REPERES - IREM . n°11 - avril 1993

L'OUTIL INFORMATIQUE NE PEUT DONNER QUE CE QU'IL A

Gérard KUNTZ
Irem de Strasbourg

Si certains enseignants éprouvent à l'égard de l'informatique embarras et méfiance, les élèves ont compris, dans leur immense majorité, le parti qu'il pouvaient tirer de leur calculatrice ou de certains logiciels. Il suffit d'observer une classe de terminale technologique au cours d'un devoir en temps limité, pour se persuader que le travail sur machine a remplacé en grande partie le raisonnement mathématique. Ces élèves accordent à l'outil informatique une confiance totale, confortée par l'expérience : la calculatrice utilisée habilement leur permet de résoudre au moins 80% d'un problème d'analyse proposé au baccalauréat. Ils mettent en œuvre un "algorithme de résolution" auquel leur professeur conteste tout contenu mathématique rigoureux. Deux pratiques cohabitent dans la classe : celle du professeur qui énonce et démontre et celle d'une majorité d'élèves qui interrogent leur calculatrice et qui ne comprennent pas qu'une copie où "tout est juste" puisse ne pas avoir la moyenne.

Cet article poursuit une double ambition : fournir aux collègues quelques arguments de poids en faveur d'une activité mathématique qui ne se limite pas au dialogue avec une calculatrice, les convaincre de la nécessité d'une évolution de leur enseignement et de son évaluation, qui tienne compte de l'usage irréversible de moyens de calcul numérique toujours plus sophistiqués.

On n'imagine pas un enseignant de mathématiques, se contenter de fournir à ses élèves, en début d'année, des énoncés en vrac, théorèmes, définitions et recettes divers, avec un vague mode d'emploi. Un théorème est commenté (faute d'être démontré), illustré par des exemples et des contre-exemples qui mettent en évidence son domaine de validité. Cela n'empêche pas son emploi erroné ou abusif par certains. L'usage éclairé de l'informatique nécessite au moins autant d'attention : confier à des élèves une calculatrice, un mode d'emploi et quelques conseils d'utilisation, et en attendre une pratique sensée relève d'une extrême naïveté. Il est indispensable de détailler les possibilités de l'outil et de préciser ce qu'il ne peut pas faire, de montrer par des contre-exemples les catastrophes auxquelles s'expose l'utilisateur non averti, comme on le fait en mathématiques. Cette démarche pédagogique est indispensable et coûteuse. Elle ne garantit pas contre l'erreur ou le mauvais usage de l'informatique. Elle limite les dégats, considérables, de la pratique "sauvage" de l'informatique.

On l'aura compris, nous nous plaçons délibérément du point de vue qui domine, de façon écrasante, l'enseignement des mathématiques en France : il s'agit de la conviction, muée imperceptiblement en certitude, puis en évidence, que les nombres réels constituent la bonne façon de penser les grandeurs et de décrire la réalité physique. Les enseignants, formés aux mathématiques "standard"(*)(1), les considèrent comme l'instrument par excellence d'une description performante de l'univers. Dès lors, l'outil informatique, lorsqu'il est utilisé pour faire des mathématiques, doit passer au crible de cette clé de compréhension ultime, les mathématiques "standard" deviennent normatives et définissent le "bon usage" de l'informatique. C'est cette perspective qui est adoptée dans la suite de l'article, à la recherche d'une cohérence entre la norme et sa servante informatique. Mais d'autres *a priori* sont possibles : le regard du mathématicien "non standard" ou du physicien sur le monde, conduisent à des attitudes moins impérialistes à l'égard de l'informatique, et permettent de réhabiliter des méthodes et des comportements inacceptables dans le contexte dominé par les mathématiques "standard" (2).

Un algorithme de résolution en terminale technologique

ou

Comment avoir la moyenne sans connaître les mathématiques ?

Les élèves de ces sections (F1,F2,F3) sont généralement peu armés du point de vue théorique. Ce sont avant tout des utilisateurs de mathématiques, en physique et en technologie. Ils seront, deux ans plus tard, les techniciens supérieurs que les entreprises s'arrachent. Dans leur immense majorité, ils disposent d'une calculatrice graphique. Leur manière d'utiliser l'outil informatique met en évidence des dérives que l'on perçoit, de façon diffuse, dans tous les secteurs de l'enseignement des mathématiques.

Le devoir en temps limité révèle des conduites proprement caricaturales : à peine le sujet est-il distribué qu'ils se précipitent sur la calculatrice. Plus de la moitié du temps de l'épreuve est consacré au travail sur machine. Du point de vue de l'enseignant, la durée raisonnable d'utilisation de la calculatrice ne devrait pas excéder dix minutes (calcul numérique, vérification graphique des résultats théoriques). La lecture des copies permet de comprendre la cohérence de leur méthode et de mettre à jour l'algorithme de résolution implicite qu'ils utilisent.

(*) Les notes sont renvoyées en fin d'article.

1) Introduire dans la calculatrice la formule définissant la fonction.

2) Faire apparaître le tracé de la courbe sur l'écran.

3) Repérer les sommets de la courbe et en déduire les valeurs à introduire dans le tableau de variations (elles sont en général entières, sinon elles sont données sous forme décimale approchée).

4) Déduire du tracé obtenu le signe de la dérivée.

5) Simuler le calcul des limites sur la calculatrice.

6) Trouver une valeur approchée d'une racine de f(x)=0 par simple lecture approchée sur l'écran (le zoom rend bien des services) ou par application d'un algorithme disponible en mémoire.

7) Calculer de façon approchée l'inévitable aire qui figure dans le problème (la calculatrice fournit la procédure).

8) Terminer "à la main" ce que la calculatrice ne sait pas encore faire : calcul de la dérivée (souvent faux, effectué sans doute pour faire plaisir au prof...), équation d'une tangente (quoiqu'un usage habile de la calculatrice puisse en fournir une équation approchée) et quelques autres "bricoles".

9) Lier la sauce pour donner à la copie la forme qu'attend le correcteur (il n'y manque guère que les explications et les justifications des résultats qui y figurent...).

Cet algorithme, très utilisé dans ces sections, jette les jurys d'examens dans le désarroi : comment noter une copie dont les résultats (corrects) ont été obtenus par des moyens aussi suspects ? Pour certains collègues, la démarche n'a rien de mathématique. D'autres, plus indulgents, ou usés par le combat, plaident qu'il faut tenir compte du savoir-faire mis en œuvre... Toujours est-il que la copie finit par être notée aux alentours de la moyenne. Parfois, en guise de conclusion, quelqu'un suggère qu'une évolution des sujets serait nécessaire, compte tenu des calculatrices. Et l'on se sépare sur ce vœu pieux, en attendant de reprendre le même débat l'année suivante. On n'a pas encore osé utiliser l'arme absolue dans ces sections : l'interdiction des calculatices lors des épreuves mettrait cruellement en évidence l'incapacité de nombreux élèves à mettre en œuvre les mathématiques de leur professeur.

Les questions de fond que posent ces pratiques "sauvages mais efficaces" doivent être abordées dès le début de la seconde et approfondies tout au long de la scolarité. Il convient de mettre en garde les utilisateurs contre de dangereuses "évidences", jamais formulées, mais présentes dans leur pratique quotidienne. En voici quelques exemples :

1) Un tracé sur écran graphique est une photographie de la réalité mathématique (plus ou moins nette selon la définition de l'écran).

2) Les nombres disponibles sur une calculatrice sont ceux qu'utilisent les mathématiques.

3) Remplacer un nombre par une valeur approchée n'a pas d'incidence significative sur le résultat d'un calcul, pourvu que la précision soit suffisante.

4) On peut trouver la limite d'une fonction avec la calculatrice.

5) Le résultat d'un calcul numérique simple est fiable.

Nous allons examiner chacune de ces propositions, préciser le cadre dans lequel certaines contiennent une part de vérité, et tirer les conséquences des vastes zones d'erreurs qu'elles recèlent.

