ELEMENTS DE REFLEXION SUR L'UTILISATION DES CALCULATRICES PROGRAMMABLES EN PREMIERE S ET EN TERMINALES C ET E

Aline ROBERT
Irem de Paris VII

Dans cet article, nous réfléchissons à l'intégration de certaines utilisations numériques de la calculatrice programmable en première et terminale scientifiques à des processus d'apprentissage de l'analyse, et nous montrons sur des exemples comment on peut concevoir un jeu de cadres

calculatrice → analyse (théorie) → calculatrice.

Introduction

a) Plantons d'abord le décor.

D'après les programmes de première S, E et de terminale C, E et D (cf. annexe 1) les élèves de ces classes doivent savoir utiliser leur calculatrice programmable dans quelques cas précis, et notamment, pour calculer le terme u_n d'une suite donnée, n étant donné.

Au baccalauréat en particulier, on peut demander effectivement un calcul explicite du nième terme d'une suite récurrente. Ainsi, en général, les élèves ont à établir une majoration du type :

$$|u_n - l| < k^n$$

où k, réel strictement inférieur à 1, est indiqué et l est la limite de la suite ; puis ils doivent trouver un indice n à partir duquel cette différence est inférieure à 10^{-p} , enfin il leur est demandé une valeur approchée (à cette même précision) de la limite. C'est pour ce dernier calcul qu'il faut programmer la suite. Souvent p = 3 ou 4, les suites convergent rapidement, et n vaut 4, 5, voire 6, ce qui ne rend même pas tout à fait indispensable l'utilisation de la calculatrice. Pour le programme, il est suffisant d'utiliser une boucle, et un test d'arrêt explicite sur n... De toutes manières, le calcul de cette valeur de n n'est en général pas nécessaire dans la suite du problème.

Les autres utilisations possibles au baccalauréat sont des tableaux de valeurs, ou des calculs directs, approchés, avec une précision demandée ou non. Une estimation de majorant peut être demandée, ou la résolution (en n) d'une inégalité du type $ab^n < K$.

On trouve exceptionnellement dans les énoncés d'examens d'autres utilisations, comme une méthode du trapèze par exemple pour approximer une intégrale, le calcul étant demandé. Dans l'annexe 2, nous indiquons la répartition de ces divers types d'utilisation, dans les douze sujets de baccalauréat choisis pour être publiés dans des annales corrigées (1990).

Par ailleurs, sans que ce soit obligatoire, beaucoup d'élèves ont une calculatrice programmable graphique, et l'utilisent pour tracer des courbes (y compris paramétrées).

Enfin, les élèves utilisent aussi les capacités de mémoire de leur machine (différentes selon les modèles) pour enregistrer des formules (par exemple les formules trigonométriques).

Et du côté de l'enseignant ?

La variété des machines des élèves d'une même classe rend difficile les interventions de l'enseignant. Ou celui-ci connait l'utilisation d'un certain nombre de modèles, ce qui n'est pas difficile mais coûteux en temps, d'autant plus que rien ne s'oublie plus vite qu'une syntaxe particulière, si on ne l'utilise pas quotidiennement. Ou l'enseignant laisse les élèves se débrouiller entre eux sur les questions de "syntaxe" ce qu'ils font apparemment très bien. C'est donc plutôt cette dernière solution qui est adoptée par les enseignants, qui se mêlent assez peu, souvent, des pratiques effectives des élèves en matière de calculatrices. Et le contrat est bien rempli, sans réel problème.

b) Cependant, plusieurs questions se posent, à divers niveaux :

1) L'enseignant peut-il intégrer l'utilisation (numérique, graphique) des calculatrices programmables dans un processus d'apprentissage spécifique ? Autrement dit, peut-il utiliser ce nouvel outil comme levier pour faciliter certains apprentissages ?

2) Y a-t-il des différences d'utilisation selon les classes (notamment littéraires ou scientifiques), selon les élèves (notamment selon le sexe) ?

3) Quels sont les effets actuels de l'introduction (depuis quelques années) de cet outil sur les pratiques des élèves, sur leurs apprentissages ?

En effet les calculatrices représentent un moyen de calcul puissant. Leur utilisation permet aux élèves de résoudre numériquement beaucoup plus de problèmes qu'avant, notamment avec des coefficients numériques "quelconques". Mais cette utilisation, commencée au collège, est assez généralisée pour que même des calculs simples soient faits à la calculatrice. Chaque enseignant a rencontré des élèves qui éprouvent le besoin de sortir leur machine pour effectuer 1000/4...

L'enseignant et le didacticien peuvent alors se demander si le fait de déléguer à une machine toute production numérique a des conséquences (à terme) sur les apprentissages et les performances des élèves.

4) Compte tenu de l'utilisation de la machine comme mémoire, les enseignants sont enfin amenés à réfléchir aux questions suivantes : faut-il,

— donner les formules dans les énoncés

proposés aux élèves,

— changer le type des problèmes que l'enseignant va proposer aux élèves,

— modifier l'enseignement ?

Dans cet article, nous commençons à répondre à certaines questions de la première série, mais en ce qui concerne la seule utilisation numérique, des recherches en cours permettront de compléter ces réponses et d'avancer sur les autres...

Il ne s'agit donc pas ici de proposer de nouvelles activités, nous nous sommes au contraire appuyée sur les propositions déjà existantes (manuels scolaires de première S et terminale C, brochures Irem, travail INRP, articles du bulletin de l'APMEP...)

Nous nous contentons ici de réfléchir aux utilisations de la calculatrice programmable dans le cadre des programmes cités, c'est-à-dire essentiellement dans des problèmes d'approximation (résolutions approchées d'équations, problèmes de convergence de suites et d'approximations de nombres irrationnels, problèmes de calculs approchés d'intégrales...).

I — De l'expérience numérique et la familiarisation aux conjectures, des calculs théoriques au contrôle.

Dans les exercices où l'utilisation de la calculatrice est explicitement proposée par l'énoncé ou par l'enseignant, il s'agit souvent d'une utilisation de type expérience numérique préalable, "pour explorer une situation", ou "pour se donner des idées" a-t-on l'impression. Parfois, se trouvent aussi des propositions d'utilisation de type contrôle, donc il s'agit d'une vérification des calculs *a posteriori* cette fois.

Qu'en est-il ? A quoi peuvent servir ces calculs *a priori, a posteriori* ? Que peuvent-ils enclencher ?

