REPERES - IREM . n°11 - avril 1993

COMMENT L'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES PEUT NOUS DEVOILER UNE APPROCHE POSSIBLE DU CALCUL INTEGRAL

André STOLL
Irem de Strasbourg

Définir une intégrale dans une classe de lycée ou de BTS est chose difficile. La définir, comme on peut le lire dans certains manuels, en posant :

$$\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a))$$

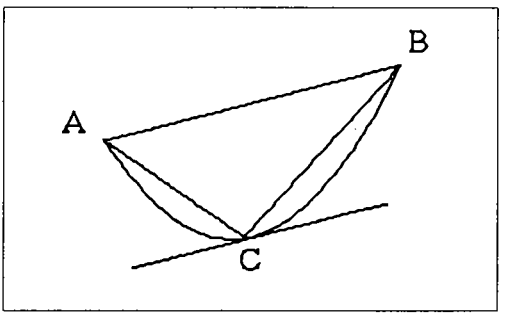
me semble inacceptable. Comment, en partant de cette définition, un élève peut-il comprendre le lien entre le calcul intégral d'une part, la recherche d'un centre d'inertie ou d'une aire d'autre part ?

Deux millénaires ont été nécessaires à la mise au point du calcul infinitésimal. La méthode d'exhaustion des géomètres grecs (Euclide, Eudoxe, Archimède, ...) améliorée par les savants arabes, les *"découpages"* de Fermat et de Pascal sont à la portée d'un élève de première. Exploitons ces méthodes !

Remarque importante : il n'est évidemment pas question ici de détailler les méthodes de Archimède, de Ibn-Qurra ou de Fermat, mais, comme le titre l'indique, d'introduire la notion d'intégrale dans une classe de terminale ou de BTS. On utilisera ainsi, le plus possible, les connaissances et le "savoir-faire" des élèves et en particulier la géométrie analytique, les notions d'équation d'une courbe et de limites, la démonstration par récurrence et ... la calculatrice.

La Quadrature de la parabole par Archimède

Dans une lettre à Eratosthène, Archimède écrit : *"Un segment quelconque compris par une droite et par une section de cône rectangle est égal à quatre fois le tiers du triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment"*.



En langage actuel, nous dirions : l'aire du segment de parabole ABCA est égale au 4 / 3 de l'aire du triangle ACB.

Archimède poursuit : *"J'ai découvert ce théorème, d'abord par des considérations de mécanique, et ensuite par des raisonnements géométriques".*

Voici sous forme de problème la méthode selon Archimède.

A. *Quelques propriétés d'une parabole :*

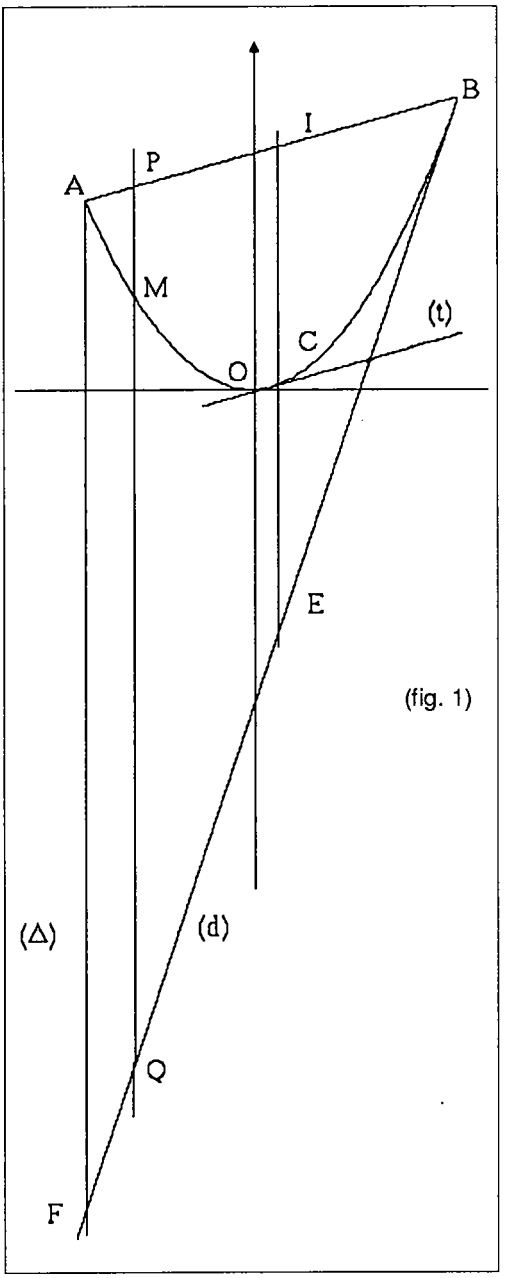
Dans un repère orthonormé (O,i,j), on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = kx^2$, les points A et B de $\mathcal{P}$ d'abscisse respective a et b (a<b), la tangente (d) à $\mathcal{P}$ en B, la droite (Δ) passant par A et parallèle à y'Oy (c'est-à-dire au diamètre de la parabole) (fig 1).

1. Soit I un point quelconque du segment [AB] et C le point de $\mathcal{P}$ tel que (IC) soit parallèle à (y'Oy). Montrer que I est le milieu de [AB] si et seulement si la tangente (t) à $\mathcal{P}$ en C est parallèle à (AB). (Dans la suite I désignera le milieu de [AB]).

2. La droite (d) coupe (IC) en E, (Δ) en F. Montrez que C est le milieu de [IE].

3. Une parallèle à (y'Oy) coupe [AB] en P, $\mathcal{P}$ en M, (d) en Q.

Montrez que $\frac{AP}{AB} = \frac{PM}{PQ}$.



