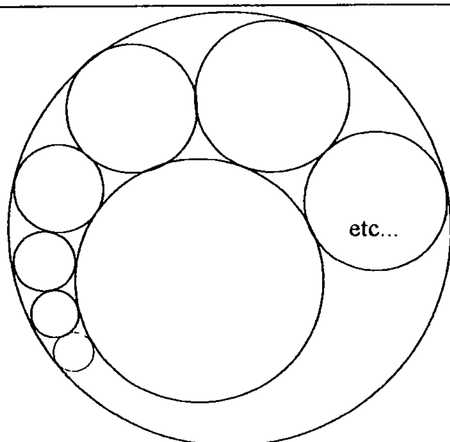
REPERES - IREM . n°11 - avril 1993

LES PORISMES DE STEINER

Jean-Claude DANIEL
Irem de Reims



Collier de cercles

Soient deux cercles non concentriques, dont l'un est intérieur à l'autre. Si l'on considère alors d'autres cercles de telle sorte qu'ils soient tangents entre eux successivement et, à la fois, aux deux cercles donnés, il peut arriver que cette suite de cercles se ferme sur elle-même, le premier étant tangent au dernier. Cette "fermeture" du collier de cercles peut intervenir après plusieurs tours, mais il peut se faire aussi que ce collier ne se ferme jamais.

Les cas de fermeture sont connus sous l'appellation de *porismes de Steiner*, du nom du géomètre suisse **Jacob Steiner** (1796-1867).

En fait si une chaîne est fermée pour un certain cercle de départ, elle l'est pour n'importe quel cercle de départ. Ce résultat peut être établi de façon élégante, à l'aide de l'inversion qui transforme les deux cercles de base en deux cercles concentriques. (On pourra lire à ce sujet [1] chapitre 5 et [2] chapitre 6.)

Ce type de problème a été repris entre 1930 et 1960 par le chimiste **F. Soddy**, et les géomètres **L. Kollros** et **H.S.M Coxeter** en géométrie de l'espace avec des anneaux de sphères tangentes. Avis aux amateurs !

L'enseignement actuel de la géométrie dans les classes de second degré, n'utilise que peu ou pas les transformations qui "transforment" réellement les formes de figures, et donc les stratégies de résolution de problèmes où interviennent des transformations non affines.

Pour permettre de discuter ce point de vue avec des professeurs stagiaires en formation à l'IUFM, j'ai choisi de proposer l'exercice ci-dessous, dont la parenté avec les porismes est flagrante, avec trois objectifs complémentaires :

— aborder des algorithmes de construction non triviaux,

— résoudre un "problème" dont la solution est peu ou pas connue,

— utiliser si nécessaire l'outil informatique (logiciel Graph'x).

Quelques tracés "expérimentaux", permettent vite de se convaincre que l'algorithme est marqué par deux sous-problèmes : construire le premier cercle C_0, construire le nième cercle connaissant ceux qui précèdent. Cette deuxième partie est fondée sur une boucle qui s'arrête sur une "condition de fin" délicate à exprimer, mais dont chacun comprend à l'évidence la nécessité.

Il faut régler l'ambiguïté du texte sur la locution "à droite" : il s'agit à chaque fois que cela est possible de tracer un nouveau cercle dont le centre est situé sur un perpendiculaire à D, située à droite de la perpendiculaire à D passant par le centre du cercle précédent. Toute notre étude ultérieure se fera donc dans le demi-plan "de droite" P_1, limité par la perpendiculaire en Z à la droite D.

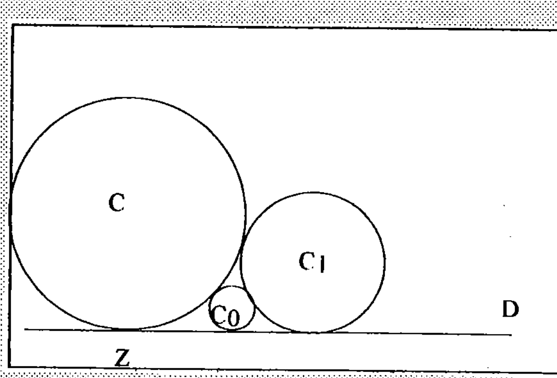
Le tracé du cercle C_0 trouve rapidement une solution par analyse-synthèse, c'est un problème classique de construction. La figure de la page suivante résume l'étude que l'on peut d'ailleurs conduire avec des élèves.

Module complémentaire de formation IUFM.

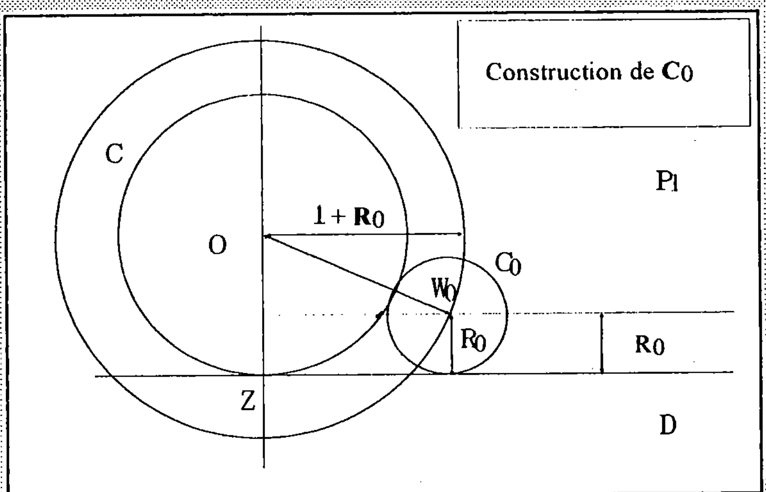
Un exemple de travail à épisodes. Des rebondissements non prévus !