Plus généralement, et pour parler schématiquement, quel "bénéfice" peut-on espérer pour l' apprentissage des élèves ?

a) Les utilisations de type "entrée dans un problème"

Parmi les utilisations numériques des calculatrices programmables, l'examen des programmes de première et terminale déjà cités indique essentiellement, rappelons-le, la programmation des valeurs prises par une fonction donnée, et celle des suites. C'est ce que confirme une rapide analyse de manuels (cf. annexe 3).

Ces calculs débouchent sur des questions sur le comportement global et/ou sur le comportement asymptotique de suites ou de fonctions.

Les situations qui se prêtent à ces expériences numériques ne sont pas si nombreuses : elles se rattachent en général (sans que les deux cas évoqués soient exclusifs l'un de l'autre, au contraire),

— soit à une étude de fonction, modélisant un problème par exemple, et à la résolution (éventuellement qualitative) des questions posées (et transposées dans le modèle),

— soit à un problème d'approximation, que ce soit une résolution approchée d'équation [$f(x) = 0$] , une étude de convergence de suite avec estimation de la limite éventuelle, un calcul approché d'intégrale, ou une approximation d'un nombre irrationnel défini d'une certaine manière.

b) Un exemple banal

On considère la suite récurrente définie par :

$$u_n = 1/2 \,[\, u_{n-1} + (2/u_{n-1}) \,] \;;\; u_1 = 2$$

(ou, pour une autre fonction f donnée, $u_n = f(u_{n-1})$; u_1 donné).

Programmer la suite.

A partir des valeurs affichées par la calculatrice, quelle conjecture a-t-on envie de faire ?

Chercher ensuite si la suite converge et la limite éventuelle (on démontrera les résultats énoncés).

Eventuellement, chercher une valeur approchée de cette limite à une précision donnée.

La calculatrice affiche quelques valeurs qui sont décroissantes, puis stationne à une valeur qui est d'ailleurs la valeur obtenue si on tape $\sqrt{2}$. Les élèves peuvent essayer de démontrer que la suite est décroissante, puis qu'elle converge, et que sa limite est $\sqrt{2}$.

En terminale, les élèves ont le choix entre plusieurs méthodes : reconnaître l'agorithme de Héron, montrer que la suite est minorée (par 0 par exemple), décroissante, donc convergente et utiliser le fait que $l = f(l)$ pour trouver la limite l, ou bien étudier la fonction f sur l'intervalle [1,2] .

Pour chercher une valeur approchée de la limite, ils peuvent essayer de majorer la différence $|u_n - l|$ par une expression numérique dépendant de n, ils en déduisent alors par le calcul une valeur de n à partir de laquelle le calcul de u_n donne l à la précision demandée. En première il faudrait majorer $|u_n - \sqrt{2}|$ par une suite géométrique convergente, nous y reviendrons. De plus, les élèves n'ont pas de moyen commode pour résoudre $a_n < K$ (ils ne connaissent pas encore les logarithmes).

c) Un exemple moins banal (cf. Rogalski 1992)

Voici une suite où la calculatrice s'avère irremplaçable pour avoir une idée du résultat : il s'agit de la suite définie par $u_0 = 1$; $u_1 = 2$ et par :

$$u_n = \frac{u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2}{u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}}$$

Cette suite stationne à partir de $n = 2$, et ceci apparaît à l'écran (en tout cas pour les décimales affichées).

Le constat amène à chercher une démonstration, et les élèves, aidés ou non par l'enseignant, peuvent utiliser à cette fin l'égalité suivante, qui amène immédiatement la conclusion,

$$a/b = c/d = (a + c)/(b + d) .$$

d) A quoi sert l'expérience ? Une condition *"sine qua non"* si l'enseignant veut provoquer une activité de conjecture : laisser le problème ouvert.

Qu'attend l'enseignant de l'utilisation de la machine ? Il peut penser simplement faciliter l'entrée dans un problème par la visualisation de données numériques, peut-être même motiver les élèves grâce à une certaine familiarisation avec la situation proposée.

Il peut aussi faire utiliser l'information donnée sur l'écran pour faire émettre par les élèves une conjecture, devinée à partir des résultats affichés, sur des allures de fonctions ou de suites (monotonie en particulier, peut-être majorations, voire maxima), ou sur des limites (existence, valeur, vitesses de convergence)...

Ainsi, dans une fiche "méthode", sur le thème "comment étudier le comportement à l'infini d'une suite", un nouvel ouvrage de première S indique comme première méthode d'étude d'une suite :

"programmez sur votre calculatrice le calcul des termes de la suite, u_1 , u_2 , ... u_n et former une conjecture pour :

— l'existence éventuelle d 'une limite

— la valeur de la limite éventuelle."

Cette deuxième utilisation peut en effet favoriser le questionnement, et peut-être, par là même, la prise de sens, dans la mesure où ce n'est pas de la calculatrice mais de l'élève que peuvent venir l'interprétation de ce qui est affiché.

Mais, pour qu'il y ait conjecture, questionnement réel donc, il est indispensable que l'énoncé ne reprenne pas en main l'élève avec un "montrer que la suite est croissante" par exemple. Alors l'effet conjecture serait presque nul, voire nul. Car l'élève n'aurait plus besoin de transformer les données du calcul en une question qu'il peut tenter de résoudre avec les moyens mathématiques à sa disposition. Or quel est l'intérêt des conjectures, sinon cette transformation ? Car c'est alors que l'élève doit se servir de ses connaissances avec tout leur sens, pour concevoir et poser sa question, puis la résoudre, avec un certain enjeu, puisqu'il n'est pas sûr de ce qu'il essaie de montrer, du moins telle est notre hypothèse.

Cette restriction n'est pas toujours respectée dans les énoncés proposés aux élèves, ce qui affaiblit nous semble-t-il, la portée éventuelle de l'utilisation de la calculatrice avec un objectif d'apprentissage de l'analyse. Cependant il est des cas où c'est bien difficile de laisser aux élèves un problème ouvert, et notamment en première S comme nous le développons ci-dessous.

Une autre possibilité est de faire réfléchir les élèves aux différences éventuelles entre :

— le résultat d'un calcul théorique du rang à partir duquel on peut remplacer une limite par la valeur de u_n (à une précision donnée)

— et de ce qui s'affiche à la calculatrice.

Si la suite semble "stationner" plus tôt sur l'écran par exemple, ce peut être parce que la majoration utilisée pour $|u_n - 1|$ n'est pas très fine.

Cela permet de réfléchir aux pertes d"information introduites par certaines majorations, et plus généralement par certaines conditions suffisantes.

e) les premières S

Précisément il est souvent difficile à ce niveau, compte tenu des programmes, de laisser aux élèves cette tâche, de passer d'une question ouverte à la démonstration. Et surtout en ce qui concerne les suites.