(fig. 1)

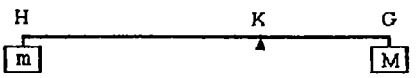
B. *Méthode mécanique :*

"Donne-moi un point d'appui et je soulèverai le monde" (Archimède au roi Hiéron).

Rappel du principe du levier :

K un point fixe, il y a équilibre lorsque :

$$m \times HK = M \times GK .$$



La méthode mécanique consiste à imaginer un levier fictif de point fixe K, milieu de AF, autour duquel sont opérées des pesées fictives de segments de droite. Soit H le point de la droite (KB) tel que HK = KB. On transporte en H le segment PM (P'M' = PM).

1. Montrez que $P'M' \times KH = PQ \times KX$ (fig 2).

2. On fait de même pour tous les segments [PM] de la parabole. En écrivant que l'aire du segment de parabole (ACBA) est la somme des segments PM, montrez que :

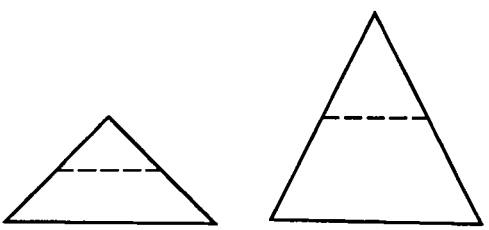
$KH \times \mathcal{A}(ABCA) = KG \times \mathcal{A}(ABF) = (1/3).KB.\mathcal{A}(ABF)$

(G est le centre de gravité du triangle ABF et $\mathcal{A}(ABF)$ désigne l'aire du triangle ABF), et en déduire la proposition d'Archimède.

C. *Démonstration mathématique :*

Reprenons la lettre d'Archimède à Eratosthène : *"La proposition qui précède n'est certes pas démontrée par ce que nous venons de dire, mais elle donne une idée que la conclusion est vraie"*. C'est pour cette raison qu'Archimède qualifie sa méthode d'exploratoire, et donne une démonstration géométrique.

Pour comprendre les dangers qui consistent à identifier une surface à la somme des segments qui la composent, remarquons que deux triangles de même base sont formés tous deux des mêmes segments parallèles à la base sans qu'ils aient la même aire.



"Il est plus facile une fois qu'on a acquis une certaine connaissance de la question d'en imaginer la démonstration, que si l'on recherchait celle-ci sans aucune notion préalable".

La démonstration d'Archimède est la suivante :

La parallèle à y'Oy en J, milieu de [BI] coupe (BC) en Y, P en Z, (d) en W.

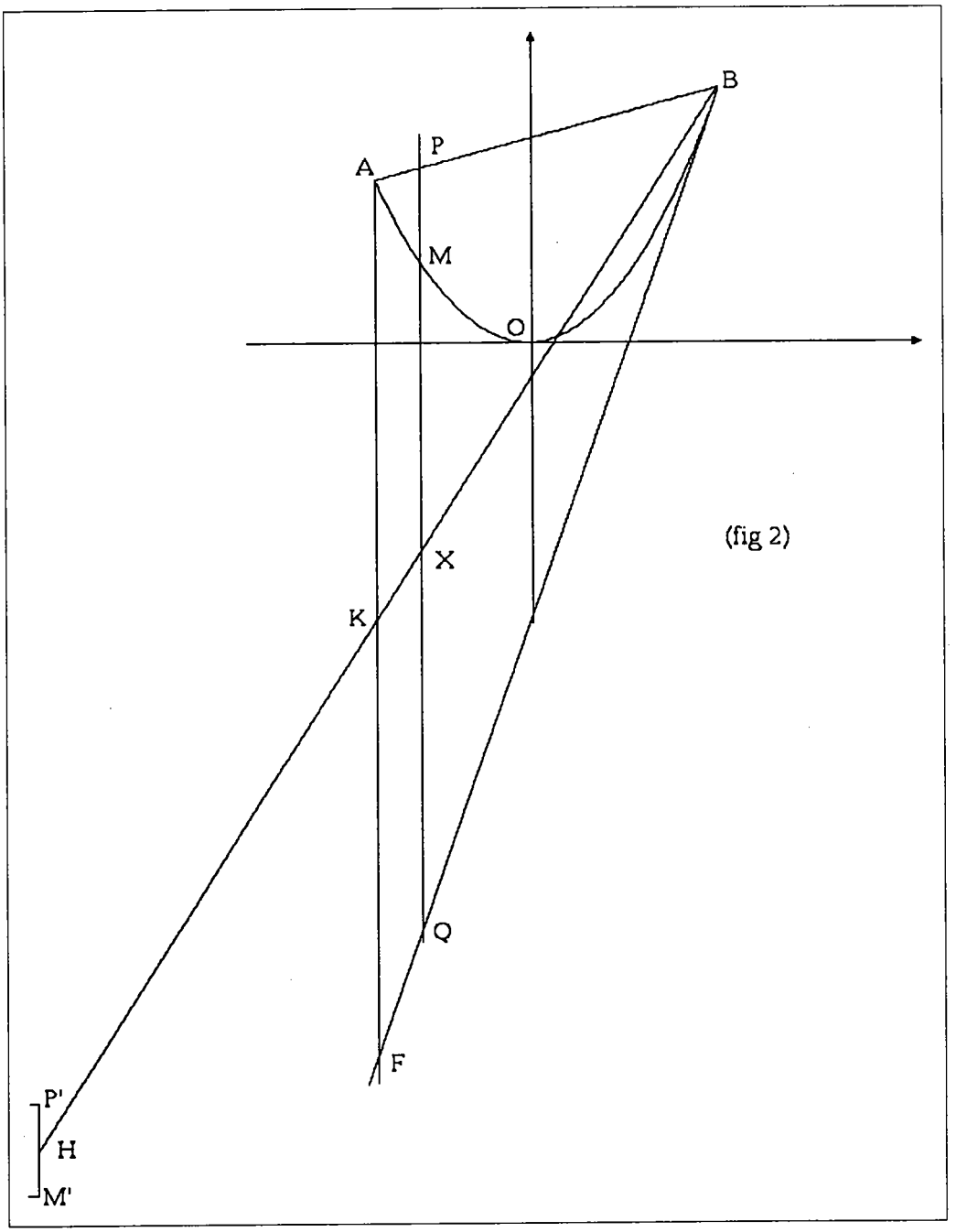
1. Montrez que Z est le milieu de [YW] et Y le milieu de [JW].