Dessine-moi une courbe

ou

Grandeur et pauvreté d'un écran graphique

Qu'est-ce qu'un écran graphique ? Que peut-on en attendre en analyse ? A quelles questions est-il incapable de répondre ? Faute de s'être interrogé à ce sujet, de nombreux utilisateurs vivent en pleine illusion.

Un écran graphique est un rectangle pavé par de minuscules rectangles appelés *pixels*. Chaque pixel peut être dans deux états : éteint ou allumé. Un écran VGA sur lequel nous réaliserons les tracés de cet article comporte 640 pixels par ligne et 480 pixels par colonne. L'écran d'une calculatrice graphique en compte généralement nettement moins, ce qui conduit à des tracés moins précis et moins esthétiques. Mais quelle que soit la finesse d'un écran graphique, il présente une différence radicale avec un rectangle du plan mathématique : celui-ci contient toujours une infinité de points. Entre deux points distincts de ce rectangle, il y a une infinité de points (sur le segment qui les joint) ; entre deux pixels contigus d'un écran graphique, il n'y a rien. les conséquences de ces faits sont considérables.

En voici quelques-unes ...

De la courbe mathématique au tracé sur écran graphique.

Soit une fonction f définie sur un intervalle I=[a,b]. Comment passe-t-on de sa courbe représentative dans le plan mathématique à la représentation sur écran graphique ?

I est divisé en n intervalles de longeur (b – a) / n : c'est le *pas* du partage. De la courbe initiale, on EXTRAIT n+1 points de coordonnées :

$$(x = a+i * pas, y = f (a+i * pas)),$$

i allant de 0 à n. Soient m et M les ordonnées minimales et maximales des points extraits.

Sur l'écran graphique, les abscisses, qui sont entières, vont de 0 à Xmax, et les ordonnées de 0 à Ymax. (En VGA, Xmax = 639 et Ymax = 479). Une transformation affine applique [a,b] sur [0,Xmax] et [m,M] sur [0,Ymax]. Dans cette transformation, chaque point extrait de la courbe est appliqué, après arrondi de ses nouvelles coordonnées sur un pixel de l'écran graphique qui s'allume. Enfin deux pixels consécutifs du tracé sont souvent reliés par un "segment", ce qui donne le sentiment que toutes les courbes sont continues (3).

Certains logiciels laissent à l'utilisateur le choix du pas, et la réalisation de la transformation affine précédente (choix de l'origine et des unités). La plupart des calculatrices effectuent ces choix et ces transformations de façon "transparente" (4) pour l'utilisateur. Les risques n'en sont que plus grands. Le passage du plan mathématique à l'écran graphique induit une perte d'information considérable : dès qu'une courbe est complexe, des surprises sont prévisibles. Entre deux points extraits consécutifs, la courbe peut avoir de multiples comportements, qui n'ont rien à voir avec celui d'un segment. Et surtout, le tracé global sur l'écran peut n'avoir qu'un lointain rapport avec le tracé initial.

Des tracés quelque peu bizarres.

Soit la fonction sinus sur l'intervalle [0,5000]. Voici une famille de tracés obtenus avec GRAPH'X sur un écran VGA.