En effet, d'une part si la croissance des suites est bien inscrite au programme, elle ne peut pas servir à démontrer une convergence car le théorème des suites monotones bornées lui n'y est pas. Ce type de conjecture n'a donc pas beaucoup d'intérêt à ce niveau, elle ne sera même pas faite.

D'autre part, le seul outil à la disposition des élèves, pour démontrer une convergence, la comparaison de $|u_n - l|$ à une suite géométrique, l étant la valeur supposée de la limite. Il s'agit donc d'inventer la suite de comparaison, et cela est d'autant moins aisé que ce n'est pas toujours la suite de comparaison la plus naturelle.

Dans l'exemple ci-dessus, si l'enseignant veut faire approximer $\sqrt{2}$ par un algorithme du type Newton (ou Héron, ce qui est pareil), les majorations qui viennent naturellement font intervenir des suites

$$(1/\sqrt{2})^n$$

et les élèves vont perdre une partie de la richesse de la situation s'ils sont amenés à remplacer cette suite par une suite géométrique majorante, qui converge plus lentement.

De plus, pour arriver à ces majorations, les élèves doivent par exemple passer par l'égalité :

$$u_n - \sqrt{2} = (1/2u_{n-1})[u_{n-1} - \sqrt{2}]^2$$

Il est bien entendu difficile de laisser les élèves trouver seuls cette égalité (ou une égalité équivalente) ! Les auteurs de manuels proposent donc dans leurs énoncés différentes stratégies.

Cependant, presque toujours, après une familiarisation sur calculatrice qui n'a pas beaucoup d'effets sur le problème, les auteurs donnent les majorations utiles aux élèves. Ils les guident ainsi, de vérification en vérification vers la solution, sans leur laisser aucune autonomie. Mais on comprend très bien pourquoi. Le problème de la suite majorante qui n'est pas géométrique est réglé soit par introduction d'une suite auxiliaire, soit par majoration de la suite majorante par une suite géométrique. Il y a là nécessité de détours astucieux qui obscurcissent encore la route vers la solution.

En fait, dans ce type d'exercices, les élèves finissent par juxtaposer une activité de découverte sans beaucoup d'effets, et une activité de calculs théoriques, sans beaucoup de sens global pour eux...

f) les utilisations *a posteriori*

Nous ne ferons que citer pour mémoire, bien qu'elle soit hors de notre strict propos, l'utilisation graphique, pour vérifier des tableaux de variation et des graphes, puisque nous nous centrons sur l'utilisation numérique. Nous n'abordons pas dans ce paragraphe des contrôles liés aux limites de la machine, nous cherchons à déterminer si l'usage numérique d'une calculatrice peut aider les élèves à revenir sur leur démarche, à se contrôler.

Il s'agit donc d'un usage *a posteriori* par rapport à des activités d'analyse.

Plusieurs pistes : tout résultat un peu étonnant conduit assez naturellement à l'idée de contrôle ; de même tout calcul long, en plusieurs étapes, conduit aussi assez naturellement à "vérifier" ; un calcul de limite peut aussi donner lieu à vérification, en prenant des grandes valeurs de x quand x tend vers l'infini, des petites valeurs de x pour vérifier des comportements au voisinage de zéro... ; par contre il est plus difficile de faire revenir les élèves sur la démarche elle-même, car la calculatrice ne peut que donner une vérification numérique, et ne fait pas forcément revenir sur le principe de ce calcul.

Dans tout ce qui est développé jusqu'ici la calculatrice initie ou provoque une démarche théorique, ou encore la clôt. Les enseignants peuvent aussi essayer de provoquer une utilisation un peu différente, souvent intéressante sur le plan strictement cognitif, du type aller-retour ou jeu de cadres(1), comme nous allons l'expliquer maintenant.

II — Calculatrices et jeux de cadres

Nous pensons en effet qu'une bonne occasion d'apprentissage se présente lorsque dans leurs activités les élèves sont amenés à faire un véritable changement de cadres, ici par exemple un "aller retour" calculatrice → analyse (théorie) → calculatrice. C'est à la dynamique liée au changement de point de vue, au transfert de résultats et de significations que nous attribuons un rôle positif dans la construction des connaissances avec leur sens.

(1) On appelle cadre un domaine mathématique d'intervention (registre si on préfère) d'un concept, d'une notion. Par exemple le cadre numérique ou le cadre formel sont deux registres possibles d'interventions des fonctions. De même en géométrie, on distingue les cadres vectoriels, ponctuels (affines) avec ou sans mesure, analytiques.
R. Douady (1986) a développé l'idée suivante : les problèmes où les élèves doivent travailler dans deux cadres, en "passant" de l'un à l'autre (changement de cadres), sont bien adaptés à une certaine prise de sens par les élèves des notions correspondantes.

Y a-t-il donc des problèmes liés à la calculatrice qui amènent les élèves à se poser une question concernant ce qu'ils lisent sur l'écran, qui nécessitent de faire une incursion dans la théorie pour revenir à la calculatrice ?

Nous en avons étudié deux types :

— problèmes liés à la conception de tests d'arrêt dans un petit programme,

— problèmes liés à une interprétation non immédiate de ce qui est lu sur l'écran : notamment si ce qu'on lit n'est pas fiable. C'est le cas par exemple s'il y a un dépassement de capacités dans le calcul demandé, d'où une nécessité d'interprétation soit pour rejeter l'information, soit pour en garder une partie s'il y a lieu, soit pour changer de stratégie par rapport à la calculatrice.

Voici des exemples :

a) Premier type

— Programmer une suite monotone, de limite L, pour obtenir la valeur approchée de la limite à 10^{-9} près (si la précision de la machine est justement 10^{-9}).

En effet les élèves ont tendance à proposer d'abord comme test d'arrêt $|u_n - u_{n-1}| < 10^{-9}$. Or, si la suite est monotone, ce test n'est pas toujours valide : seul un calcul théorique permet d'être sûr que si la différence de deux termes consécutifs est inférieure à une précision donnée, la différence entre le dernier terme affiché et la limite est aussi inférieure à cette précision...

Cet exercice fait réfléchir, nous semble-t-il, à la signification de certaines majorations : que veut dire $|u_n - u_{n-1}| < 10^{-9}$?

Cela permet aussi de poser le problème du rapport entre cette différence et la différence $| L - u_n |$.

L'enseignant prépare ainsi, pour les élèves qui continueront en mathématiques, l'introduction du critère de Cauchy...