2. Déduisez-en que l'aire du triangle BCZ est égale au quart de l'aire du triangle IBC. (Utilisez la proposition 38 du livre 5 d'Euclide).

3. De la même façon l'aire du triangle ACT (cf figure 3) est égale à 1/4 de l'aire de AIC.

Déduisez-en que l'aire du polygone ATCZBA est égale à : $\left(1+\frac{1}{4}\right)\mathcal{A}(ACB)$

4. On réitère l'opération n fois. Montrez que l'aire du polygone à (2n+1) côtés obtenu est : $\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}\right)\mathcal{A}(ACB)$.



(fig 2)

5. Là où Archimède fait une double réduction à l'absurde pour prouver le résultat annoncé, nous nous contenterons d'identifier le segment de parabole à un polygone *"qui a une infinité de côtés"*.

Montrez que :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}.\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

et déduisez-en l'égalité :

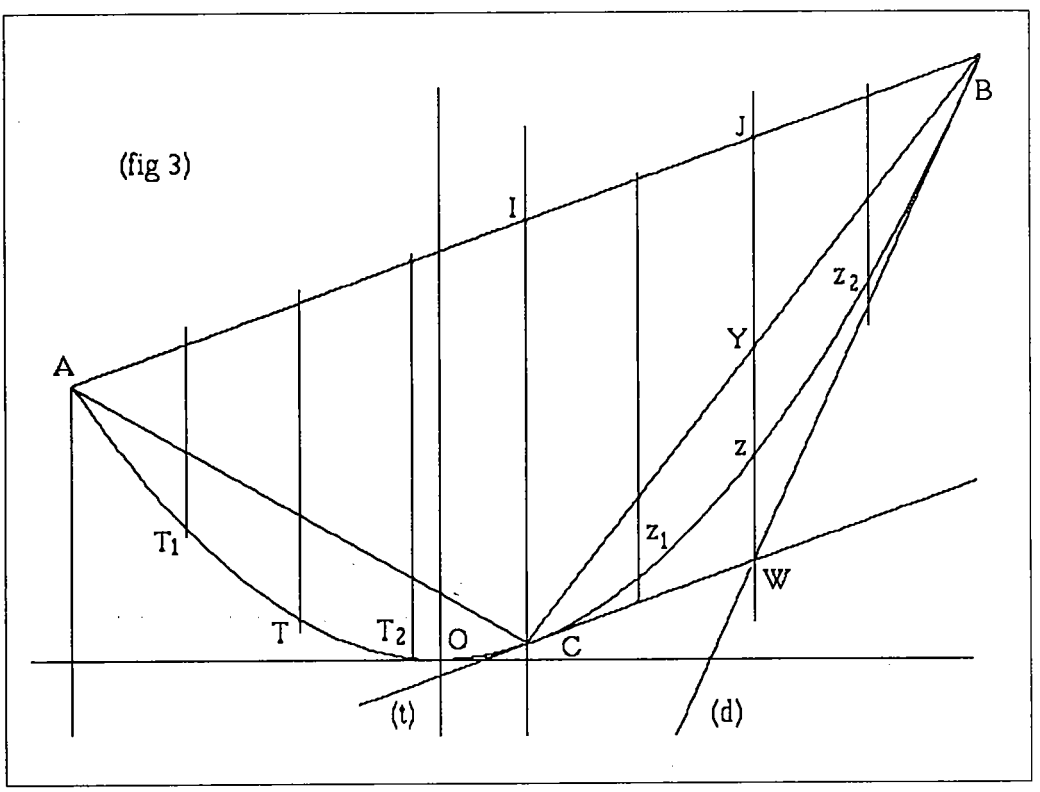
$$\mathcal{A}(ACBA) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n} \right) \mathcal{A}(ACB) =$$

$$= \frac{4}{3}.\mathcal{A}(ACB)$$

Quadrature et Cubature par Thabit Ibn Qurra et Ibn-Al-Haytham

Thabit-Ibn-Qurra (836-901) et *Ibn-Al-Haytham* (965-1040), plus connu en Europe sous le nom d'Alhazen traduisent en arabe les œuvres des géomètres grecs. Ils maîtrisent parfaitement les méthodes d'Archimède. Thabit-Ibn-Qurra réussit la quadrature de la parabole en découpant la surface à évaluer par des droites non équidistantes mais choisies de façon à simplifier le calcul des sommes partielles. Quant à Alhazen, il envisage le calcul de volume du solide engendré par rotation autour de différents axes d'un segment de parabole.