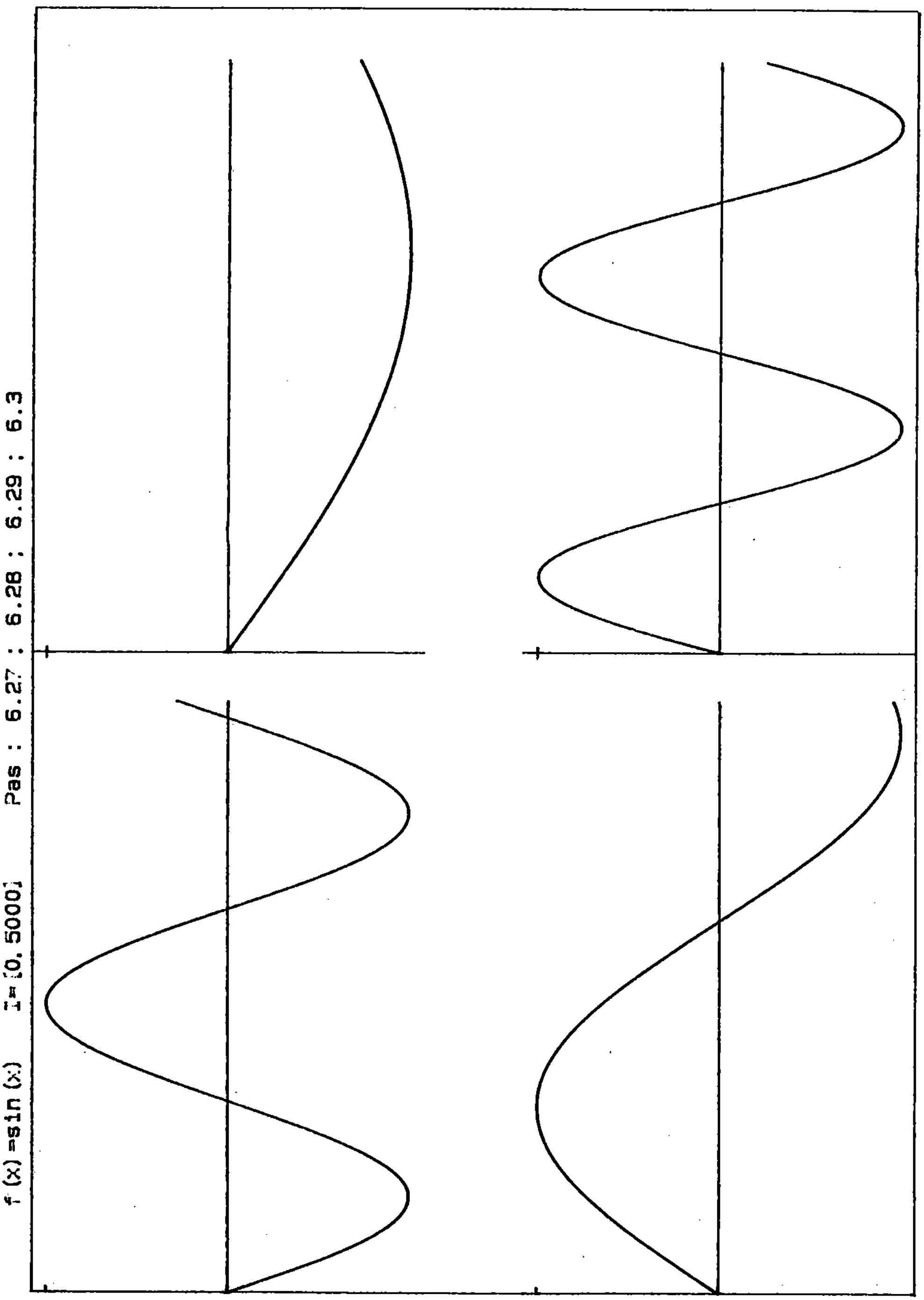

Figure 1

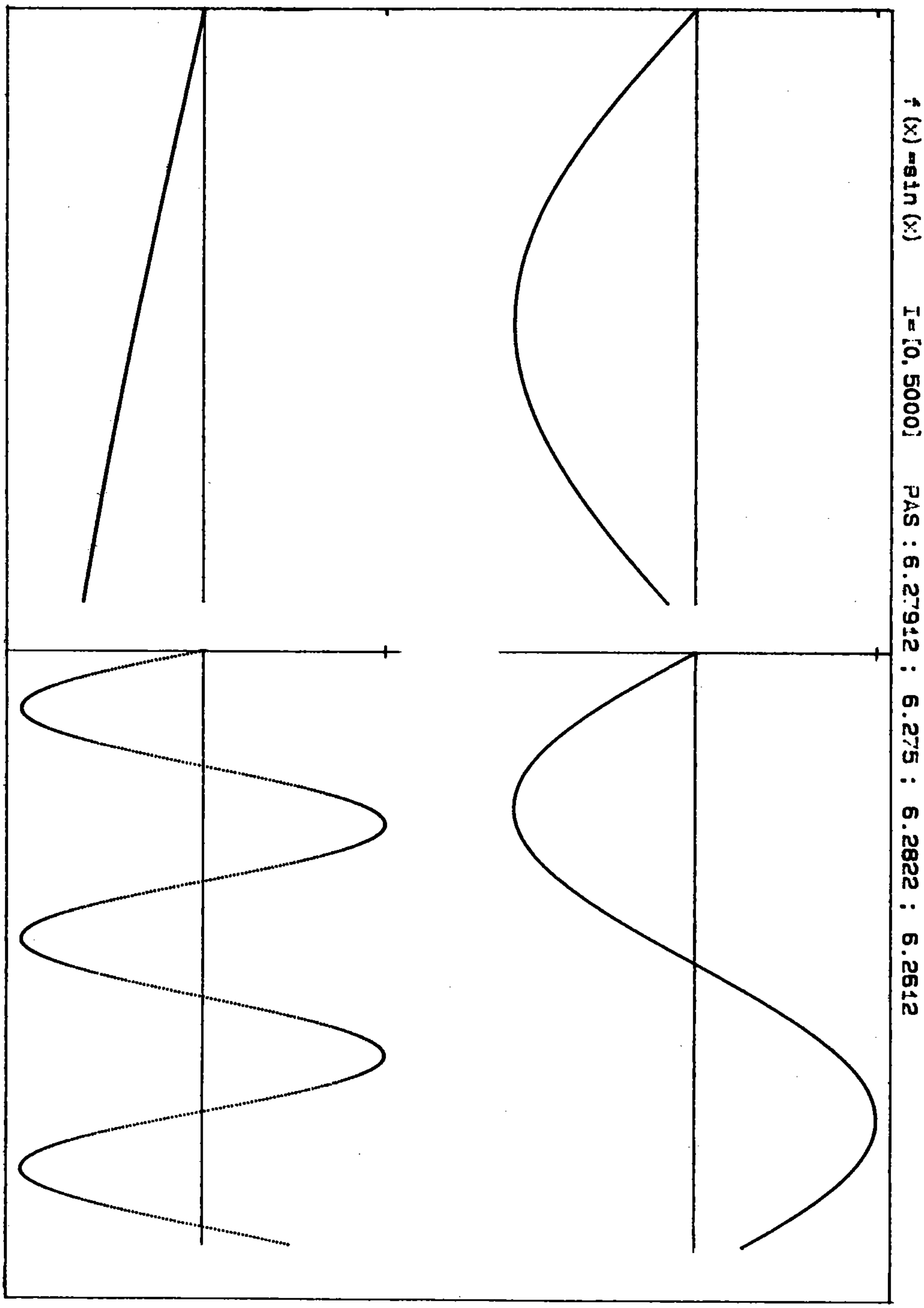

Figure 2

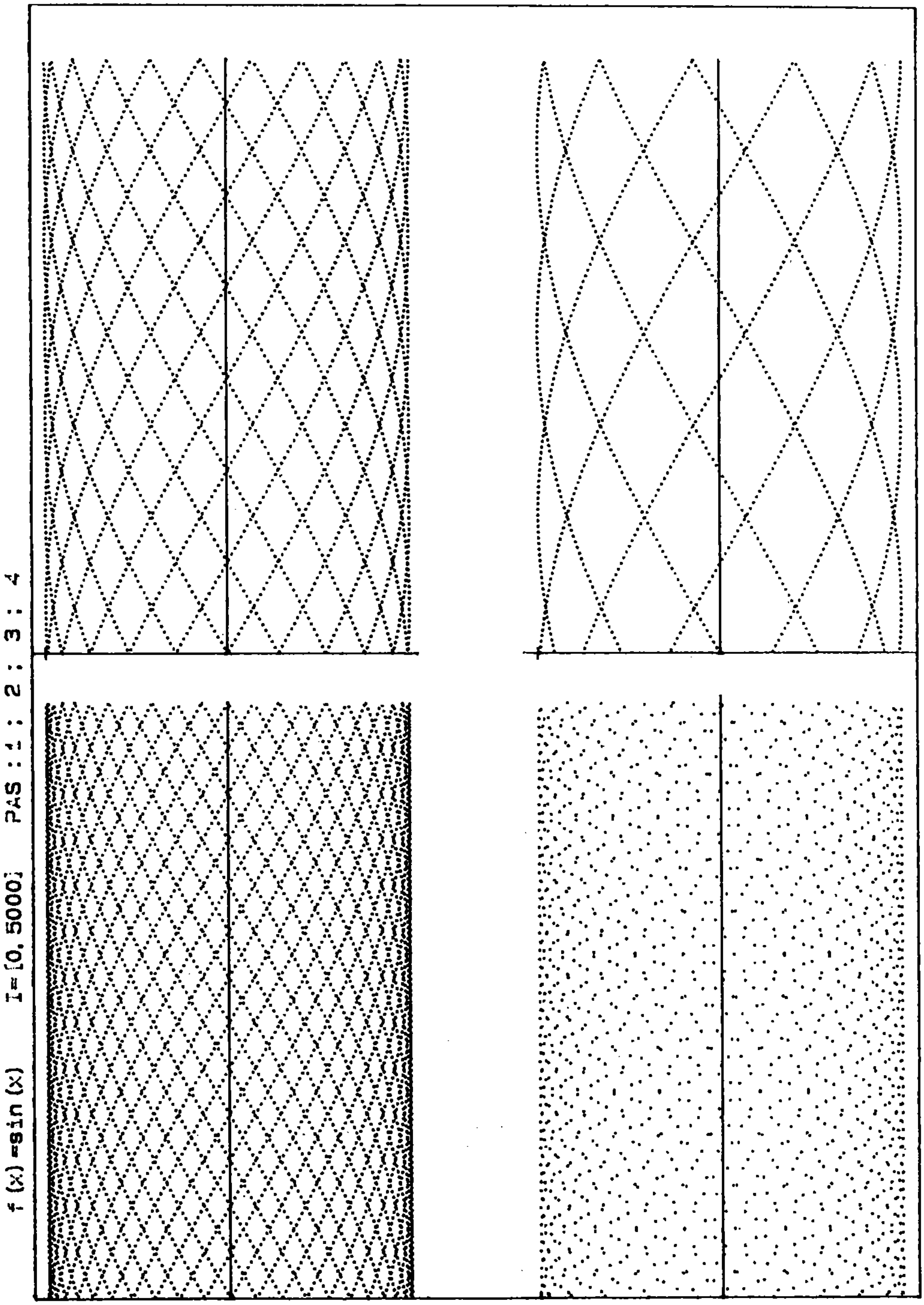

Figure 3

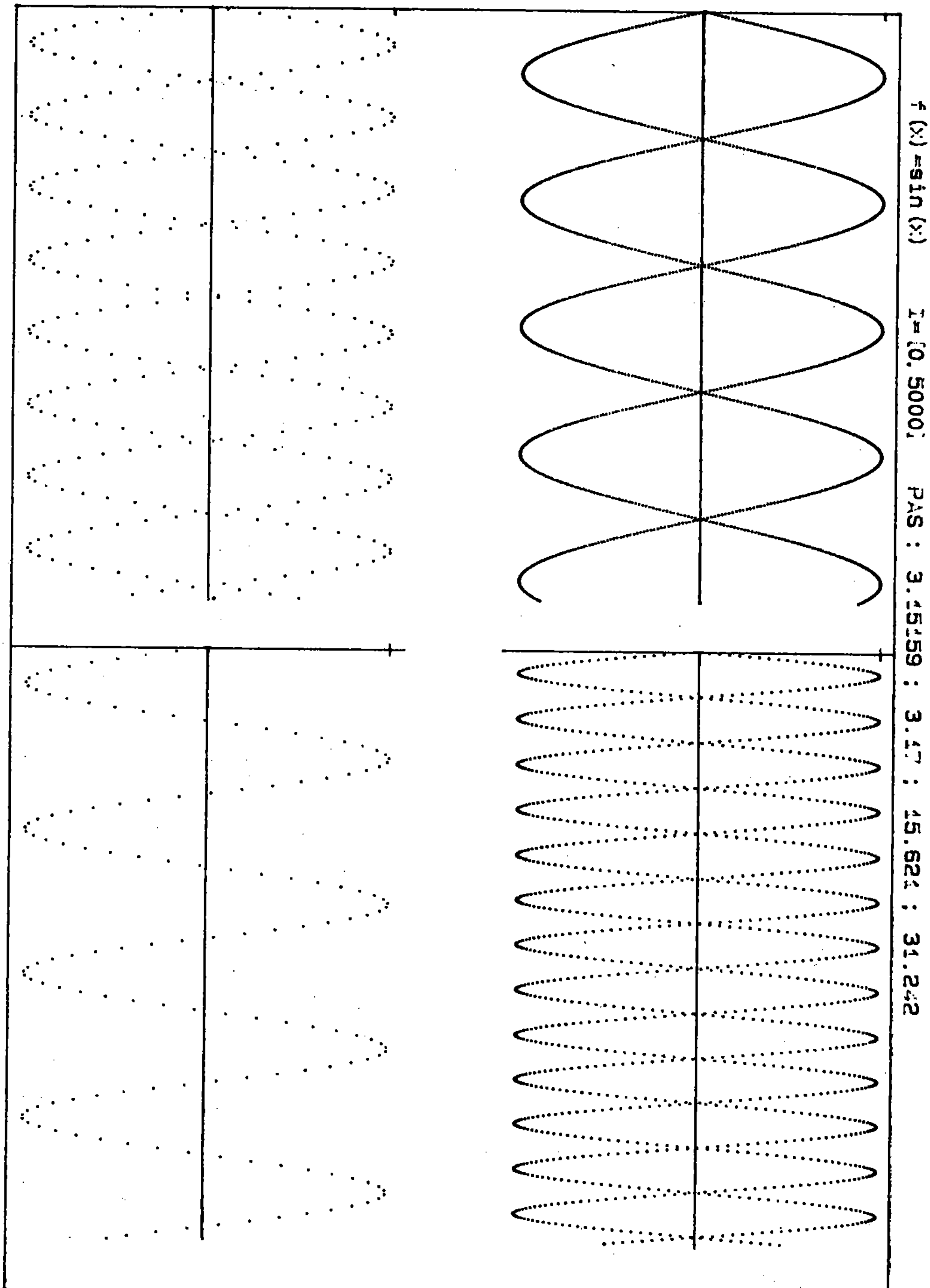

Figure 4

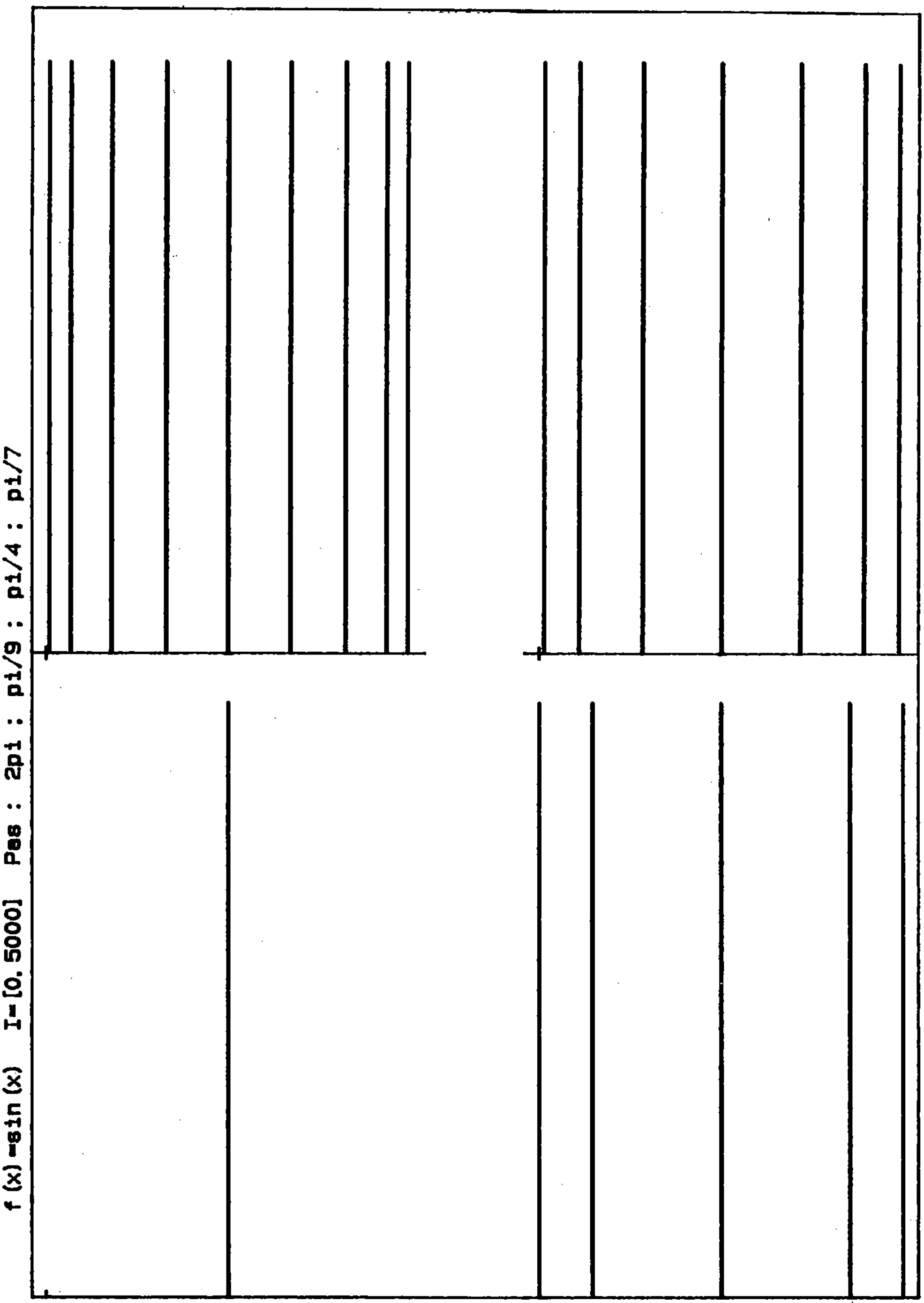

Figure 5

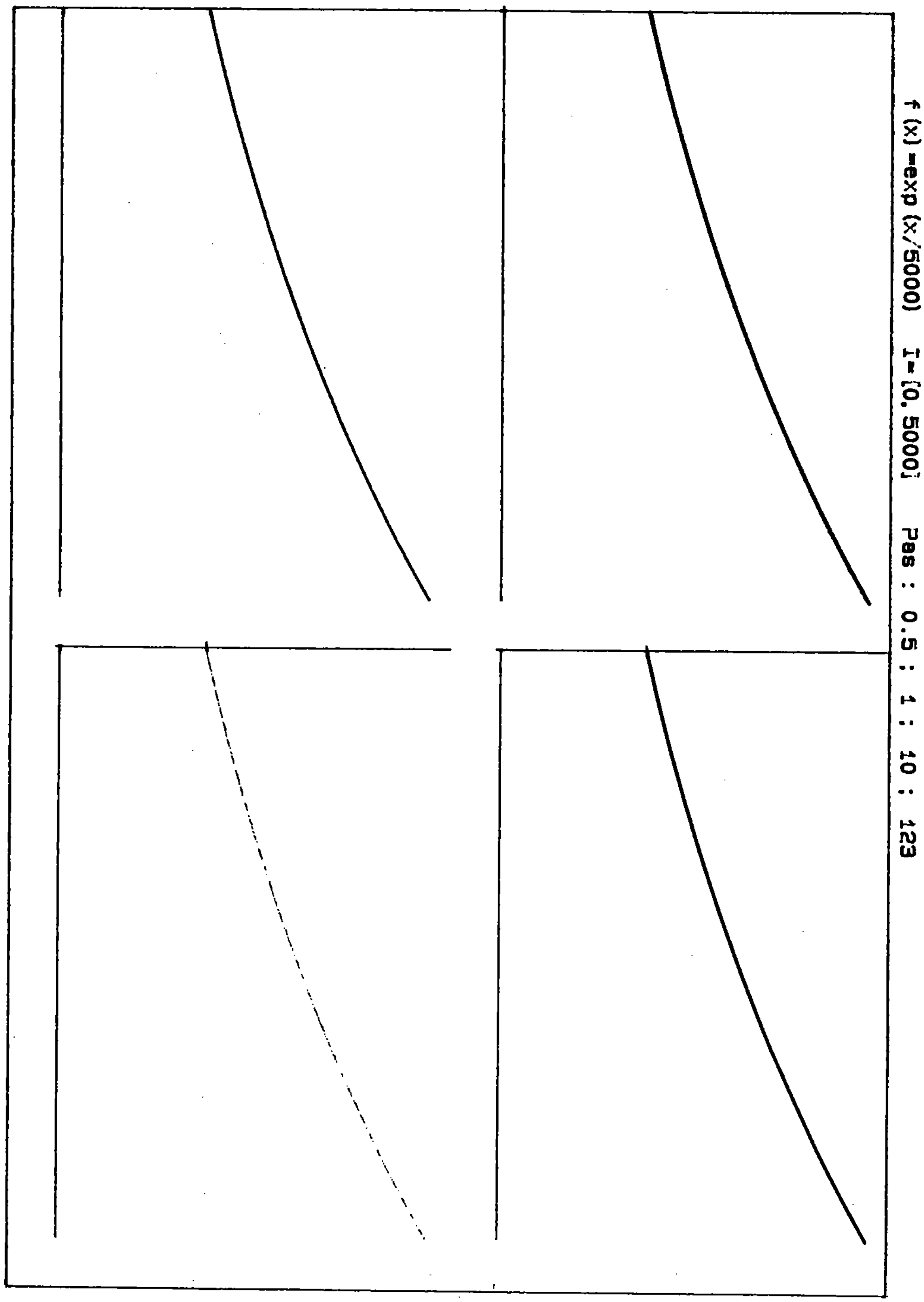

Figure 6

(Figures 1 à 5). Le seul paramètre modifié est le pas du partage. Le tracé est fait point par point (deux points consécutifs ne sont pas reliés). Les élèves de seconde, qui ont réalisé ces tracés sur ordinateur sont fort surpris de ce qu'ils découvrent : une de ces courbes, au plus, est (peut-être) "juste". En début de seconde où se situe cette activité, ils ne connaissent pas les variations du sinus. Mais ils s'aperçoivent sans peine que les différents tracés ne sont pas superposables, et qu'ils correspondent à des variations incompatibles. Ils remarquent aussi que plusieurs tracés ne correspondent pas à des courbes représentatives de fonctions. Enfin l'apparition de nuages de points sans cohérence les trouble beaucoup.

