forall x \ [f \text{ est continue en } x \text{ (au sens non standard)} \Leftrightarrow f \text{ est continue en } x \text{ (au sens classique)}].$$

Cette façon de définir une notion en se servant de l'axiome de standardisation est courante en analyse non standard. Dans ce cas-ci, elle permet de parler de la continuité de fonctions standard en des points non standard ou de la continuité de fonctions non standard. Illustrons cela par un exemple.

Comment déterminer si la fonction réelle non standard définie par $f(x) = \omega x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ ? Pour le savoir, on procède comme suit.

Soit la fonction $f_a(x) = ax^2$ où $a$ est un réel standard. On a :

$$\forall^{S} x \in \mathbb{R} \ \ f_a(x+\alpha) - f_a(x) = a.(\alpha^2 + 2\alpha x) \simeq 0.$$

Donc

$$\forall^{S} x \in \mathbb{R} \ \ f_a \text{ est S-continue en } x,$$

autrement dit

$$\forall^{S} x \in \mathbb{R} \ \ (f_a,x) \in {}^{S}\{(g,y) \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mid g \text{ est S-continue en } y\}$$

et ceci est vrai pour tout a standard. En appliquant l'axiome de transfert à

$$\forall^{S} a \in \mathbb{R} \ [\forall^{S} x \in \mathbb{R} \ \ (f_a,x) \in {}^{S}\{(g,y) \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mid g \text{ est S-continue en } y\}],$$

on trouve :

$$\forall^{S} a \in \mathbb{R} \ [\forall x \in \mathbb{R} \ \ (f_a,x) \in {}^{S}\{(g,y) \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mid g \text{ est S-continue en } y\}]$$

et en appliquant une seconde fois le transfert, on obtient :

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ (f_a, x) \in^{S} \{(g,y) \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mid g \text{ est S-continue en } y\},$$

c'est-à-dire

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ f_a \text{ est continue en } x.$$

Et donc, la fonction $f = f_\omega$ est continue sur $\mathbb{R}$.

A titre d'exercice, nous proposons au lecteur de déterminer si les fonctions réelles définies par $g(x) = x^2$ et $h(x) = \omega x^2$ sont S-continues et en quels points.

## 4 — Faits choquants.

Bien que nous ayons des éléments qui nous permettent de contourner certains paradoxes, il n'en reste pas moins des faits qui choquent le bon sens.

**4.1.** Puisque 0 est standard et que, en ajoutant 1 à un standard, on obtient un standard ; puisque, en outre, il existe des naturels non standard (mais finis comme tout naturel [6]) et que, en enlevant 1 à un naturel non standard, on retrouve un non standard, comment peut-on imaginer que ces deux classes d'éléments ne se rencontrent pas ?

**4.2.** Si les standard de $\mathbb{N}$ formaient un ensemble, il serait infini car en bijection avec une de ses parties propres ; en effet, la bijection envoyant $n$ sur $n$+1 conviendrait. Mais tous les standard de $\mathbb{N}$ appartiennent à l'ensemble fini $[0,N]$ où $N$ est infiniment grand (mais fini). G. Reeb dit, à ce propos, que l'infini potentiel se laisse enfermer dans un fini formel.

**4.3.** De même, il existe un ensemble fini contenant tous les réels standard de [0,1] [7] (et beaucoup d'autres éléments). Pourtant si l'ensemble des standard de [0,1] existait, il serait infini car en bijection avec une de ses parties propres, par exemple l'ensemble des standard de [0,1/2], par la bijection envoyant $x$ sur $x/2$. Ceci illustre que l'on ne peut pas considérer les standard de [0,1] comme constituant un ensemble.

**4.4.** *Soit a,b, deux réels standard distincts. On appelle découpage infinitésimal de [a,b], une suite $(x_0, x_1, \dots, x_N)$ telle que*

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_N = b$$

*et*

$$\forall i = 0, 1, \dots, N\text{-}1\ \ x_i \simeq x_{i+1}.$$

Un tel découpage existe ; pour le construire, il suffit de partager [a,b] en $N$ intervalles égaux où $N$ est un naturel infiniment grand. Mais l'existence de ce découpage échappe à notre intuition. Par transitivité de la relation $\simeq$ , on a envie d'écrire :

$$x_0 \simeq x_1 \simeq x_2 \simeq \dots \simeq x_N \Rightarrow x_0 \simeq x_N \Rightarrow a \simeq b.$$