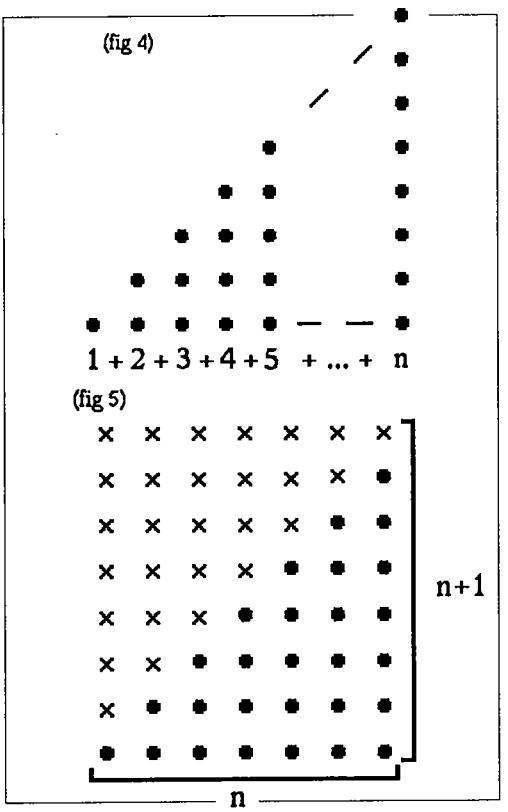


I. *Quelques sommes*

I_1 . A l'aide des nombres triangles, on établit sans difficulté :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

En effet, le nombre $T_n = 1+2+3+...+n$ peut être représenté par un triangle rectangle et isocèle (fig 4). Pour calculer T_n , il suffit de disposer deux fois le triangle T_n , *"tête-bêche"* et former un rectangle dont les côtés sont n et n+1 (fig 5). On en déduit le résultat ci-dessus.



I_2 . Calculons à présent $T_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} k^p$ (n et p deux entiers fixés) par la méthode de Alhazen.

En calculant l'aire du rectangle ABCD (figure 6) par deux méthodes différentes, on trouve la formule de récurrence :

$$(n+1)\, T_{n,p} = T_{n,p+1} + \sum_{m=1}^{n} T_{m,p} \qquad (2)$$

En prenant p = 1 , la formule (2) s'écrit :

$$(n+1)\, T_{n,1} = T_{n,2} + \sum_{m=1}^{n} T_{m,1} \qquad (2')$$

Or $T_{m,1} = \sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2} = \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{2} m$.

Donc : $\sum_{m=1}^{n} T_{m,1} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} m^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} m$

$$= \frac{1}{2} T_{n,2} + \frac{1}{2} T_{n,1} .$$

Et en reportant dans (2') :

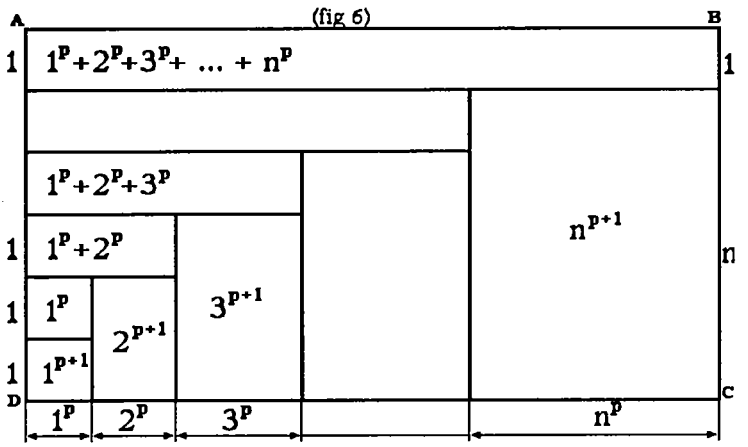
$$(n+1)\, T_{n,1} = T_{n,2} + \frac{1}{2} T_{n,2} + \frac{1}{2} T_{n,1} .$$

Soit : $\frac{3}{2} T_{n,2} = (n + \frac{1}{2})\, T_{n,1}$.

Et finalement :

$$T_{n,2} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (3)$$

(fig 6)



I_3 . De même en substituant p par 2 dans la formule (2) ci-dessus :

$$(n+1)\,T_{n,2} = T_{n,3} + \sum_{m=1}^{n} T_{m,2}$$

$$= T_{n,3} + \frac{1}{3}T_{n,3} + \frac{1}{2}T_{n,2} + \frac{1}{6}T_{n,1}$$

car

$$T_{m,2} = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) = \frac{1}{6}(2m^3+3m^2+m)$$

$$= \frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m\ .$$

Nous en déduisons :

$$\frac{4}{3}T_{n,3} = (n+\frac{1}{2})\,T_{n,2} - \frac{1}{6}T_{n,1}$$

$$\frac{4}{3}T_{n,3} = \frac{n(n+1)(2n+1)^2}{12} - \frac{n(n+1)}{12} = \frac{n^2(n+1)^2}{3}$$

Finalement :

$$T_{n,3} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$T_{n,3} = (\,T_{n,1}\,)^2 \qquad (4)$$

I_4 . De la même manière, en prenant p=4 , on a :

$$T_{n,4} = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 =$$

$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n\ . \qquad (5)$$

I_5 . De ces formules Alhazen déduit la somme suivante :

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n^2-k^2)^2 = \frac{8}{15}n^5 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{30}n\ . \qquad (6)$$

Il suffit en effet d'écrire que :

$$(n^2 - k^2)^2 = n^4 - 2n^2 k^2 + k^4$$

d'où :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - k^2)^2 = (n-1)\, n^2 - 2n^2\, T_{n-1,2} + T_{n-1,4}$$

I_6 . En écrivant que :

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 =$$
$$= [1^2 + 2^2 + (2n)^2] - [2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2] =$$
$$= T_{2n,2} - 4\, T_{n,2}$$

On trouve :

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3} \qquad (7)$$

Remarque : on peut également utiliser :

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 =$$
$$= 4\, T_{n,2} - 4\, T_{n,1} + n\ .$$

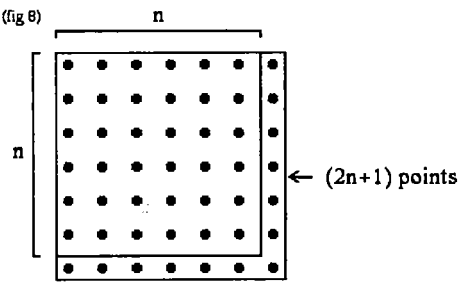
I_7 . Les nombres carrés : 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , ... (fig 7).