De l'observation et de la surprise, on passe à l'explication du phénomène. C'est le moment de mettre en œuvre les calculatrices pour dérouler "à la main" l'algorithme de passage du plan mathématique à l'écran graphique. Il n'est pas besoin d'aller dans tous les détails (la note 3 donne le description fine des procédures mises en œuvre : elle permet d'expliquer les tracés étonnants que l'on obtient). L'activité pourra être reprise en première lorsque la fonction sinus aura livré ses secrets. Elle leur aura instillé un doute salutaire quant à l'infaillibilité attribuée à l'outil informatique.

Une objection fréquente relevée avec des élèves ou des enseignants en formation, mérite d'être signalée : l'incertitude du tracé viendrait de ce que l'intervalle d'étude serait trop grand. Or on a la même situation avec la fonction définie par g(x) = sin (5000 * x) sur [0,1]. D'autre part la fonction donnée par h(x) = exp(x / 5000) sur [0,5000] échappe totalement aux tracés multiformes (Figure 6). La longueur de l'intervalle n'est pas en cause ; c'est la trop grande richesse de l'information que contient la courbe au point de vue de ses variations qui rend impossible un tracé correct sur un écran graphique. Le support est trop pauvre pour rendre compte de la complexité de la courbe initiale.

Mais comment connaître *a priori* le degré de complexité d'une fonction si on n'a pas un minimum d'outils mathématiques de prévision ou de contrôle ? Faute de moyens théoriques, on est conduit à postuler que les fonctions étudiées au lycée ne dépassent jamais le seuil de complexité qui affole une calculatrice ! Les sujets d'examens confortent d'ailleurs les élèves dans cette tranquille certitude.

Gare aux "détails"

Revenons un instant au point de vue local. Soit la fonction définie par :

f(x) = x * (x – 0.1) * (x – 0.001)

dans [-5,5]. Si on donne cette fonction sous forme développée et si on demande à une classe de seconde de conjecturer à propos des variations de cette fonction avec le seul outil graphique, la quasi-totalité de la classe déclare la fonction croissante. Il y a certes quelques froncements de sourcils devant le caractère stationnaire de la courbe près de l'origine. Il est rare que le hasard ou une exploration méthodique fasse découvrir le pot aux roses. Un zoom sur les intervalles intéressants fait sentir aux élèves le fait que les détails fins échappent au regard posé sur l'écran graphique. Pour les appréhender, des outils mathématiques s'avèrent indispensables.

Avec des élèves de fin de seconde ou de première, on peut enfoncer le clou en proposant une étude graphique de la classique