Problème :

Le cercle C de rayon 1 et la droite D sont tangents en Z. "A droite" de C on trace le cercle C_0 de rayon $R_0 < 1/10$ tangent à C et à D, puis "à droite" de C_0 le cercle C_1, tangent à C, D, et C_0, puis "à droite" de C_1 le cercle C_2, tangent à C, D, et C_1 ... On obtient ainsi une famille de cercles C_0, C_1, C_2 ... Il arrive un moment où il est impossible de tracer un cercle supplémentaire. Combien y a-t-il de cercles dans la famille ?



Le centre W_0 du cercle C_0 est l'intersection du demi-cercle de centre O et de rayon $1 + R_0$ situé dans P_1 avec la parallèle à D située à la distance R_0 au-dessus de D.



Le problème a été proposé dans les termes de la page précédente à un groupe de stagiaires PLC2 de l'IUFM de Reims au cours de l'année 1991-92, dans un module complémentaire de formation de géométrie. L'objectif principal était de faire découvrir des stratégies de travail sur un problème ouvert, dans un contexte lui-même non figé.

Le travail a été annoncé dès le départ comme évolutif, et son aboutissement éventuel non fixé dans le temps : chacun prend le temps d'une recherche personnelle en fonction de son degré de motivation.

Dans une première séquence le texte brut (page précédente) est proposé aux stagiaires répartis en groupes de trois personnes. Ils disposent d'un matériel minimum dont compas évidemment, mais aussi les règles du commerce pour le dessin, dont certains modèles présentent une collection de cercles de rayons fixés, autorisant un tracé très rapide.

Les stagiaires sont de prime abord très désorientés par la question posée : certains termes de l'énoncé leur paraissent vagues. Il faudra préciser le sens de "à droite", l'idée de famille de cercles, l'engagement dans une procédure algorithmique. Je refuse cependant de donner des précisions *a priori* : c'est l'ensemble des stagiaires qui établira au fur et à mesure de la perception du problème, ce que l'on peut considérer comme accord de tous.

La mise au travail est rapide. Trois "écoles" se dégagent :

1) Les "expérimentateurs papier compas", qui tracent rapidement (C), D et le premier cercle (C_0) approximativement en choisissant une ouverture de compas au hasard et en déplaçant le centre pour que "ça colle" ! La supercherie ne se voit pas une fois le tracé effectué. S'agit-il d'une supercherie ? Il y aura à ce sujet débat dont je reparlerai. Pour (C_1) , les affaires se gâtent, le doute s'installe.

2) Les "démonstrateurs" pour qui n'est solution que ce qui est rendu constructible, avec démonstration, et qui ne peuvent accepter de "glisser" quoi que ce soit sur la feuille. Il hésitent donc un bon moment avant de tracer le premier cercle (C_0) . Ils s'autoriseront cependant un "faux-tracé" provisoire en vue de trouver celui qui est "juste". Le malheur c'est que passé le premier cercle (C_0) , rien ne paraît évident !

3) Les "expérimentateurs règle à cercles du commerce", qui eux tracent (C) et D avec cette fameuse règle et n'éprouvent aucune difficulté à tracer le premier cercle (C_0) de la famille, en glissant la règle. Et même, il apparaît clairement que pour ce premier cercle on a le choix du rayon. les cercles suivants sont aussi tracés par le même procédé, en utilisant un trou circulaire de la règle de plus grand rayon, qui "colle à peu près".

Cette première partie dure une heure et demie. J'instaure alors le débat dans une mise en commun.

La discussion entre les trois écoles est vigoureuse, chacun tenant à sa façon de procéder. Les "démonstrateurs" convaincront les autres que le premier cercle (C_0) est bien constructible à la règle et au compas, d'ailleurs (argument d'autorité !) ils l'ont presque démontré. Avec un minimum de temps, en s'y mettant tous il est possible d'aboutir, en tous cas pour (C_0) .

La part de la troisième école est capitale : elle entraîne le consensus sur le sens profond du problème posé. On voit, même si c'est approché un peu grossièrement, ce que peut être la famille de cercles, et pourquoi le processus ne peut continuer indéfiniment. Cela motive tout le monde pour une reprise de l'activité en groupes informels et éclatés.

La fin de la séquence (trois heures en tout) permet la concrétisation de la démonstration ébauchée pour le tracé du cercle (C_0) . Ce sera l'occasion de se mettre au point sur Analyse-Synthèse, algorithmes constructifs, niveaux de preuve, démonstration, débat scientifique ...

Personne ne voit la fin du problème, mais l'envie de chercher encore reste vive. D'ailleurs, pourquoi ne pas interroger les conseillers pédagogiques ou les autres collègues de mathématiques ? La situation demeure donc très ouverte et l'on convient d'en conduire la recherche aussi longtemps qu'il le faudra. A chaque séance à venir (il en reste cinq pour l'année) nous ferons un point sur toute communication éventuelle.