Certains élèves restent sceptiques devant le fait que les termes successifs d'une suite peuvent être "très proches" sans être pour autant près de la limite (qui n'existe même pas forcément), nous avons pu le constater. L'enseignant peut alors proposer un des deux exemples explicites suivants (deuxième type), où on a bien $| u_n - u_{n-1} | < 10^{-9}$ à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que les valeurs affichées ne changent plus à partir de ce rang, et où pourtant ce n'est pas une valeur approchée de la limite qui est affichée.

b) Deuxième type

Exemples de suites qui "stationnent" à partir d'un certain rang à la calculatrice et qui ne convergent pas ou qui convergent vers une limite mais dont une valeur approchée (avec une précision convenable) n'est pas la valeur affichée :

$$u_{n+1} = u_n + (1 - u_n)^{12n/(n+3)} \quad , u_1 = 0{,}9 \, ,$$

$$u_{n+1} = u_n + \exp\{ -u_n \, (10n)/(n+9) \} \, , u_1 = 0{,}9 \, .$$

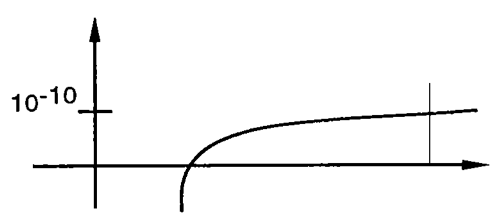
La première suite converge vers 1 (elle est croissante et majorée par 1, un calcul à la limite donne L = 1). Or la calculatice stationne à 0,9010160431...

La deuxième suite tend vers $+ \infty$; elle est croissante, et par l'absurde ne peut converger vers une limite finie. Or la calculatrice stationne à 5, 006853147.

En réalité les suites ont été construites de la manière suivante (cf. Rogalski (1992)) : on ajoute à chaque terme un facteur beaucoup trop petit à partir d'un certain rang pour que la machine puisse en tenir compte (inférieur à 10^{-12}). Mais la somme de ces termes finit soit par converger vers un nombre plus grand que les premiers termes étudiés, soit même par diverger. Car la "fonction" f_n , qui définit le nième terme à partir du précédent, se rapproche de $y = x$ ou même l'atteint finalement dans le premier cas. Il y a donc ainsi convergence ou non.

Seulement comme la machine n'a très vite pas enregistré ces facteurs, elle stationne à partir du moment où justement elle ne peut plus en tenir compte, et rien ne change après : puisque ce qui croît, ce n'est pas chaque terme mais leur somme, qui en fait n'est jamais même construite par la machine.

La même idée peut se traduire avec des fonctions : dans la recherche de racine d'une équation f(x) = 0, on peut chercher un exemple où une certaine valeur affichée par la machine rend f(a) inférieure à 10^{-9}, alors même que a est "éloigné" de la racine...



D'autres exemples peuvent être pris !

Détaillons le premier exemple, en le replaçant dans le contexte d'une classe (terminale C) : il s'agit d'étudier la suite donnée, en utilisant la calculatrice.

Les élèves programment leur suite et trouvent que leur calculatrice stationne, ils déduisent d'abord qu'il y a une limite, qui est le nombre affiché sur l'écran.

Première question possible : *est-ce que ce qu'ils lisent sur l'écran est la limite ou une valeur approchée de la limite ?*

Les élèves vont hésiter : d'eux-mêmes, ou sur suggestion de l'enseignant, ils peuvent alors essayer de vérifier "théoriquement" que la suite converge et en chercher la limite, pour savoir ce que représente la valeur affichée.

Le même travail peut d'ailleurs être enclenché directement, sans la première question (vérifier...)

La croissance de la suite, ainsi que le fait qu'elle est majorée par 1, se vérifient gréce à l'inégalité (que l'on peut indiquer ou non) :

$$(*) \quad 0 < u_n < 1 \text{ (pour tout n).}$$

Pour démontrer cette inégalité (*), on peut utiliser un raisonnement par récurrence :

l'inégalité est vraie pour u_1 ; supposons la vérifiée pour u_n, alors

$$0 < (1 - u_n) < 1 ,$$

soit :

$$0 < (1 - u_n)^{12n/(n+3)} < (1 - u_n) < 1 ,$$

car $12n/(n + 3) > 1$,

soit $u_n < u_{n+1} < u_n + (1 - u_n)$, d'où l'inégalité attendue $0 < u_{n+1} < 1$, et d'ailleurs directement la croissance de la suite.

La suite admet donc une limite, et par continuité, cette limite l vérifie :

$$l = l + (1 - l)^{12} ,$$

soit $l = 1$.

Conflit ! Qui croire, la calculatrice ou le "calcul" ? La discussion est ouverte... C'est là que les élèves doivent réfléchir, pour saisir que ce n'est pas parce que des nombres s'affichent comme identiques sur la calculatrice qu'ils sont égaux.

Ils rentrent donc dans une problématique de l'approximation : ce que la machine indique, c'est que les premières décimales des nombres qu'on lui a donné à calculer sont identiques, un point c'est tout. Il se peut ou bien que les calculs proposés soient entachés d'erreurs, ou bien que les nombres diffèrent pour les décimales ultérieures à celles affichées...

Les élèves peuvent être guidés par le résultat de leur calcul pour comprendre qu'ici, à partir d'un certain rang (celui où la suite devient stationnaire à l'écran), les quantités rajoutées à u_n pour calculer u_{n+1} ne sont pas prises en compte par la machine (trop petites par rapport à u_n) : la suite des valeurs calculées par la machine est effectivement stationnaire !

Ainsi ce qui peut être à la charge des élèves dans ce "jeu de cadres" est d'une part l'étude de la suite, sans l'aide de la calculatrice, et d'autre part l'interprétation de ce qui est affiché à l'écran, pour résoudre une contradiction apparente, le rôle de l'enseignant étant d'abord de garantir l'émergence de la contradiction... Le cas échéant, l'enseignant peut aider les élèves récalcitrants par des illustrations graphiques (cf. ci-dessus).

c) un exemple d'interprétation de résultat, suite à un dépassement de capacité, tiré du livre de l'Irem de Strasbourg (première S) (cf. annexe 4).

Les élèves ont à calculer $9x^4 - y^4 + 2y^2$ pour $x = 10864$ et $y = 18817$. Les calculatrices de la classe n'affichent pas les mêmes résultats.

Il s'agit donc de comprendre ce qu'affiche la calculatrice, suite à un calcul qui dépasse les capacités de la machine. Deux alternatives sont proposées aux élèves, ils doivent trouver la bonne explication.