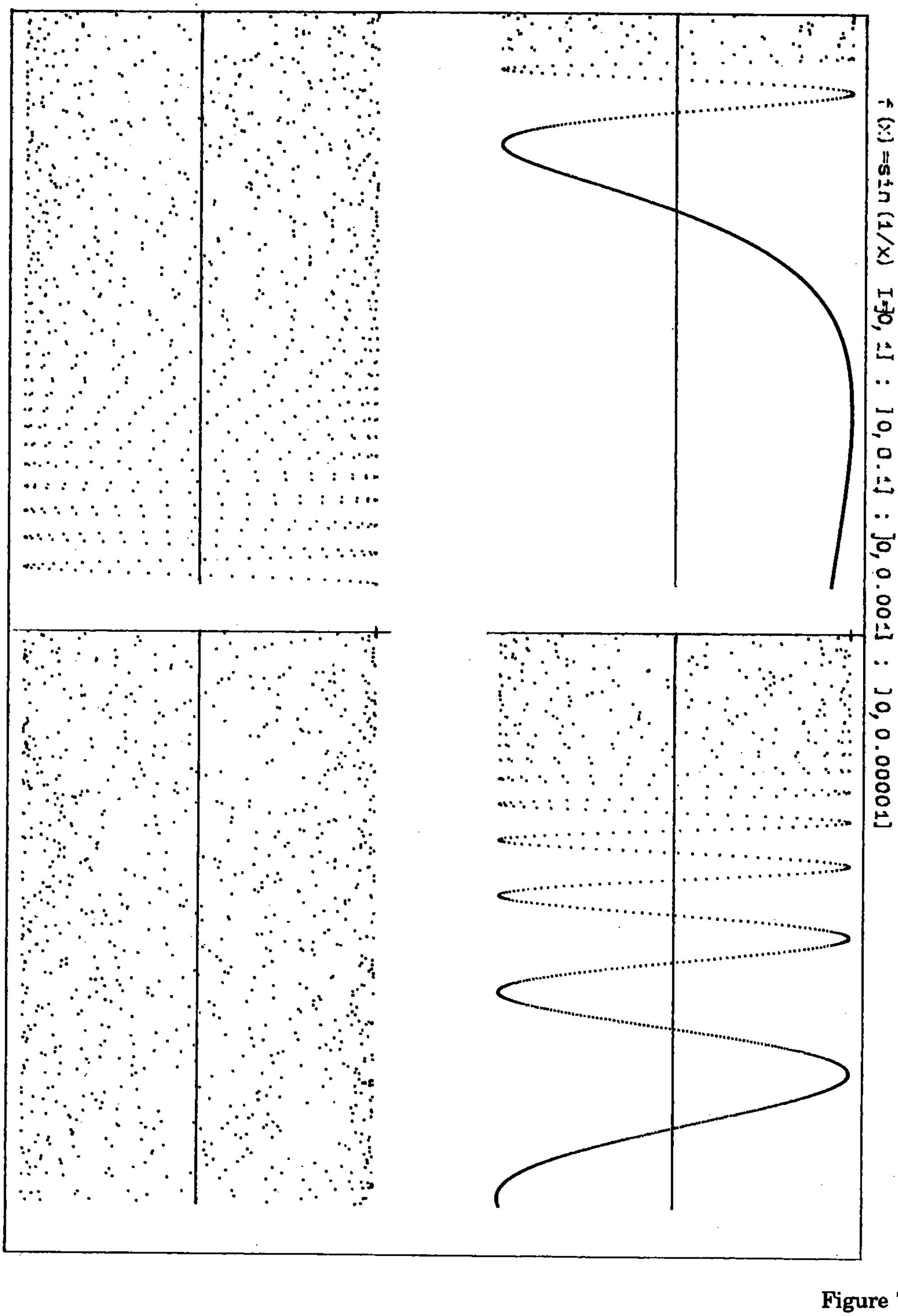

Figure 7

fonction définie par f(x) = sin (1 / x) sur]0,1] (figure 7). Le nuage incohérent qui se forme du coté de l'origine ne se dissipe guère si l'on zoome au hasard. Il suffit en revanche de s'intéresser aux intervalles formés par deux racines consécutives de f(x)=0 pour que des tracés "lisibles" soient mis à jour. Cette lisibilité ne prouve évidemment pas l'exactitude mathématique des tracés obtenus. Il reste à justifier la correction des courbes obtenues et à constater que les intervalles étant en nombre infini, une description abstraite de la fonction est indispensable. Enfin, au fur et à mesure que l'on s'approche de 0, la longueur de l'intervalle considéré tend vers 0 : c'est l'occasion de montrer que l'outil de calcul jette l'éponge en dessous d'un certain seuil, et qu'en guise de dessin, c'est un message d'erreur qui s'affiche.

L'impossible continuité.

La façon dont sont construites les courbes sur écran graphique exclut toute possibilité de discours sensé sur la continuité de la fonction concernée. Le processus qui conduit au tracé sur l'écran est par nature discontinu. Le tracé continu que l'on peut observer parfois, résulte de mauvaises raisons : on a joint deux pixels consécutifs par un segment, le nombre de points de subdivision est égal au nombre de pixels d'une ligne de l'écran, et la fonction varie peu entre deux abscisses consécutives. Deux pixels consécutifs peuvent alors devenir contigus, donnant l'illusion de la continuité de la courbe initiale. De curieux phénomènes se font jour à ce propos. La courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ est continue sur [0,1]. Sa croissance est rapide près de l'origine. Un tracé avec 640 points donne l'impression de discontinuités près de 0. Le tracé continu prévaut pour la suite de l'intervalle. En diminuant le pas, le trait continu s'impose dans [0,1] (Figure 8). Bien entendu, tous ces tracés "continus" ne sont qu'illusion, car entre deux pixels contigus, il manque une infinité de points. Pour les mêmes raisons, une fonction discontinue peut être représentée sur l'écran par une courbe continue. (Les algorithmes de la note 3 permettent de simuler les phénomènes précédents.)

L'atout de la pauvreté

Le côté rudimentaire de l'écran graphique présente parfois certains avantages. Il devient alors l'allié involontaire du pédagogue. L'activité que voici précède, en première, l'introduction de la dérivée. Elle utilise le logiciel Graph'x, qui met à la disposition de l'utilisateur un paramètre réel k.

Soient sur la parabole P d'équation $y = f(x) = x^2 - 2.x + 3$ le point A de coordonnées (2,3) et le point M de coordonnées (k,f(k)), k étant distinct de 2 .

On désigne par D(k) la droite (AM). On se demande comment évolue la droite D(k) quand M s'approche de A (en restant sur la parabole), c'est-à-dire quand k tend vers 2. Il suffit de préciser les valeurs de k et de lancer le tracé de P et des diverses droites D(k) qui se superposent à l'écran. On choisit par exemple la suite des valeurs de k que voici : 3 ; 1,5 ; 2,01 ; 1,9999 ; 2,00001 ; 1,9999999 ; $2 - 10^{-10}$. Contrairement à l'attente, trois droites seulement sont tracées, les autres étant confondues avec la troisième. Cette surimpression se traduit par un tracé plus épais pour la droite concernée (Figure 9). La notion de "position limite" d'une sécante est clairement mise en évidence. On peut déterminer une valeur approchée du coefficient directeur de cette droite en lisant les coordonnées d'un point de ses points situé à bonne distance