On passe d'un nombre carré au suivant en lui ajoutant un nombre impair (figure 8)

(on écrirait de nos jours :

$$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2\ ) .$$

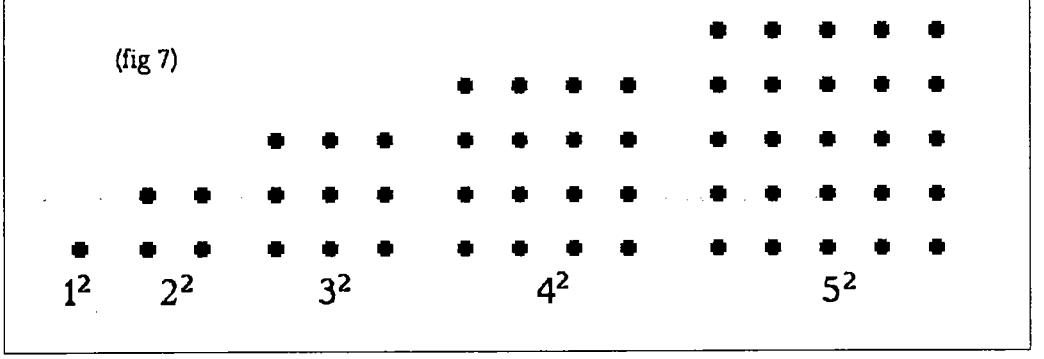
(fig 8)



On en déduit :

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = \sum_{p=1}^{n} (2p-1) = n^2$$

(fig 7)

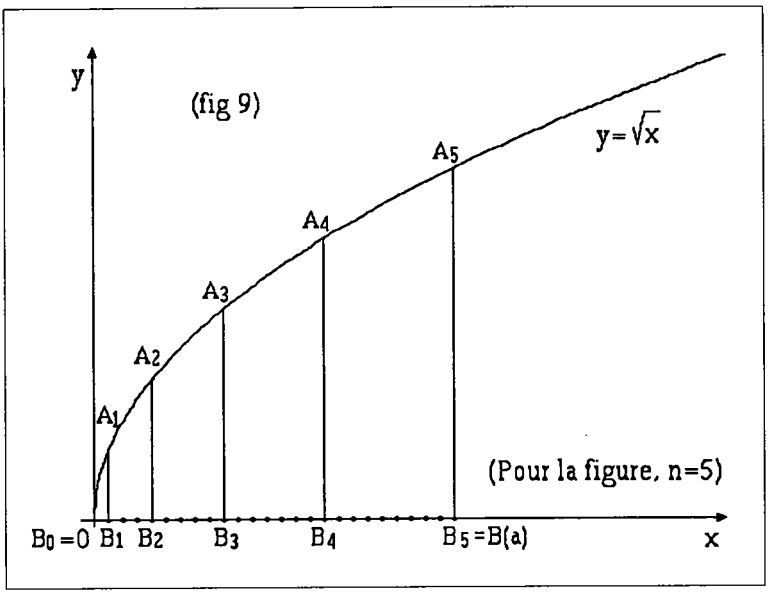


II. *Quadrature de la parabole par Thabit-Ibn-Qurra.*

Soit à calculer l'aire de la surface définie par :

$$\begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$$

($a \in \mathbb{R}^+$ fixé) ; (fig 9) .



Etant donné n , un entier naturel fixé, on partage le segment [OB] en n^2 segments de longueur $h = \frac{a}{n^2}$.

On prend sur (Ox) les points B_p d'abscisse x_p tels que :

$x_0 = 0$, $x_1 = 1h$,

$x_2 = x_1 + 3h = 4h$,

$x_3 = x_2 + 5h = 9h$,

, ... ,

$x_p = x_{p-1} + (2p-1)h = p^2 h$,

, ... ,

$x_n = n^2 h = a$.

Les points A_p ont alors pour coordonnées :

$$A_p (p^2 h ; p\sqrt{h})$$

et l'aire du trapèze $A_{p-1}A_pB_pB_{p-1}$ est :

$$T_p = \frac{1}{2} (x_p - x_{p-1})(p\sqrt{h} + (p-1)\sqrt{h}) = (2p-1)^2 \frac{h\sqrt{h}}{2}$$

Par suite l'aire du polygone :

$$OA_1A_2 \dots A_nB_nO$$

est :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} T_p = \frac{h\sqrt{h}}{2} \sum_{k=1}^{n} (2p-1)^2$$

$$S_n = \frac{2}{3} a\sqrt{a} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) .$$

(cf formule 7 du § I_6) . Fidèle à la tradition grecque, Thabit-Ibn-Qurra fait une double réduction à l'absurde pour démontrer que l'aire à calculer, S, est $\frac{2}{3} a\sqrt{a}$.

De nos jours, nous nous contenterons d'écrire :

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{2}{3} a\sqrt{a} .$$

III. *Cubature par Alhazen*

Soit $\mathcal{S}$ le solide engendré par rotation autour de la base C_0B du segment de parabole OC_0B (fig 10) et $\mathcal{Z}$ le cylindre engendré par rotation autour du même axe du rectangle OC_0BA. Alhazen démontre que le volume $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ de $\mathcal{S}$ est égal au $\frac{8}{15}$ du volume de $\mathcal{Z}$.

Sa méthode est la suivante : étant donné n un entier naturel fixé ; on partage le segment [OA] en n intervalles de longueur $h = \frac{a}{n}$.