— Première explication proposée :

Les élèves peuvent constater que $\sqrt{3} = y/x$ (à la calculatrice) ; donc $(y/x)^4 = 9$, par suite la valeur cherchée est

(0) + 708 158 978

(ce qui est faux).

— Deuxième explication proposée :

Les élèves sont invités à remarquer la factorisation suivante :

$$9x^4 - y^4 = (3x^2 - y^2)(3x^2 + y^2).$$

Ils sont alors invités à vérifier que s'ils remplacent x et y par des entiers tels que :

$$(3x^2 - y^2) = -1 \quad (**)$$

alors le nombre à calculer initialement vaut 1. Or les entiers donnés vérifient justement la condition (**), et par ce cheminement les élèves peuvent conclure que la quantité initiale vaut 1 (ce qui est juste).

Ici la résolution repose sur une réfléxion sur le domaine de validité des calculs affichés : il faut réaliser que, pour des nombres de l'ordre de 10^4, si les puissances quatrièmes ne sont pas prises en compte de manière exacte par la machine, les carrés eux (puissances deux) sont corrects.

d) Pour terminer, nous donnons un petit schéma de problème d'analyse qui généralise ce qui précède. Sans doute serait-il avantageux de le proposer en terminale, après avoir rencontré une situation du type des exemples précédents (b). Ce problème a été conçu selon une technique bien connue des mathématiciens et des didacticiens, à savoir transformer ce qui est d'abord perçu comme une gêne en un nouveau problème. On peut adapter aux élèves le problème en choisissant la fonction f plus ou moins "facile" (il n'est pas question de laisser la fonction f non précisée).

Enoncés "génériques" (à adapter à chaque classe, en choisissant f, u_0 ...).

1) Suite à un calcul, la calculatrice affiche deux valeurs X et Y identiques (par exemple avec 9 décimales). Que peut-on dire de X et Y ?

2) Vous programmez une suite récurrente en faisant afficher les termes successifs. A partir d'un certain rang, la machine "stationne", c'est-à-dire qu'elle affiche toujours la même valeur. Que pouvez-vous en déduire ?

3) Résolution de $f(x) = 0$ par la méthode de Newton et calculatrice.

a) Rappeler la définition de u_n en fonction de u_{n-1}.

b) On suppose qu'on a localisé une racine l entre a et b, tels que $f(a)f(b) < 0$.

Montrer que si on choisit une valeur initiale u_0 dans [ab] , telle que $f(u_0)\ f''(u_0) > 0$, la racine l peut être approximée par la méthode de Newton avec la précision voulue.

Est-ce que dans ce cas, si on programme la calculatrice, les termes affichés vont stationner ? Pourra-t-on déduire que ce qui est lu est une valeur approchée de la limite ?

4) Mêmes questions avec la méthode des sécantes (à rappeler).

5) Résolution de f(x) = x par les approximations sucessives.

On a cette fois localisé un point fixe dans [ab].

a) Montrer que, si f est stable sur [ab], dérivable sur [ab] et vérifie $|f'(x)| \leq k < 1$ sur [ab], le procédé s'applique pour toute valeur initiale u_0 de [ab].

On programme la suite définissant la racine. Que va-t-on constater si on fait défiler les valeurs des termes successifs à l'écran ?

b) Peut-on déduire du fait que la calculatrice affiche une valeur constante à partir d'un certain rang une valeur approchée de la racine (et avec quelle précision l'obtient-on ainsi) ?

Il est intéressant de choisir une fonction au moins deux fois continument dérivable et telle que f'(x) et f''(x) ne s'annulent pas et gardent un signe constant sur l'intervalle considéré. Cela garantit la convergence de la suite définie par la méthode de Newon (alors monotone bornée), si on choisit bien la valeur initiale, ce qui sera à la charge de l'enseignant.

Exemples de fonctions possibles :

On peut reprendre l'exemple de $\sqrt{a}$: ($f(x) = x^2 - a$) pour la méthode de Newton, en partant de a.

On peut aussi prendre un exemple où la suite correspondante n'est pas monotone, car on n'est pas dans les conditions intéressantes décrites au début ($f(x) = x - \cos x$).

On peut compléter le problème, en demandant des tests d'arrêt, ou en faisant comparer les méthodes pour une même racine.

De quoi s'agit-il en fait dans ce type de problème ?

Si lors de l'affichage des valeurs des termes d'une suite, la machine "stationne" à une même valeur à partir d'un certain rang, cela n'indique pas nécessairement que la suite considérée converge, ni *a fortiori* que la valeur affichée est une valeur approchée de la limite (cf. exemples précédents). C'est ce fait général, un peu étonnant, qui motive le problème.

Pour pouvoir conclure, c'est-à-dire interpréter ce qui est lu sur l'écran, il faut d'abord chercher par des moyens théoriques si la suite converge ou non.

Ensuite, s'il y a convergence, on ne peut produire que des conditions suffisantes pour que la valeur affichée au moment du stationnement soit une valeur approchée de la limite. Plusieurs types de conditions suffisantes peuvent être émises, qu'il faut tester (le cas échéant).

Deux exemples :

— Ou bien la suite des différences $|u_n - u_{n-1}|$ décroît, à partir d'un certain rang, avec par exemple : $|u_n - l| < |u_n - u_{n-1}|$.

Alors, dès que la différence de deux termes est inférieure à 10^{-9} , cela reste vrai pour les termes suivants, et la différence du dernier terme affiché et de la limite est encore plus petite, donc ce qu'on lit sur l'écran de la calculatrice lorsqu'elle stationne est bien une valeur approchée de la limite.

— Ou bien on a l'inégalité précédente, et c'est $|u_n - 1|$ qui décroît... Alors dès que la différence de deux termes est inférieure à la précision de la machine, la différence entre le dernier terme affiché et la limite reste inférieure à cette précision, donc la calculatrice ne bouge plus et on lit une valeur approchée de la limite.

Dans tous les cas les élèves doivent réflechir à la signification du "stationnement" qui est constaté, et trouver des raisons qui permettent de l'interpréter... De plus, ils établissent des inégalités, non parce qu'elles ont été demandées dans l'énoncé, mais parce qu'elles peuvent expliquer ce qu'ils ont constaté sur l'écran. C'est cette dynamique que nous pensons positive.

Conclusion : une indispensable mais difficile recherche sur le terrain

A l'heure actuelle, au lycée, les élèves scientifiques utilisent en général leur calculatrice, même si c'est de manière différente, semble-t-il, selon les classes, et selon les élèves. Ceci peut être une première raison de faire des recherches sur le terrain, pour apprécier la réalité de cette utilisation au lycée. L'élargissement aux autres sections (littéraires...) est d'ailleurs aussi très intéressant.