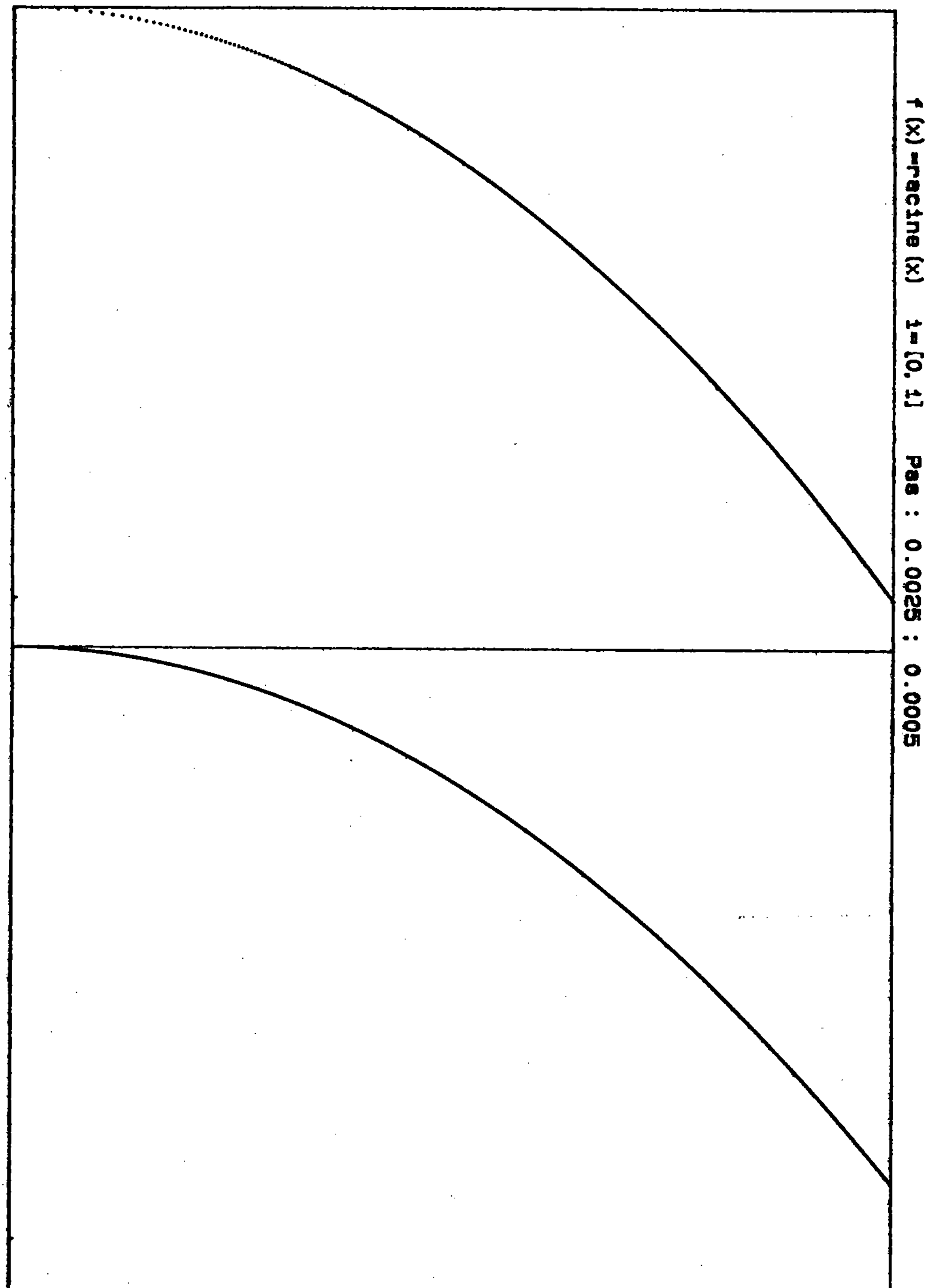

Figure 8

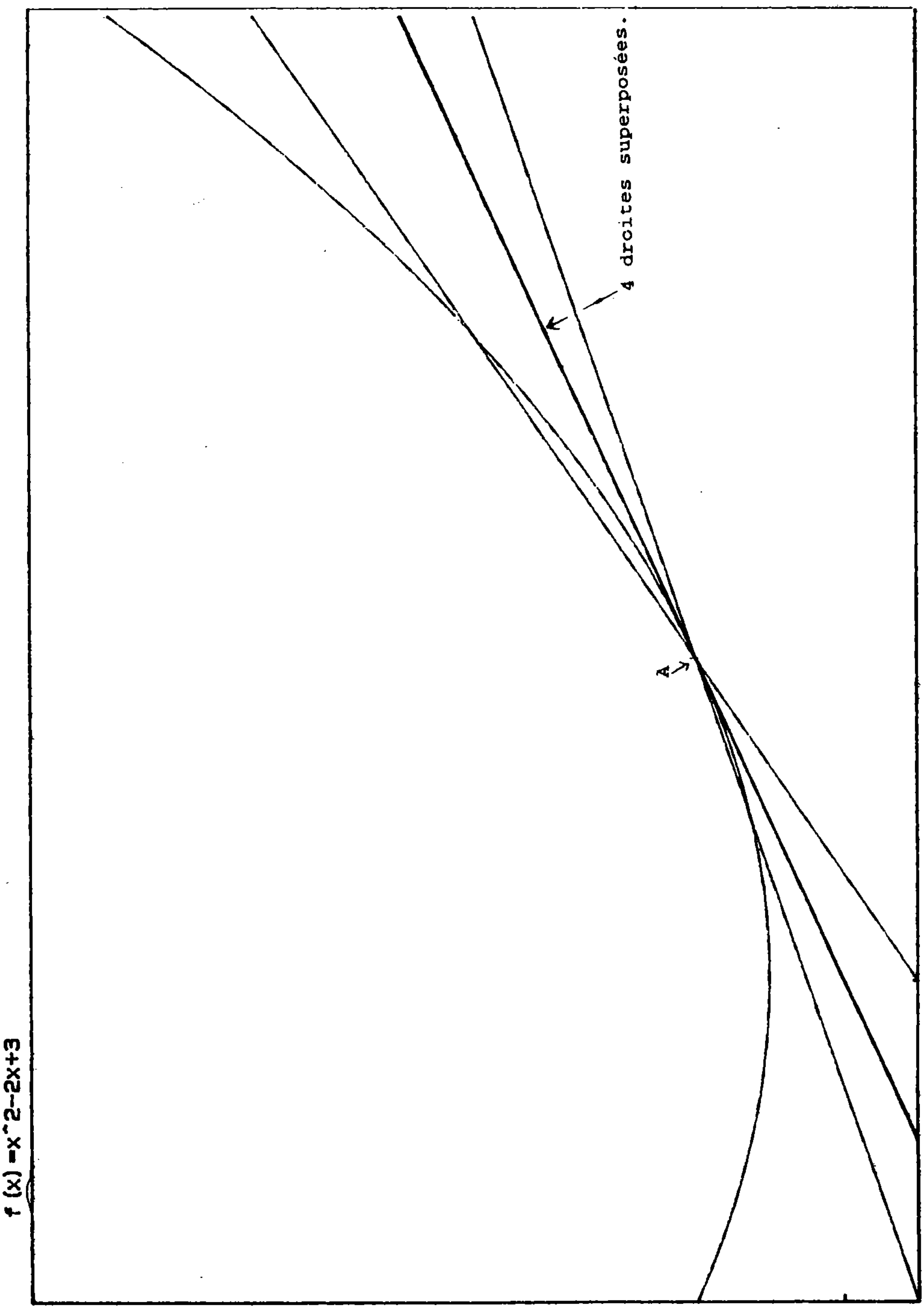

Figure 9

de A : il suffit de déplacer un curseur dont les coordonnées s'affichent au fur et à mesure. Cette activité s'accompagne d'une réflexion sur le caractère précocément stationnaire de la sécante, dû au fait qu'entre deux pixels contigus, il n'y a rien. Le calcul du coefficient directeur de D(k) et sa limite lorsque k tend vers 1, permettent de bien comprendre la situation, et préparent l'introduction de la notion de dérivée.

D'autres exemples attestent que la notion de tangente, mise en évidence sur cet exemple est généralisable. Pour clore la séance, il est utile de donner des contre-exemples.

La fonction définie par $f(x) = x * \sin(1/x)$ pour x différent de 0 , et par $f(0) = 0$ est de nature à éveiller une certaine prudence... Une courbe présentant un point anguleux complétera le tableau.

Un seul nombre vous manque et tout est dépeuplé

Il est rare qu'un utilisateur s'interroge sur les nombres utilisés par les moyens de calcul numérique. Il convient d'expliquer à nos élèves, le plus tôt possible qu'il y a quelques légères différences entre l'ensemble des réels et l'ensemble des nombres dont est pourvu leur instrument de calcul... (2)

Les nombres positifs, disponibles sur une calculatrice ou un logiciel, forment un sous-ensemble des nombres décimaux. Ils sont, sauf 0, compris entre 10^{-m} et 10^{m} , m étant un entier positif qui dépend du type de la machine. ils se présentent sous la forme : mantisse $* 10^{\text{exposant}}$. La mantisse, comprise entre 1 et 10, a un nombre donné de chiffres, fonction de la calculatrice. Ces quelques faits ont des conséquences considérables dont certaines seront développées dans la suite de l'article.

En particulier, les irrationnels n'ont aucune existence pour une calculatrice. Cela ne trouble pas, en général, les élèves pour qui l'écriture $\sqrt{3} = 1{,}732$ n'a rien de scandaleux. Et pourtant... cette assimilation abusive conduit à d'énormes erreurs numériques comme le montre l'activité proposée par l'Irem de Strasbourg et reprise par Aline Robert dans son article "Eléments de réflexion sur l'utilisation numérique des calculatrices programmables en première S et en terminale C et E", dans ce même numéro de "Repères" :

si $\sqrt{3} = 1{,}7320508$, alors $1 = 708158978$!

Dans le problème qui suit, l'absence de la valeur exacte de racine de 5 conduit à une situation paradoxale et fort instructive, étudiée et mise en forme par Nicole Vogel, de l'Irem de Strasbourg.