Si P (resp Q) désigne le volume engendré par rotation autour de C_0B par la réunion des rectangles $C_{i-1}B_{i-1}D_iC_i$ (resp : $C_{i-1}E_{i-1}B_iC_i$) alors :

$$\mathcal{V}(Q) < \mathcal{V}(\mathcal{S}) < \mathcal{V}(P).$$

Or $\mathcal{V}(P) = \pi k^2 h^5 \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (n^2 - i^2)^2 \right\} =$

$$\mathcal{V}(P) = \pi k^2 h^5 \left\{ \frac{8}{15} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{30n^4} \right\}$$

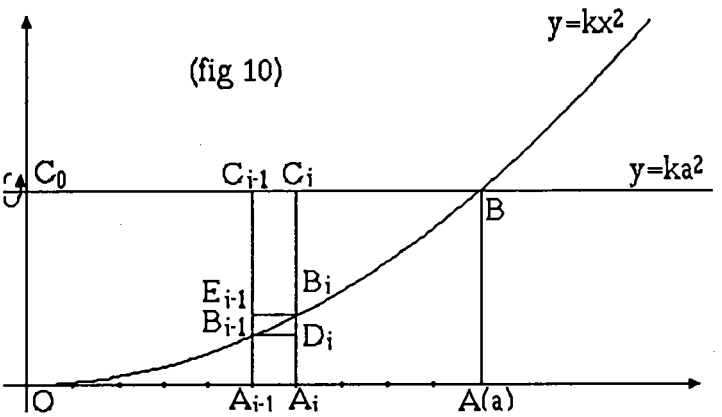
et $\mathcal{V}(Q) = \pi k^2 h^5 \left\{ \sum_{i=1}^{n} (n^2 - i^2)^2 \right\} =$

$$\mathcal{V}(Q) = \pi k^2 h^5 \left\{ \frac{8}{15} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{30n^4} \right\}$$

On en déduit par passage à la limite (Alhazen fait une double réduction à l'absurde...) que :

$$\mathcal{V}(\mathcal{S}) = \frac{8}{15} \pi k^2 a^5 = \frac{8}{15} \mathcal{V}(\mathcal{Z})$$

(fig 10)



La Quadrature de la parabole et de l'hyperbole par Fermat et par Pascal

Pierre Simon de Fermat (1601-1665) mathématicien français est conseiller au parlement de Toulouse. Il partage avec Pascal la découverte du calcul des probabilités et imagine en même temps que Descartes les principes de la géométrie analytique.

Fermat exploite les propriétés des progressions géométriques pour quarrer *"les paraboles et les hyperboles à l'infini"*.

Blaise Pascal (1623-1662) mathématicien, physicien, philosophe et écrivain français. On lui doit notamment les lois de la pression atmosphérique, le principe de la presse hydraulique, la théorie de la roulette. Pour quarrer la parabole, Pascal construit des rectangles de largeur d, en calcule l'aire et explique qu'il est possible de négliger certains termes quand le nombre de rectangles augmente indéfiniment (c'est-à-dire quand d tend vers 0).

I. *Suite géométrique*

1. Soit $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$; montrez que :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

2. Déduisez en :

2a. (x fixé) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ [notée $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$]

2b. (n fixé) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = n+1$.

3. généralisation de 2b. au cas où $n \in \mathbb{Q}^+$.

Soit $n = \dfrac{u}{v}$, $u \in \mathbb{N}$, $v \in \mathbb{N}^*$, un nombre rationnel positif. En posant $y = x^{1/v}$, montrez que :

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-y^{u+v}}{1-y} \cdot \frac{1-y}{1-y^v} .$$

Et déduisez en :

pour tout $n \in \mathbb{Q}^+$, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = n+1$.

II. *Quadrature de la parabole par Fermat*

Fermat appelle "parabole" toute courbe d'équation $y = kx^m$ où m est un entier positif. (Sa méthode peut se généraliser au cas où m est un nombre rationnel positif. C'est pourquoi nous prendrons par la suite $n = \dfrac{u}{v}$, $u \in \mathbb{N}$, $v \in \mathbb{N}^*$.

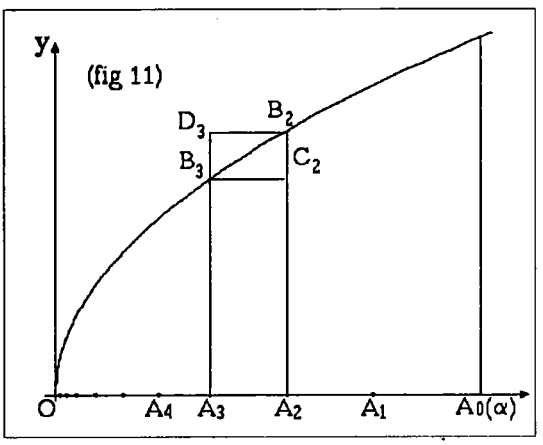
Soit à calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la surface (S) définie par :

$$\{ 0 \le x \le \alpha \ ; \ 0 \le y \le kx^m \}$$

($\alpha \in \mathbb{R}^+$ fixé) .

Prenons sur x'Ox , les points (A_i) d'abscisse $x_i = \alpha q^i$ où q est un nombre quelconque de]0,1[(fig 11).

1. Calculez r_i l'aire du rectangle $A_iA_{i-1}C_{i-1}B_i$ et r'_i l'aire du rectangle $A_iA_{i-1}B_{i-1}D_i$ (cf. figure 11) .



2. Déduisez en l'inégalité :

$$k\alpha^{m+1}q^m \frac{1-q}{1-q^{m+1}} \leq \mathcal{a}(\alpha) \leq k\alpha^{m+1} \frac{1-q}{1-q^{m+1}}$$

3. En prenant la limite quand q tend vers 1 calculez $\mathcal{a}(\alpha)$.

Remarque : calculez $\mathcal{a}'(\alpha)$. Que remarquez-vous ?