A la seconde séance de travail, je découvre que les stagiaires ne sont plus seuls "dans le coup". d'autres collègues cherchent avec ou sans eux !

Une première stratégie est proposée, avec une première tentative de résolution :

le tracé purement géométrique semble toujours inaccessible, mais l'analytique est un recours. Un algorithme sur les abscisses et les rayons des cercles est proposé. Il n'y a pas de condition de fin, et le débat met en évidence une erreur dans les calculs. Cependant une solution semble en vue pour chacun, mais nécessite un travail de mise au point sur les suites, le théorème du point fixe, les conditions d'utilisation. Ici est-ce bien un problème de convergence qui nous préoccupe ? Affaire à suivre la prochaine fois.

Pour améliorer les tracés je suggère l'utilisation d'un traceur de courbe : "Graphix" paraît approprié.

Lors de la séance suivante, la solution analytique est acquise, et les stagiaires l'ont mise au point. Pour certains cela est considéré comme l'aboutissement. Pour relancer l'intérêt, je propose pour tous une séquence de tracé sur ordinateur. C'est une bonne occasion d'utiliser cet outil.

Surprise : au cours du tracé, maîtrisant mal la condition de fin de l'algorithme, l'un des stagiaires découvre qu'après le dernier cercle de la famille à droite, on repart par un cercle supplémentaire qui renvoie le problème à gauche dans une infinité de cercles dont les rayons convergent vers zéro. Convergence quand tu nous tiens ! (cf. tracé en remarque). Curieusement, l'intérêt pour le problème est relancé : des propriétés remarquables jalonnent peut-être le chemin qui reste à parcourir y compris dans une recherche non analytique.

L'un des objectifs annexes de départ était de faire intervenir l'inversion dans un "vrai" problème. J'y renonce à ce stade : le concept n'a pas pris son statut d'outil, certain l'ont à peine rencontré. Je propose pour la séquence suivante (il n'en reste plus beaucoup, la fin de l'année approche) un travail sur les transformations non affines du plan et annonce l'utilisation de celles-ci pour une solution du problème (inversion). Rien n'empêche de continuer à chercher d'ici-là.

La séance suivante est attendue. On veut "la" solution ! En tout cas c'est une bonne motivation pour se réapproprier l'inversion. Tout se passe bien, mais j'ai un peu le sentiment de sortir le lapin du chapeau. Après tout tant pis, ce lapin est bien beau ! Nous sommes tous un peu tristes : une belle histoire se termine. Et pourtant...

Un collègue (eh oui, ils cherchent toujours !) à qui la solution "informatique" a été montrée me fait remarquer que les points de contact des cercles de la famille semblent se trouver sur un cercle (de centre J, cf. figures). Je me reprends de passion pour le problème, en dehors des stagiaires que je ne verrai plus avant la dernière séquence.

C'est l'occasion de découvrir une autre solution géométrique, que je m'engage à faire paraître dans "VECTEUR", la revue de l'Irem de Reims. Depuis, d'autres collègues proposent des problèmes annexes, ou touchant aussi aux cercles en familles. Rien n'est fini, c'est une affaire à suivre !

Cette expérience inopinée me semble riche pour plusieurs raisons :

— Il y a eu dévolution d'un vrai problème.

— Certains concepts sont passés du statut d'objet à celui d'outil alors même que l'on pouvait supposer que cette dialectique avait déjà fonctionné au cours du cursus

des stagiaires.
— Les changements de point de vue (de cadres) ont été fréquents et combien porteurs de réinvestissements.

— Enfin et surtout les alternances largement espacées dans le temps, recherche de solutions, communication, débats, ont permis pour les suites, l'inversion, les constructions, la géométrie du cercle ... de vraies séances dans lesquelles l'institutionnalisation n'est pas un vain mot.

Ce problème est-il utilisable en second cycle ?

Sans doute,... partiellement. Mais alors n'est-ce pas par rapport à l'alternance des activités, l'espacement dans le temps et la réduction des champs d'investigation, enlever l'essentiel de l'intérêt de la démarche ?

D'autres problèmes peuvent certainement susciter une activité du même type chez les élèves. Peut-être avez vous déjà expérimenté une situation semblable ? Vos questions, vos remarques, vos propositions seront les bienvenues.

Les pages qui suivent témoignent de la richesse mathématique du problème proposé

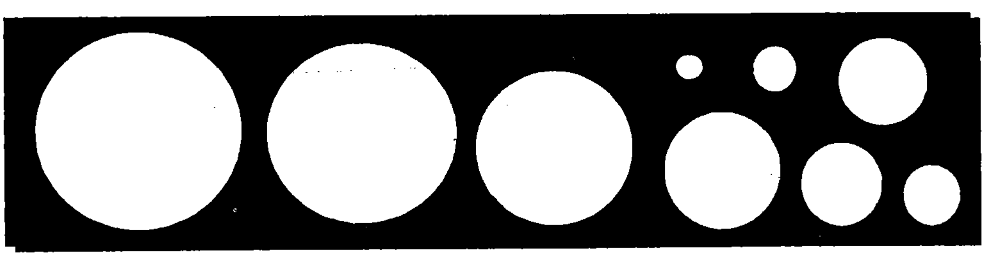
Construction des cercles C_n

La construction de C_n connaissant les cercles qui précèdent (constructibilité ?) est plus délicate à règler. Après bien des essais papier-crayon infructueux le logiciel Graph'x semblait un bon recours pour un tracé utilisant l'analytique. Difficile cependant d'accepter de passer de ce problème de “géométrie pure” à l'analytique. Pourtant, l'utilisation de l'outil informatique permettra une découverte intéressante et la rédaction d'une solution ne devant rien aux calculs dans un repère !