Ceci dit, il est encore impossible à notre avis de se prononcer globalement sur les bénéfices potentiels sur l'apprentissage des mathématiques de l'utilisation des calculatrices au lycée dans les sections scientifiques, malgré les quelques petis exemples esquissés ici.

Cela dépend trop fortement de l'enseignant, de l'équilibre entre diverses composantes de son enseignement, de la manière dont il intègre aux activités des élèves l'usage de la machine, et peut-être même des élèves.

En effet, plusieurs attitudes fort différentes peuvent coexister, plus ou moins simultanément, chez les enseignants :

Ou bien ils subissent l'irruption de la calculatrice comme celle d'un moyen de calcul de type quasi "gadget", effet inévitable du "progrès technique", et ils le minimisent le plus possible, en le réduisant en tout cas à une utilisation super-calcul, dans des tâches techniques, peu valorisées souvent.

Cela peut sans doute renforcer l'attitude répandue des élèves, de juxtaposer les activités sur machine et les autres, sans essai de réelle intégration. Car il est bien connu qu'il est difficile pour beaucoup d'élèves de mélanger les genres !

Ou bien les enseignants changent leur enseignement, en le réorganisant autour de l'utilisation des calculatrices, en réduisant peut-être certaines parties théoriques et en réorientant vers beaucoup de modélisations et même vers des mathématiques plus discrètes.

Ou bien encore ils essaient d'optimiser d'un point de vue cognitif l'utilisation de la calculatrice, en la faisant rentrer dans des scénarios didactiques, avec jeux de cadres etc. C'est ce que nous avons esquissé dans cet article.

Ou bien les enseignants profitent des différences entre élèves qui apparaissent à l'occasion du maniement des calculatrices pour différencier leur pédagogie...

Il est vraisemblable que chaque point de vue a ses avantages et ses inconvénients. Seules des recherches approfondies, sur le terrain, permettront d'avancer sur cette estimation. Mais pour apprécier des effets différentiels éventuels des différentes stratégies, cette recherche, déjà difficile, sera rendue encore plus ardue par l'impossibilité d'isoler, dans tout un enseignement cohérent, l'effet de ce qui serait lié plus particulièrement aux choix sur l'utilisation des calculatrices...

Quel que soit le point de vue envisagé, un gros travail reste ainsi à faire !

ANNEXE 1

Les programmes

Seconde

3. Emploi des calculatrices ; impact de l'informatique

Dans les classes de lycée, l'emploi des calculatrices en mathématiques a pour objectif, non seulement d'effectuer des calculs, mais aussi de ***contrôler des résultats, d'alimenter le travail de recherche et de favoriser une bonne approche de l'informatique***. De plus, en analyse, cet usage permet ***d'accéder*** rapidement ***à des fonctions variées*** et à leur représentation graphique.

En seconde, ***les élèves doivent être entraînés à utiliser une calculatrice programmable comportant les fonctions statistiques*** pour effectuer des calculs numériques, pour calculer une moyenne ou un écart-type, et pour programmer, sur quelques exemples simples, le calcul de valeurs numériques d'une fonction d'une variable.

Travaux pratiques :

Exemples simples de programmation de valeurs d'une fonction.

Première S et Terminales C, E

4. Emploi des calculatrices

L'emploi des calculatrices en mathématiques a pour objectif, non seulement d'effectuer des calculs, mais aussi de ***contrôler des résultats, d'alimenter le travail de recherche et de favoriser une bonne approche de l'informatique.***

Les élèves doivent savoir utiliser une calculatrice programmable dans les situations liées au programme de la classe considérée. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir-faire de base et sont ***seules exigibles*** :

— savoir effectuer les opérations arithmétiques sur les nombres et savoir comparer des nombres.

— savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme de la classe considérée et savoir programmer le calcul des valeurs d'une fonction d'une variable permis par ces touches.

— savoir programmer une instruction séquentielle ou conditionnelle et, en classe de Terminale, une instruction itérative, comportant éventuellement un test d'arrêt.

Il est conseillé de disposer d'un modèle dont les caractéristiques répondent aux spécifications et aux objectifs précédents et comportant, en vue de l'emploi dans les autres disciplines et dans les études supérieures, les fonctions statistiques (à une ou deux variables). En revanche, les écrans graphiques ne sont pas demandés.

Première S

Travaux pratiques :

Programmation des valeurs d'une fonction d'une variable.

Terminales C, E

Travaux pratiques :

Programmation des termes d'une suite.

Programmation des valeurs d'une fonction d'une variable.

ANNEXE 2

Répartition des utilisations de la calculatrice dans douze sujets proposés dans un recueil d'annales corrigées de bac (édition 1990)

Trois fois : Question type

1) Montrer que $|u_n - l| < AK^n$ (l, A, K donnés) .

2) Trouver n tel que u_n approche l à une précision donnée (10^{-3}, 10^{-4} en général).

3) En déduire une valeur approhée de la limite à cette précision.

Quatre fois tableau de valeurs d'une fonction.

Une fois une méthode du trapèze (une valeur approchée par cette méthode).

Quelques calculs directs, soit pour majorer $|f'(x)|$, soit pour faire un calcul approché direct à une précision donnée, soit pour résoudre la question type 1).

ANNEXE 3

Quelques exemples de textes d'exercices tirés des manuels. (Les énoncés où l'usage de la calculatrice est sollicité explicitement sont marqués par un trait.)

1° Exprimer la longueur A_nA_{n+1} en fonction de la longueur $A_{n-1}A_n$.

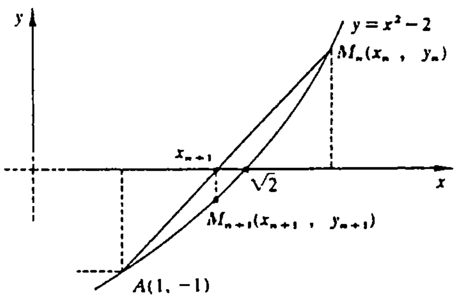
2° On considère la suite (L_n), où L_n désigne la longueur de la ligne polygonale $A_0A_1 \ldots A_n$.
Donner l'expression de L_n en fonction de n et l.
Étudier le comportement à l'infini de la suite (L_n)?

3° Quelles sont les abscisses des points A_{8n}?