III. *Quadrature de l'hyperbole par Fermat.*

Fermat applique sa méthode à l'hyperbole. Il affirme : *"Je dis que toutes les hyperboles à l'infini, sauf une seule, celle d'Apollonius, peuvent être quarrées au moyen d'une progression géométrique par une méthode uniforme et constante".*

(La définition d'une hyperbole généralisée est $x^\alpha y^\beta = k$. L'hyperbole d'Apollonius est celle pour laquelle $\alpha = \beta = 1$).

Fermat prend $\alpha = 2$; $\beta = 1$ et montre que *"l'espace indéfini qui a pour base GE et qui est limité d'un côté par la courbe ES, de l'autre côté par l'asymptote indéfinie GR est égal à une aire rectiligne donnée".* (fig 12)

La méthode de Fermat pour démontrer ce résultat est la suivante :

Soit q un nombre strictement supérieur à 1, on prend sur GR la suite de points (A_i) définie par :

$A_0 = G$, d'abscisse a ,

A_i a pour abscisse $x_i = aq^i$

On encadre l'aire à calculer comme dans le cas B ci-dessus et on fait tendre q vers 1.

On en déduit :

> l'aire $\mathcal{a}(a)$ de la surface (de longueur infinie !!!)
>
> $\{ x \geq a \ ; \ 0 \leq y \leq 1/x^2 \}$
>
> est $\mathcal{a}(a) = 1/a$

Remarque : Calculez l'aire $f(\alpha)$ de la surface définie par :

$$\{ 1 \leq x \leq \alpha \ ; \ 0 \leq y \leq 1/x^2 \}$$

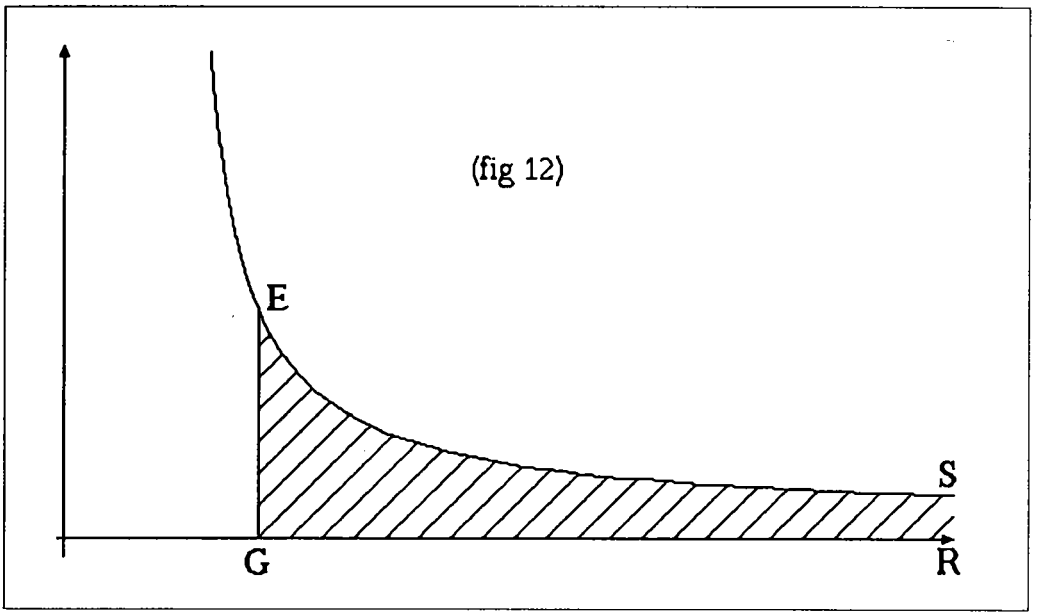
Que peut- on dire de $f'(\alpha)$?

IV. *La méthode de Pascal*

On veut calculer l'aire $F(\alpha)$ de la surface définie par : $\{ 0 \leq x \leq \alpha \ ; \ 0 \leq y \leq x^p \}$.

1. Démontrez par récurrence :

$$T_{n,p} = \frac{n^{n+1}}{p+1} + Q_p(n) ,$$



où Q_p (n) est un polynôme de degré inférieur à p de la variable n . On pourra se servir de la formule :

$$(n+1)\, T_{n,p} = T_{n,p+1} + \sum_{m=1}^{n} T_{m,p}$$

2. Si $n \in \mathbf{N}^+$ et A (α ; 0) , on partage le segment [OA] en n intervalles de longueur $h = \alpha/n$.

On obtient ainsi les points de x'Ox :

$$A_0 = 0 , A_1 , A_2 , \ldots , A_{n-1} , A_n = A .$$

Montrez que l'abscisse du point A_i est $x_i = ih$.

Calculez l'aire des rectangles $A_{i-1}A_iB_iC_{i-1}$ et $A_{i-1}A_iD_{i-1}B_{i-1}$ (les notations sont les mêmes qu'au §II).

Déduisez en un encadrement de F(α) .

Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ? Calculez F'(α) .