Méthode analytique

On cherche d'abord le lieu des centres des cercles tangents à C et D dans le demi-plan P_1. On considère le repère (Z , $\vec{i}$, $\vec{j}$) , où

Règle à tracer les cercles

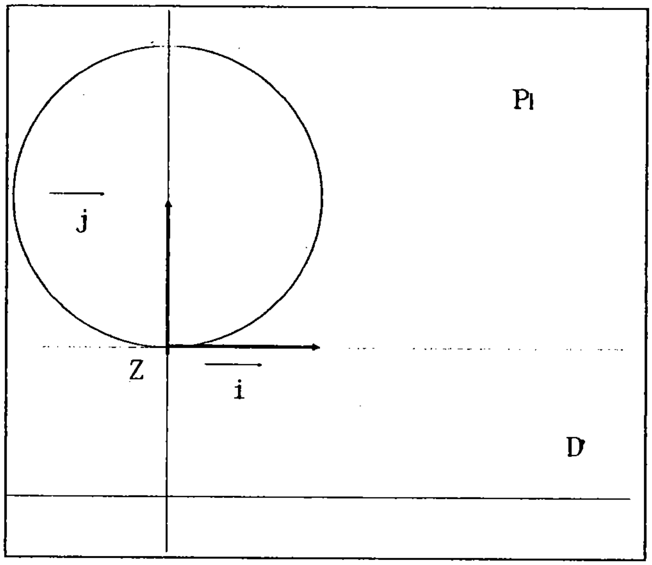


$\vec{i}$ est vecteur unitaire de D' situé dans P_1 et où $\vec{j} = \vec{ZO}$.
On désigne par D' la droite d'équation $y = -1$.

W (x,y) est centre d'un cercle tangent à C et D si et seulement si d(W,O) = d(W, D'). Le lieu des points W est donc la demi-parabole (P) définie par :

$x > 0 \;\; ; \;\; x^2 + (1-y)^2 = (y+1)^2$

Donc W(x,y) est sur (P) définie par l'équation $y = 1/4.x^2$ et par : $x > 0$. C , D et la demi-parabole (P) sont alors faciles à construire dans Graph'x.



Il reste donc à déterminer les centres W_i des cercles C_i par leur abscisse x_i , leur ordonnée égale au rayon valant $1/4.y_i^2$. En supposant connu le cercle C_i de centre W_i , le cercle C_{i+1} de centre W_{i+1} est constructible si et seulement si :

$[\, x_{i+1} > x_i$

et

$W_iW_{i+1} = R_i + R_{i+1} = 1/4\, x_i^2 + 1/4\, x_{i+1}^2$
$= (x_{i+1} - x_i)^2 + (1/4\, x_{i+1}^2 - 1/4\, x_i^2)^2\,]$.

Cette condition se traduit par :

$[x_{i+1} > x_i \quad \text{et} \quad x_{i+1}(1 - 1/2\, x_i) = x_i\,]$.

La condition de fin de l'algorithme est donc $x_i < 2$. C'est cette relation qui conditionne le tracé possible du dernier cercle de la famille.

On est alors ramené à l'étude d'une suite (x_n) de premier terme x_0 telle que :

$[R_0 = 1/4\, x_0^2 \text{ , et } x_{n+1} = 2x_n / (2 - x_n)]$ (1)

et en particulier à chercher le nombre de premiers termes pour lesquels cette suite est croissante.

La relation (1) permet d'établir que :

$$x_{n+1} = 2 / (2 / x_n - 1) ,$$

d'où :

$$2 / x_{n+1} = (2 / x_n) - 1 ,$$

ce qui conduit au calcul (suite arithmétique simple !) :

$$2 / x_n = 2 / x_0 - n ,$$

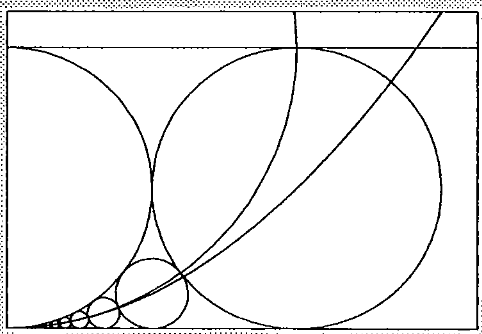
d'où :

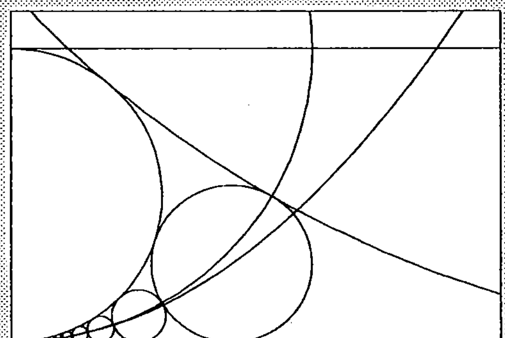
$$x_n = 2x_0 / (2 - n.x_0) .$$

Graph'x permet alors en paramétrant de tracer la famille de cercles cherchée selon la valeur initiale du rayon. En prenant $R_0 = 10^{-6}$, on obtient $x_0 = 2.10^{-3}$ et la condition de fin $x_n < 2$ nous donne $n < 999$, ce qui conduit finalement à une famille de 1000 cercles possibles ! Pour $R_0 = 10^{-2}$ cela ne fait que 10 cercles dans la famille.