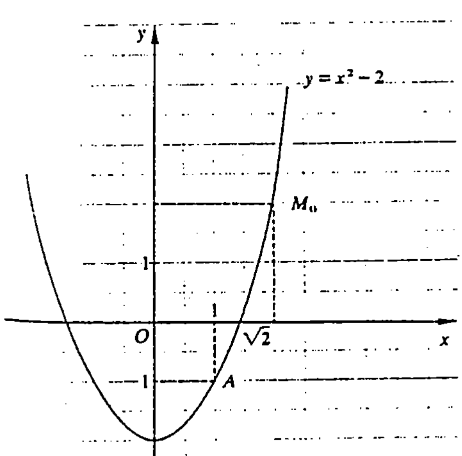
54. Pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$, on utilise l'algorithme défini ci-dessous (analogue à celui utilisé pour l'approximation du nombre d'or) à partir de la courbe représentative de la fonction :

$$x \longmapsto x^2 - 2.$$

La suite de points (M_n) est initialisée au point M_0 de coordonnées (2, 2).



1° Faire un maximum de conjectures sur la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ (position par rapport à $\sqrt{2}$, monotonie des suites (x_{2n}), (x_{2n+1}), etc.



2° Montrer que la suite (x_n) vérifie :

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + 2}{x_n + 1} \end{cases}$$

puis établir les résultats suivants :

- $x_n > 1$ pour tout n ;
- $x_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - x_n)}{x_n + 1}$.

3° Contrôler les conjectures émises en 1° et montrer que :

- $x_{n+1} - x_n = \dfrac{2 - x_n^2}{x_n + 1}$;
- $|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2} |\sqrt{2} - x_n|$;
- $|x_n - \sqrt{2}| \leq \left(\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}\right)^n |\sqrt{2} - x_0|$.

4° En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \sqrt{2}$.
Utilisant $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, estimer la précision obtenue par les termes x_n.

TERRACHER
1ère S
Hachette, Ed. 198?

3. Algorithme de Babylone et méthode de Newton

On se propose d'examiner le fonctionnement de la méthode de Newton dans le calcul approché de la racine carrée d'un réel positif.

Note

Les activités qui suivent concernent le calcul approché de $\sqrt{5}$. Il est clair qu'elles peuvent être adaptées pour un réel positif quelconque.

Activité 3 : « Construction de la suite »

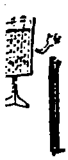
Soit f la fonction $x \longmapsto x^2-5$.

1° Représenter graphiquement la fonction f et contrôler rapidement les résultats suivants :

- sur $]0, +\infty[$, f est strictement croissante, dérivable, à dérivée strictement positive;
- l'équation $f(x)=0$ admet une seule racine sur $]0, +\infty[$ (le réel $\alpha=\sqrt{5}$) que l'on peut localiser dans l'intervalle $]2, 3[$.

2° Montrer que l'algorithme de Newton initialisé en $x_0 \in]2, 3[$ conduit à la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{5}{u_{n-1}}\right). \end{cases}$$



Activité 4 : « Comportement - rapidité de convergence »

1. Soit $x_0=2{,}5$. Examiner le comportement de la suite (u_n) à la calculatrice en précisant en particulier à partir de quel rang l'affichage semble stabilisé.

2. On choisit x_0 tel que $\sqrt{5}<x_0<3$ (utilisation de la localisation précédente (activité 3)). Établir les résultats suivants :

- $u_n>0$ pour tout n,
- $u_n-\sqrt{5}=\frac{1}{2u_{n-1}}(u_{n-1}-\sqrt{5})^2$;

$$u_n-u_{n-1}=\frac{1}{2u_{n-1}}(5-u_{n-1}^2) \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

En déduire que la suite (u_n) est décroissante, minorée par $\sqrt{5}$, puis que :

$$0<u_n-\sqrt{5}<\frac{1}{2\sqrt{5}}(u_{n-1}-\sqrt{5})^2 \quad (1)$$

3. Limite de (u_n). On pose $v_n=u_n-\sqrt{5}$. Après avoir contrôlé que $0<v_n<1$, montrer que $0<v_n<\frac{1}{2\sqrt{5}}v_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$. En déduire par un procédé de multiplications en cascade que $0<v_n<\frac{1}{(2\sqrt{5})^n}v_0$. Conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=\sqrt{5}$.

4. **Une estimation de la performance**

a) En utilisant la relation (1) montrer que si un terme de la suite (u_n) fournit une valeur approchée de $\sqrt{5}$ avec 8 décimales exactes, le terme suivant est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ avec au moins $2\times8=16$ décimales exactes.
Plus généralement, montrer que l'on double le nombre de décimales exactes à chaque pas.

b) On pose $x_0=2{,}3$. Vérifier que x_0 est une valeur approchée à 10^{-1} près par excès à $\sqrt{5}$. Montrer que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à 10^{-32} près!

ANNEXE 4

Un exercice proposé par l'Irem de Strasbourg

$\sqrt{3}$ est-il égal à 1,732 050 8 ?

On cherche à calculer la valeur de l'expression : $9x^4 - y^4 + 2y^2$ pour $x = 10\,864$ et $y = 18\,817$.

1. *Calcul avec la calculatrice de poche*
Qu'obtient-on?
Deux calculatrices de marques différentes donnent-elles le même résultat?
Remarquer qu'une machine qui affiche 8 chiffres ne peut faire le calcul précédent avec précision car x et y sont supérieurs à 10^4, donc x^4 et y^4 sont supérieurs à 10^{16}.

2. *Deux méthodes de calcul*
Voici maintenant deux méthodes de calcul (à la calculatrice) qui ont été proposées par des élèves de Seconde. Les étudier et dire laquelle paraît la plus fiable.

Solution 1 :

Je remarque que pour le quotient $\frac{18\,817}{10\,864}$, la machine affiche 1.7320508.

J'en conclus que $\frac{18\,817}{10\,864} = \sqrt{3}$ et en déduis que : $\frac{18\,817^4}{10\,864^4} = 9$.

Par conséquent pour $x = 10\,864$ et $y = 18\,817$, on a : $9x^4 - y^4 = 0$

et $$9x^4 - y^4 + 2y^2 = 2y^2 = 2 \cdot (18\,817)^2 = 708\,158\,978.$$

Solution 2 :

On a : $$9x^4 - y^4 = (3x^2 - y^2)(3x^2 + y^2).$$

Pour $x = 10\,864$ et $y = 18\,817$, la calculatrice donne le résultat : $3x^2 - y^2 = -1$. Par conséquent, pour ces valeurs de x et y, on a :
$$9x^4 - y^4 = -(3x^2 + y^2)$$
et $$9x^4 - y^4 + 2y^2 = -3x^2 - y^2 + 2y^2 = -3x^2 + y^2 = 1.$$

3. *Comment cet énoncé a-t-il été fabriqué?*

a) Trouver deux nombres entiers naturels simples x et y vérifiant la relation :
$$\text{(R)} \quad y^2 - 3x^2 = 1.$$

b) Montrer que si x et y sont deux entiers vérifiant la relation (R) alors il en est de même des entiers
$$x' = 2xy \quad \text{et} \quad y' = 3x^2 + y^2.$$

c) En utilisant *a)* et *b)* déterminer des couples d'entiers (x, y) de plus en plus grands, vérifiant (R). Montrer que pour chacun de ces couples, on a : $9x^4 - y^4 + 2y^2 = 1$.