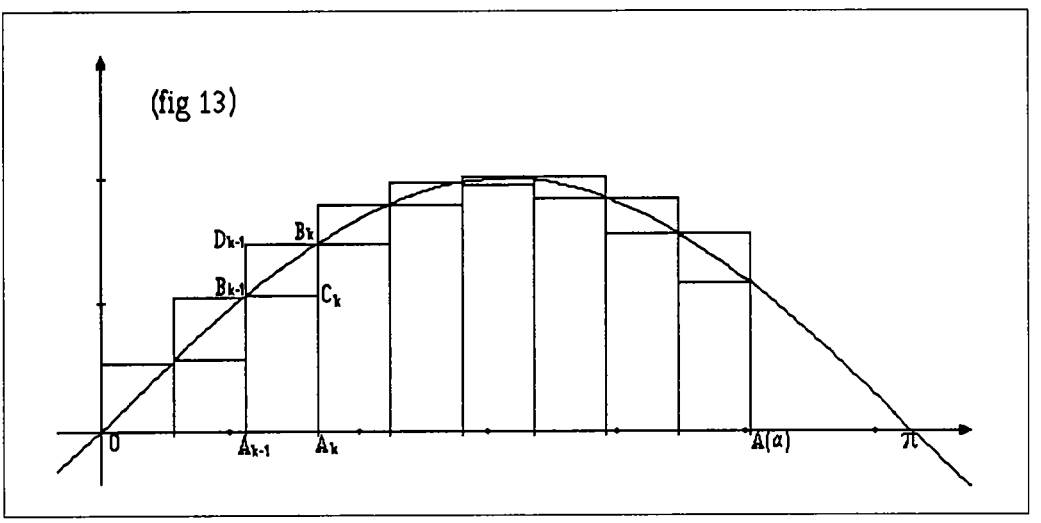
Exercices

Exercice 1.

1. Calculez : $\sum_{p=1}^{n} e^{ip\alpha}$ et déduisez-en :

$$\sum_{p=1}^{n} \sin(ph) = \frac{\sin(\frac{nh}{2})\sin(\frac{(n+1)h}{2})}{\sin(\frac{h}{2})} .$$

2. Appliquez la méthode de Pascal à la surface : $\{ 0 \le x \le \alpha \ ; \ 0 \le y \le \sin(x) \}$ ($\alpha \in [0,\pi]$)



(Voir figure 13) et démontrez que l'aire $F(\alpha)$ de cette surface est : $F(\alpha) = 1 - \cos\alpha$.

Exercice 2.

Le but de l'exercice est de trouver une "bonne approximation" de l'aire L de la surface définie par : $\{ 1 \le x \le 2 \ ; \ 0 \le y \le 1/x \}$

1. En utilisant la méthode ci-dessus, donnez un encadrement de L en fonction de $n \in \mathbf{N}^*$. Calculez cet encadrement en prenant $n = 10$, $n = 100$, ...

2. Cherchez une approximation de L en approchant la surface par la somme des trapèzes $A_{k-1}B_{k-1}B_kA_k$. (Pour les calculs, on prendra $n = 10$ ou $n = 100$ ou plus si on est courageux).

Exercice 3.

Les différents exemples ci-dessus permettent de conjecturer que, si $A(\alpha)$ désigne l'aire de la surface définie par : $a \le x \le \alpha$ et $0 \le y \le f(\alpha)$, alors la dérivée de la fonction est la fonction f.

1. Démontrez cette proposition dans le cas où f est une fonction continue positive sur l'intervalle $I = [a , b]$.

Indications : Soit $\alpha \in I$ et $\Delta\alpha$ un nombre "petit" ; que représente graphiquement le nombre $A(\alpha + \Delta\alpha) - A(\alpha)$? En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrez qu'il existe deux nombres p et q de l'intervalle $[\alpha - \Delta\alpha \ , \alpha + \Delta\alpha \ ]$ tels que : $f(q).\Delta\alpha \le (A(\alpha+\Delta\alpha) - A(\alpha)) \le f(p).\Delta\alpha$. Déduisez-en le résultat annoncé.

2. Si F est une primitive quelconque de f sur I, il existe un nombre k qui vérifie :

"pour tout $\alpha \in I$, $F(\alpha) = A(\alpha) + k$."

Montrez que $k = F(a)$ et déduisez-en le théorème fondamental suivant :

> Etant donné f une fonction continue et positive sur l'intervalle $I = [a , b]$, alors l'aire de la surface définie par :
> $a \le x \le \alpha$ et $0 \le y \le f(\alpha)$ est
> $F(\alpha) - F(a)$ où F est une primitive de f .

Conclusion

Ces quelques exemples permettent une approche intéressante des méthodes infinitésimales.

S'il n'est évidemment pas question de détailler la théorie de l'intégrale dans une classe de lycée, on peut toutefois en exploiter ses richesses et entre autres :

1. Etablir un lien entre le calcul intégral et le calcul des dérivées. (En langage géométrique : le calcul de l'aire d'une surface et la recherche d'une tangente sont deux problèmes inverses l'un de l'autre).

2. S'il est possible de trouver une primitive F de la fonction f, on calcule l'aire en posant F(b) – F(a). Sinon, on fait un calcul approché en choisissant un nombre entier naturel n, le plus grand possible, on partage le segment [a , b] en n segments de longueur :

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$$

et on calcule :

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \, .$$

La définition de l'intégrale s'introduit alors très naturellement en posant :

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \right) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

A partir de là, on peut faire le lien avec le cours de physique et de technologie et faire des calculs d'aire, de volume, de centre d'inertie, de moment d'inertie, ...

Bibliographie

[1] *Intuition et démonstration chez Archimède* par Bernard BETTINELLI. Repères Irem - N°2 - Janvier 1991 .

[2] *The Historical Developement of the Calculus* par C.H. EDWARDS.

[3] *Une histoire des mathématiques - Routes et Dédales* - A. DAHAN-DALMEDICO et J. PEIFFER (Editions du Seuil).

[4] *Mathématiques au fil des âges* - (Editions Gauthier-Villars).

[5] *Eléments d'Histoire des Sciences* sous la direction de Michel SERRES (Bordas)

[6] *Les Mathématiques Arabes* - YOUSCHKEVITCH - (Vrin).