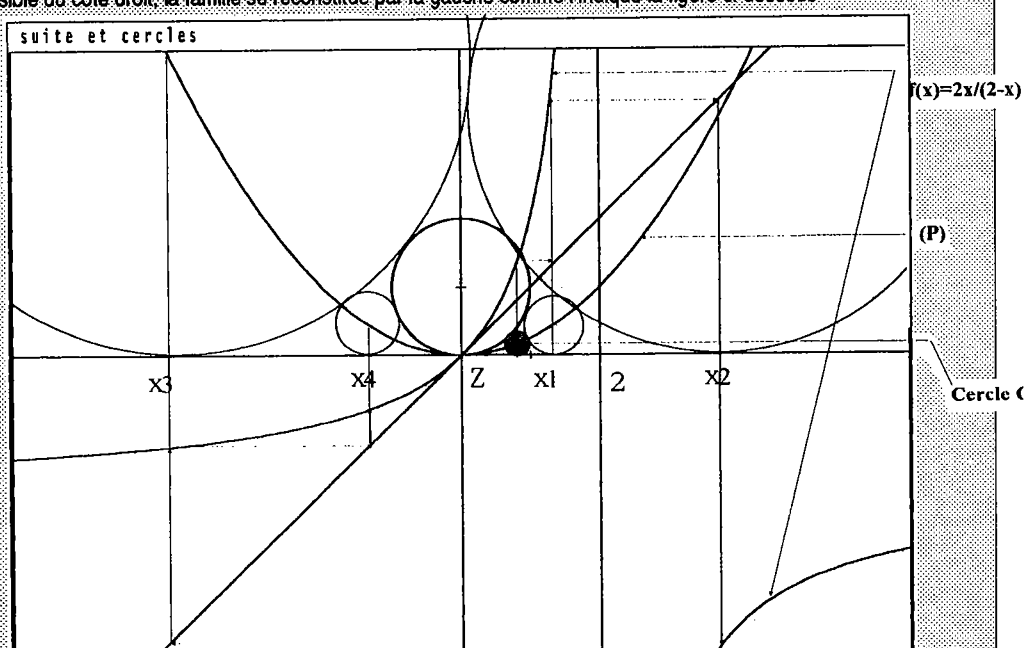
remarques

Ces deux figures donnent le tracé de cercles de la famille avec deux cercles de départ très petits mais différents. Outre la demi-parabole (P) , la droite D et le cercle C, j'ai mis en évidence une constatation que seule l'informatique permet de réaliser de façon commode : il semble bien que les points de contact de tous les cercles de la famille soient eux-même sur un cercle de centre J et de rayon 2. Cela conduira à une solution géométrique "pure".





Avec des élèves de terminale, l'étude de la suite (x_n) conduit graphiquement à une étude de point fixe, la convergence n'étant pas le but essentiel, puisque c'est la croissance des premiers termes qui nous intéresse. Cependant il est clair que la suite est croissante "en deux parties" et donc quand la construction n'est plus possible du côté droit, la famille se reconstitue par la gauche comme l'indique la figure ci-dessous



Méthodes géométriques

Utilisation de l'inversion

L'inversion permet de changer de stratégie en ramenant le problème à la recherche de cercles tangents à deux droites parallèles (cf. figure ci-dessous).

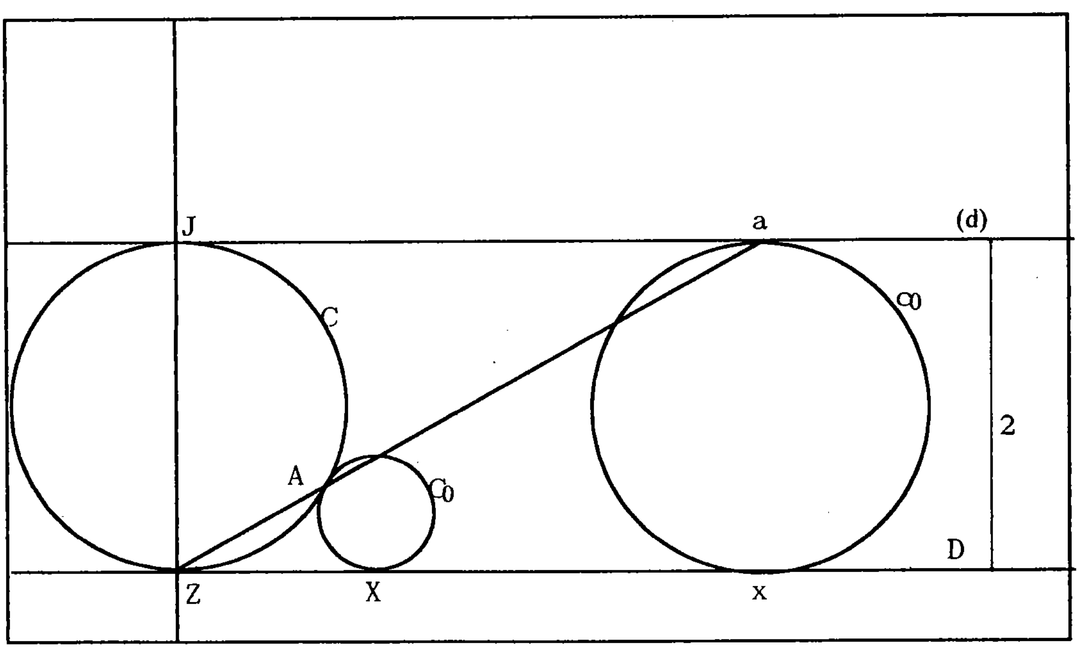
On considère l'inversion I de pôle Z et de puissance 4. Dans cette inversion I , l'image du cercle C qui passe par le pôle est la parallèle (d) à D passant par J (J est invariant). L'image de la droite D , passant par le pôle est la droite D. Tout cercle tangent à C et D , ne passant pas par Z, est transformé en un cercle tangent à (d) et D. *Tous ces cercles ont le même diamètre*, distance de (d) à D. Plus le point de contact X s'éloigne de Z, plus son image x, se rapproche de Z.