4. *Relation avec le nombre* $\sqrt{3}$
Soient x et y deux nombres entiers naturels vérifiant la relation (R) ci-dessus. Montrer que l'on a :
$$0 < \frac{y}{x} - \sqrt{3} < \frac{1}{3x^2}.$$

$\left(\right.$*Indication :* Remarquer que $\frac{y}{x} + \sqrt{3} > 2\sqrt{3} > 3.$$\left.\right)$

Cet encadrement explique-t-il pourquoi, avec la calculatrice, on ne peut déceler de différence entre $\frac{18\,817}{10\,864}$ et $\sqrt{3}$?

Bibliographie sommaire

Artigue M., Perrin M.J., Robinet J. Ce qu'on peut faire en DEUG avec un ordinateur ou une calculatrice (non publié)
Barra R. (1982) Etude pour les grandes valeurs, étude locale en seconde, Bulletin de l'Apmep n°332
Chatelin F. (1989) Comment traiter les calculs impossibles, La Recherche n°214, octobre 1989
Cheramy N. (1985) L'ordinateur outil pédagogique, Bulletin de l'Apmep n°349
Cornu B. Graeve R. de, Pastel A.M. (1981) L'emploi des calculatrices de poche dans l'enseignement des mathématiques, Association à l'instruction publique vallée d'Aoste, Irem de Grenoble
Cornu B., Robert C. Mathématiques et calculatrice programmable au lycée et au baccalauréat, Magnard
Demarcus M. (1985) Mathématiques sur micro-ordinateurs en TC, Bulletin de l'Apmep n°350
emidovitch (1977) Recueil d'exercices et de problèmes d'analyse mathématique, Ed. de Moscou
Demidovitch et Maron (1979) Eléments de calcul numérique, Editions de Moscou
Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil/objet, Recherches en didactique des mathématiques vol. 7.2
Dumont et al. (1992) Calculatrices au lycée, INRP, à paraître
Engel A. (1979) Mathématiques élémentaires d'un point de vue algorithmique, Cedic
Ferrant M. Calculatrices programmables et mathématiques - pour une stratégie pédagogique, Casio
Goetgheluck P. (1985) Document de travail sur micro-ordinateur, Laboratoire d'informatique du premier cycle de l'unviersité d'Orsay (Paris XI)
Hecquet G. (1982) Calculattes programmables, Bulletin de l'Apmep n°332
Jarraud P. (1990) Utilisation pédagogique de l'informatique : mathémtiques et micro-ordinateurs, gadget ou outil pédagogique ? Brochure Inter-Irem Université "Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année"
Kakonosky B. et Lamad J.L. (1982) Voyage au coeur de votre calculatrice, Bulletin de l'Apmep n°332
Laborde et al. (1992) Calculatrices au collège, Brochure Irem Paris 7
Lehning H. et Jakubowicz D. (1981) Mathématiques par l'informatique individuelle, Masson
Mangeney L. (1984) Un outil pédagogique pour l'enseignement des mathématiques, les micro-ordinateurs en terminale D, Bulletin de l'Apmep n°346
Marcia G. (1989) Recherche de solutions approchées d'une équation f(x) = 0, Bulletin de l'Apmep n°367
Ovaert J.L. Résolution de l'équation f(x) = x par approximations successives (in document non publié)

Robinet J. et Mauro S. (1990) Stage calculatrices (non publié)
Rogalski M. (1992) Communication privée
Saada D. (1988) Math et programmation, Bac CDE, Guides plus, Belin
Saada D. (1983) Les réels et la calculatrice, Bulletin de l'Apmep n°339
Solomon L. et Hacquemiller M. (1982) Mathématiques appliquées et calculatrices programmables, Masson
Wasserer C. et Reisz D. (1978) Pour une approche heuristique de l'enseignement de l'analyse, Brochure de l'Irem de Dijon

Ouvrages collectifs

Activités en terminale, Brochure APMEP,
Bulletin InterIrem Analyse n°20 (19 81)
L'influence des ordinateurs et de l'informatique sur les mathématiques et leur enseignement, premier rapport CIEM, publié in Bulletin de l'Apmep n°345 (1985)
Mathématiques : Activités en première (1986) Bulletin InterIrem
Diverses brochures Irem et Inter Irem dont Poitiers, Nice etc...(cf. catalogue, à paraître)

Manuels scolaires consultés
Première S, E Analyse et algèbre
Collection Terracher, Hachette (C. Artigues, J.M. Bouscasse, M.C. Chaumet, A.Gouteyron, B. Pinet) (1987) , (C. Artigues, Y. Bellecave, P.H. Terracher) (1991)
ABC éditions, Bréal diffusion, (D. Guinin, B. Joppin) (1991)
Collection N.Dimathème, Didier (D. Porté, M.N. Audigier, M. Blanchard, G. Bonnefond, D. Daviaud, S. Gion, D. Porté) (1991)
Collection Transmath, Nathan (R. Barra, M. Glaymann, J. Malaval, J.J. Pensec, A. Tricoire) (1988)
Collection Fractale, Bordas (P. Compagnon, M. Nouet, B. Randé, R. Seroux) (1991)
Magnard Lycées, (A. Dumont, Y. Grelet, J.R. Guillaume, C. Matz, P. Plaud, A. Prenel) (1991)
Irem de Strasbourg, Istra, Editions Casteilla (1985)
Irem de Strasbourg, Istra (1982)

Première G
Scodel, Nathan (P. Michalak, L. Terra) (1991)

Terminale C et E, Analyse
Hachette (C. Gautier, P. Royer, C. Thiercé) (1987)
Collection Transmath, Nathan (R. Barra, C. Jobert, J. Malaval, J.J. Pensec, A. Tricoire) (1987), (1989)
Collection Fractale, Bordas (G. Haye, E. de Narp, B. Randé, E. Serra) (1989)
Istra, Irem de Strasbourg, (1983)
Les mathématiques en pratique, TP de l'Irem de Strasbourg, Terminale C et E, Bordas (1991)
Annales corrigées du baccalauréat, Nathan (1990)