En fait les points de suspension supposent que l'on applique la récurrence à la propriété $P(x) = (x_0 \simeq x)$. En effet, on a :

$$x_0 \simeq x_1 \text{ et } [\forall i\ \ (x_0 \simeq x_i \Rightarrow x_0 \simeq x_{i+1})],$$

on a donc envie de conclure : $\forall i\ \ x_0 \simeq x_i$ . Or, comme la propriété $P$ n'est pas classique, nous ne pouvons appliquer la récurrence que sur les standard et tirer comme conclusion : $\forall^{S} i\ \ x_0 \simeq x_i$.
Mais même après avoir mis le doigt sur l'erreur de raisonnement, le malaise subsiste : comment imaginer un tel découpage ?

(6) Tous les naturels sont finis même les infiniment grands. En cela, la terminologie "infiniment grand" n'est pas tellement bien choisie ; il aurait été préférable de dire "très grand" ou "idéalement grand".

(7) On peut le prouver en utilisant l'axiome d'idéalisation.

## Bibliographie commentée.

[1] A. Deledicq, *ABC de calcul infinitésimal*, Irem de l'Université de Paris 7, Octobre 89.

Cet article est sous-titré *Mémento d'analyse non standard pour ceux qui voudraient s'en servir sans en devenir des spécialistes*. Un article de vulgarisation pour s'accoutumer à l'analyse non standard avant d'aller plus loin...

[2] G. Reeb, *Analyse non standard (Essai de vulgarisation)*, APMEP, 328 (1981), 259-273.

Un article de vulgarisation écrit par un des pères de l'école française d'analyse non standard. Il y parle des naïfs et de l'utilisation que l'on peut faire de l'analyse non standard en probabilité, en analyse et en équations différentielles.

[3] F. Diener, M. Diener, *Les applications de l'analyse non standard*, La Recherche, 206 (1989), 68-83.

Un article plus poussé qui, après une bonne introduction aux nombres non standard, présente les applications de l'analyse non standard entre autres dans le domaine des équations différentielles, en physique et en informatique.

[4] A. Deledicq, *De l'analyse non standard au calcul infinitésimal*, Actes du colloque ICMI sur l'enseignement de l'analyse aux débutants, Namur, Mars 1991 (à paraître).

Une réflexion approfondie sur l'introduction de l'analyse non standard dans l'enseignement élémentaire de l'analyse.

[5] A. Deledicq, M. Diener, *Leçons de calcul infinitésimal*, A.Colin, Paris, 1989.

Cet "ouvrage est directement issu d'un cours dispensé par les auteurs à l'Université de Paris 7". Dans une première partie (de familiarisation), les auteurs énoncent quelques principes d'analyse non standard puis introduisent les S-limite, S-continuité, S-dérivabilité et S-intégrabilité en s'occupant surtout des fonctions standard. La deuxième partie est consacrée aux axiomatiques ZFC et IST. La troisième partie présente les notions de limite, continuité, dérivée, inté-

grale dans le cadre de l'analyse non standard ainsi que quelques grandes applications. Ceux qui s'interrogent sur l'intuition en analyse non standard trouveront également quelques réflexions sur ce sujet dans une annexe.

[6] A. Robert, *Analyse non standard,* Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1985.

L'auteur commence par exposer les notions de base de l'analyse non standard: il s'attache à faire comprendre les trois axiomes IST, puis introduit les concepts de continuité, dérivée et intégrale. La deuxième partie fournit différentes applications de l'analyse non standard "nécessitant une culture mathématique plus étayée". Un bon livre pour commencer à apprendre l'analyse non standard.

[7] F. Diener, G. Reeb, *Analyse non standard,* Hermann, Paris, 1989.

A lire pour s'enfoncer dans l'analyse non standard et comprendre plus à fond ses principes.

[8] H. Barreau, *La mathématique non standard,* Ed. du CNRS, Coll. Fondements des sciences, Paris, 1989.

"Les contributions rassemblées dans ce volume ajoutent à des études sur la préhistoire de l'Analyse non-standard, des discussions philosophiques sur la portée des formalisme usuels, et des travaux mathématiques qui montrent l'intégration des méthodes non-standard dans la mathématique contemporaine et la fécondité de leur application. Pour philosophes, historiens des sciences, mathématiciens."(note de l'éditeur). Certains des articles rassemblés dans cet ouvrage sont néanmoins de lecture malaisée.