L'inversion I de pôle Z et de puissance 4 est l'application involutive du plan privé de Z , qui à tout point M associe le point m tel que Z , M , m sont alignés et $\overline{ZM} . \overline{Zm} = 4$.

Pour toute figure F du plan on note F* cette figure privée de Z .

L'image par I d'une droite D* passant par Z est D* . L'image d'un cercle C* passant par Z est une droite ne passant pas par Z et réciproquement. L'image d'un cercle C ne passant pas par Z est un cercle c .

L'inversion conserve les contacts.



En revenant au problème posé, il s'agit donc de trouver tous les cercles C_n de la famille, tangents à C et D , et tangents entre eux "par la droite". Leurs images par I seront des cercles tangents à (d) et à D, et tangents entre eux "par la gauche", à partir du premier, c_0 image de C_0 par I .

Le cercle C_0 étant tracé, on trace sans difficulté son image c_0 par I, puis le cercle c_1 , tangents à c_0 "à gauche", à (d) et D, puis le cercle c_2 ... Les images des cercles c_n par I sont les cercles C_n de la famille.

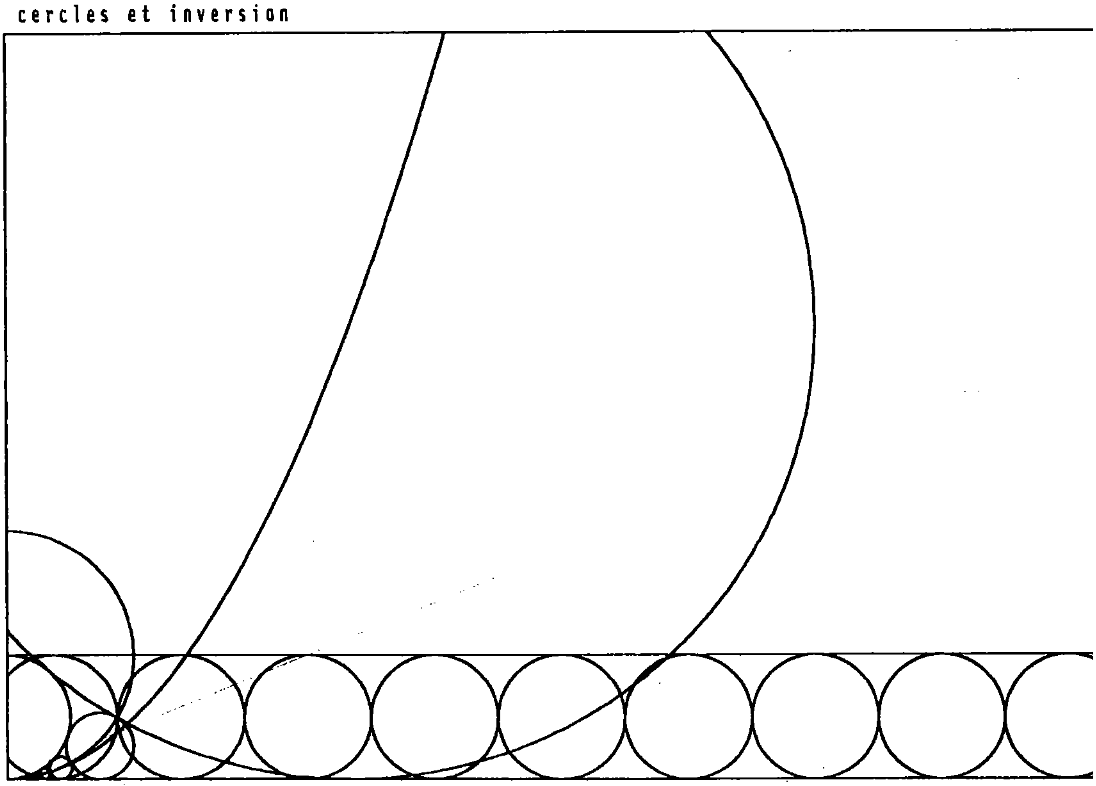
Quel est leur nombre ?

Le rayon R_0 de C_0 est fixé. Nous avons vu que l'abscisse X_0 de son centre vaut $2.R_0$. L'abscisse du centre de l'image c_0 est x_0 telle que $X_0.x_0 = 4$, d'où $x_0 = 2 / R_0$.

Chaque cercle c_n ayant pour diamètre 2, le nombre de cercles possibles est donc la partie entière de $1 / R_0$, augmentée de 1.

La figure ci-dessous présente les cercles de la famille C_n et leurs images c_n par I .

cercles et inversion



Seconde méthode,
n'utilisant pas l'inversion

On suppose connus la droite D, le cercle C et le premier cercle de la famille, C_0 de centre W_0 et de rayon R_0.

O est le centre de C , Z son point de contact avec D et J le point diamétralement opposé à Z sur C. C_0 a pour centre W_0 , et est tangent à C en A_0 , à D en Z_0 , comme indiqué sur la figure ci-dessous.

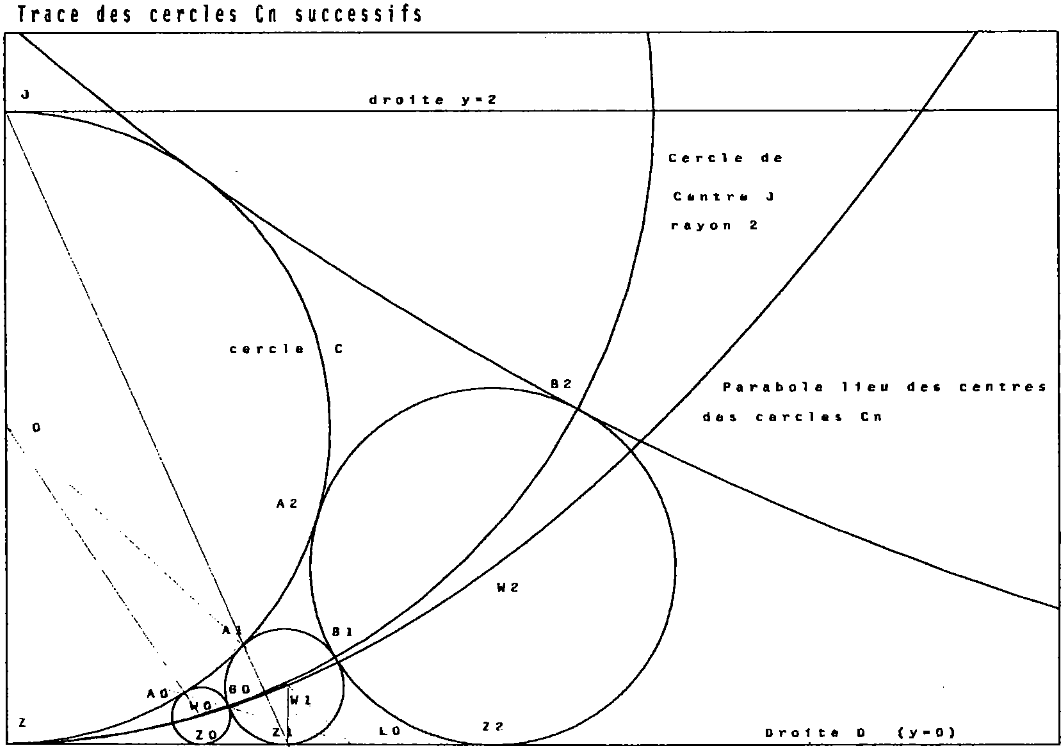
Il faut donc tracer si possible le cercle suivant, C_1 de centre W_1 , tangent à C en A_1 , à D en Z_1 , et situé à droite de C_0.

Le cercle C a pour image le cercle C_0 dans l'homothétie négative de centre A_0 et de rapport $-R_0$.

Dans cette homothétie, l'image de J est Z_0 . les points J, A_0 , Z_0 sont donc alignés. (Il en serait de même pour raison analogue de J, et A_1 , Z_1 , que l'on cherche.)

Le problème revient donc maintenant à la détermination du point A_1 , car (JA_1) coupera D en Z_1 et (OA_1) recoupera en W_1 la perpendiculaire en Z_1 à D , ce qui détermine complètement le cercle C_1.

Trace des cercles Cn successifs



Montrons que le point de contact éventuel B_0 du cercle C_0 et du cercle C_1, est sur le cercle de centre J et de rayon 2.

Le triangle JZ_0Z est rectangle en Z, de hauteur JA_0, donc $\overline{JA_0} \,.\, \overline{JZ_0} = JZ^2$.

De même dans le triangle cherché JZ_1Z on a $\overline{JA_1} \,.\, \overline{JZ_1} = JZ^2$.

D'où l'on tire que J a même puissance :

$$\overline{JA_0} \,.\, \overline{JZ_0} = \overline{JA_0} \,.\, \overline{JZ_0} = 4,$$

par rapport à C0 et à C1

J se trouve donc sur l'*axe radical* des deux cercles C_0 et C_1, c'est-à-dire sur leur tangente commune en B_0, et l'on a :

$$JZ^2 = JB_0{}^2 = 4,$$

d'où $JB_0 = 2$.

B_0 est donc le point d'intersection "à droite" du cercle de centre J et de rayon 2 avec C_0.

Si le cercle C_1 existe, l'image de C est C_0 par l'homothétie négative de centre A_0 et de rapport $-R_0 / 1$ et l'image de C_0 est C_1 par l'homothétie négative de centre B_0 et de rapport $-R_1 / R_0$. Le produit des rapports est R_1.

Si R_1 est différent de 1 on passe de C à C_1 dans l'homothétie positive de centre L_0 intersection de (A_0B_0) avec la tangente commune extérieure D à C et C_1 et de rapport R_1. Le point A_1 est alors l'intersection du demi-cercle de droite, de diamètre [ZJ] avec la droite (OL_0). Ce point A_1 ne convient que si $JA_1 < JA_0$ pour que le cercle C_1 soit à droite de C_0.

Si R_1 est égal à 1, la composée des deux homothéties est une translation (la droite (A_0B_0) est alors parallèle à D). Le point A_1 est alors le milieu de l'arc "de droite", JZ du cercle C.

Construction des cercles de la famille

On trace C, D, C_0, et les points J, O, Z, A_0, Z_0, W_0. Le cercle de centre J et de rayon 2 coupe C_0, "à droite" en B_0. On trace (A_0B_0). Trois cas sont possibles :

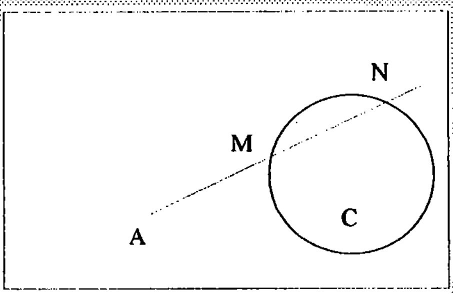
La droite (A_0B_0) coupe D en L_0 et (OL_0) coupe le "demi-cercle C de droite" en A_1 tel que $JA_1 < JA_0$. (JA_1) coupe D en Z_1 à droite de Z_0. La perpendiculaire en Z_1 à D coupe (OA_1) en W_1. C_1 est le cercle de centre W_1 et de rayon W_1Z_1.

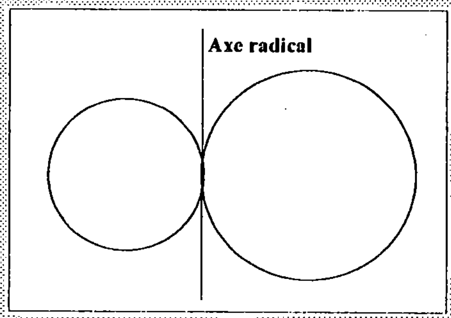
La droite (A_0B_0) est parallèle à D. le point A_1 est le milieu de l'arc JZ de C. Le reste de la construction est identique.

La droite (A_0B_0) coupe D en L_0 et (OL_0) coupe le "demi-cercle C de droite" en A_1 tel que $JA_1 > JA_0$. (JA_1) coupe D en Z_1 à gauche de Z_0. le cercle C_1 est alors du mauvais côté, la construction s'arrête.

L'algorithme de construction des cercles C_n est lancé. Il finit quand le point A_n "repart du mauvais côté".

Puissance d'un point par rapport à un cercle





La *puissance* d'un point A par rapport au cercle C est le réel $\overline{AM} \cdot \overline{AN}$, où M et N sont les points d'intersection d'une droite passant par A avec C. Ce réel est indépendant de la sécante choisie (il vaut $OA^2 - R^2$ si C a pour centre O et rayon R).

L'ensemble des points qui ont *même puissance* par rapport à deux cercles est une droite, qui est la tangente commune au point de contact quand les deux cercles sont tangents : c'est l'*axe radical* des deux cercles.

Bibliographie

[1] Redécouvrons la géométrie, H.M.S. Coxeter et S.L. Greitzer. (Paris, Dunod, 1971)

[2] Joyaux mathématiques, volume 2, R. Honsberger. (Paris, Cedic, 1979)

[3] Comment résoudre et poser un problème ? Polya. (Paris, Dunod, 1965)

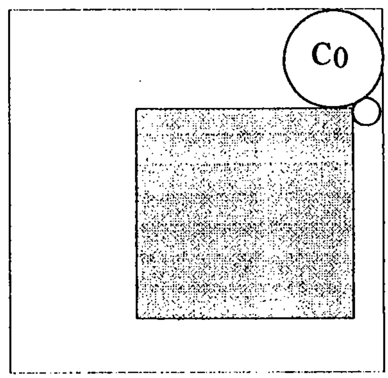
[4] La découverte des mathématiques, Polya. (Paris, Dunod, 1967)

[5] Mathématiques élémentaires d'un point de vue algorithmique, A. Engel. (Paris, Cedic, 1979)

D'autres cercles en famille

Problème 1

On considère deux carrés emboîtés non concentriques.



On trace un cercle C_0 tangent aux deux carrés, puis C_1 tangent aux deux carrés et à C_0 puis C_2 ... Est-il possible de disposer deux carrés pour que le "porisme s'effectue ? (Le dernier cercle ferme le collier en devenant tangent au premier.)

Problème 2

On trace un cercle (C) de rayon R, puis quatre cercles comme indiqué sur la figure.

conjecture : les quatre points A, B, C, D sont sur un cercle de même rayon R.