Le zéro et l'infini

On considère la suite de Fibonacci définie par :

$$u(n+2) = u(n+1) + u(n) ;$$

$$u(0) = 1 ; u(1) = (1 - \sqrt{5}) / 2 .$$

Un court programme sur ordinateur permet d'explorer le comportement de la suite : très rapidement, les premiers termes oscillent autour de 0, puis les valeurs approchées de u(n) croissent fortement comme l'indique le tableau 1. D'après ce calcul, u(100) est voisin de $2.6 * 10^{8}$. D'ici à conjecturer que la limite de u(n) est "plus l'infini", il n'y a qu'un pas, que nous nous

Tableau 1. Suite de Fibonacci : valeurs "approchées"

u(1) =	1,0000000000 E − 00	u(51) =	1,4777759383 E − 02
u(2) =	−6,1803398875 E − 01	u(52) =	2,3910916880 E − 02
u(3) =	3,8196601125 E − 01	u(53) =	3,8688676263 E − 02
u(4) =	−2,3606797750 E − 01	u(54) =	6,2599593142 E − 02
u(5) =	1,4589803375 E − 01	u(55) =	1,0128826940 E − 01
u(6) =	−9,0169943744 E − 02	u(56) =	1,6388786255 E − 01
u(7) =	5,5728090010 E − 02	u(57) =	2,6517613195 E − 01
u(8) =	−3,4441853733 E − 02	u(58) =	4,2906399450 E − 01
u(9) =	2,1286236277 E − 02	u(59) =	6,9424012645 E − 01
u(10) =	−1,3155617457 E − 02	u(60) =	1,1233041210 E − 00
u(11) =	8,1306188204 E − 03	u(61) =	1,8175442474 E − 00
u(12) =	−5,0249986361 E − 03	u(62) =	2,9408483684 E − 00
u(13) =	3,1056201842 E − 03	u(63) =	4,7583926158 E − 00
u(14) =	−1,9193784519 E − 03	u(64) =	7,6992409841 E − 00
u(15) =	1,1862417323 E − 03	u(65) =	1,2457633600 E + 01
u(16) =	−7,3313671965 E − 04	u(66) =	2,0156874584 E + 01
u(17) =	4,5310501264 E − 04	u(67) =	3,2614508184 E + 01
u(18) =	−2,8003170701 E − 04	u(68) =	5,2771382768 E + 01
u(19) =	1,7307330563 E − 04	u(69) =	8,5385890951 E + 01
u(20) =	−1,0695840137 E − 04	u(70) =	1,3815727372 E + 02
u(21) =	6,6114904257 E − 05	u(71) =	2,2354316467 E + 02
u(22) =	−4,0843497118 E − 05	u(72) =	3,6170043839 E + 02
u(23) =	2,5271407139 E − 05	u(73) =	5,8524360306 E + 02
u(24) =	−1,5572089978 E − 05	u(74) =	9,4694404145 E + 02
u(25) =	9,6993171610 E − 06	u(75) =	1,6321876445 E + 03
u(26) =	−5,8727728174 E − 06	u(76) =	2,4791316860 E + 03
u(27) =	3,8265443436 E − 06	u(77) =	4,0113193305 E + 03
u(28) =	−2,0462284738 E − 06	u(78) =	6,4904510164 E + 03
u(29) =	1,7803158698 E − 06	u(79) =	1,0501770347 E + 04
u(30) =	−2,6591260394 E − 07	u(80) =	1,6992221363 E + 04
u(31) =	1,5144032659 E − 06	u(81) =	2,7493991710 E + 04
u(32) =	1,2484906620 E − 06	u(82) =	4,4486213073 E + 04
u(33) =	2,7628939279 E − 06	u(83) =	7,1980204784 E + 04
u(34) =	4,0113845898 E − 06	u(84) =	1,1646641786 E + 05
u(35) =	6,7742785177 E − 06	u(85) =	1,8844662264 E + 05
u(36) =	1,0785663108 E − 05	u(86) =	3,0491304050 E + 05
u(37) =	1,7559941625 E − 05	u(87) =	4,9335966314 E + 05
u(38) =	2,8345604733 E − 05	u(88) =	7,9827270363 E + 05
u(39) =	4,5905546358 E − 05	u(89) =	1,2916323668 E + 06
u(40) =	7,4251151091 E − 05	u(90) =	2,0899050704 E + 06
u(41) =	1,2015669745 E − 04	u(91) =	3,3815374372 E + 06
u(42) =	1,9440784854 E − 04	u(92) =	5,4714425076 E + 06
u(43) =	3,1456454599 E − 04	u(93) =	8,8529799447 E + 06
u(44) =	5,0897239453 E − 04	u(94) =	1,4324422452 E + 07
u(45) =	8,2353694052 E − 04	u(95) =	2,3177402397 E + 07
u(46) =	1,3325093350 E − 03	u(96) =	3,7501824849 E + 07
u(47) =	2,1560462756 E − 03	u(97) =	6,0679227246 E + 07
u(48) =	3,4885556106 E − 03	u(98) =	9,8181052096 E + 07
u(49) =	5,6446018862 E − 03	u(99) =	1,5886027934 E + 08
u(50) =	9,1331574968 E − 03	u(100)=	2,5704133144 E + 08

garderons de franchir. En effet, il est facile de montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $u(n) = ((1 - \sqrt{5}) / 2)^n$.

Cette suite géométrique de raison voisine de (– 0,618) converge vers 0 ! La programmation de la suite sous la forme précédente confirme évidemment ce résultat.

La raison de l'énigme réside en fait dans l'ABSENCE de VALEUR EXACTE de la racine de 5 . Posons $k = (1 - \sqrt{5}) / 2$. k est irrationnel. Dans le programme, k est remplacé par une valeur approchée décimale, c, vérifiant $k = c + \mu$, μ étant un irrationnel très voisin de 0 , MAIS DISTINCT DE 0. La suite initiale u(n) est donc remplacée par une suite w(n) définie par :

$w(n+2) = w(n+1) + w(n)$; $w(0) = 1$; $w(1) = c$.

On montre alors par récurrence que w(n) peut se mettre sous la forme w(n) =

$\mu / \sqrt{5} * ((1 + \sqrt{5}) / 2)^n + (1 - \mu / \sqrt{5}) * k^n$.

On comprend dès lors la simulation du début du problème : pour les premières valeurs de n, le premier terme est négligeable et la suite w(n) se comporte à peu de choses près comme u(n) , ($\mu / \sqrt{5}$ est très voisin de 0) ; quand n croît, le second terme, dans lequel k est remplacé par c, devient négligeable et le premier finit par devenir très grand et par tendre vers l'infini. La simulation est donc tout à fait correcte, mais porte sur une suite w(n) autre que la suite donnée !

La différence entre les deux suites porte sur une valeur initiale de $(1 - \sqrt{5})/2$ dans un cas, de –0.61803398875 dans l'autre. Petite cause, grands effets. Dans cette situation, on a beau améliorer la précision, le paradoxe demeure : il disparaît pour la seule valeur $\mu=0$, qui correspond à une impossibilité, un irrationnel n'étant pas un décimal. Nous tenons là une belle occasion de faire réfléchir les élèves sur les différences profondes entre ces deux types de nombres.

Une remarque : quand on programme u(n) sous la forme $((1 + \sqrt{5}) / 2)^n$, la suite u est elle aussi remplacée par une suite v définie par $v(n) = c^n$. Mais la substitution est sans conséquences car c est compris entre –1 (exclu) et 0. Seules les valeurs numériques sont légèrement affectées (la suite n'est pas récurrente) et la limite n'est pas modifiée.

Vous avez dit "Chaos" ?

La suite de Fibonacci étudiée ci-dessus présente une extrême sensibilité aux conditions initiales. Le cas n'a rien d'exceptionnel. L'article de Jean Brette "Itérations et systèmes dynamiques", paru dans le numéro 9 de "Repères" en fournit d'intéressants exemples. On trouve cette situation pour de nombreuses suites récurrentes du type : $x(0) = k$; $x(n+1) = f(x(n))$, f n'étant pas linéaire. Le cas de la fonction définie par $f(x) = p * x * (1 - x)$, p étant un paramètre réel, est étudié en détail par Jean-Marie Vigoureux dans "L'approche du chaos" (Irem de Besançon, mars 89). Le système commandé par cette relation n'est plus du tout prévisible et dépend de manière très sensible des conditions initiales. En d'autres termes, la prévision du comportement du système au bout d'un temps assez long (n grand), nécessiterait une connaissance de ces conditions initiales avec une précision impossible à réaliser. La simulation de son évolution est impossible avec un outil de calcul numérique. On reconnaît dans ce qui précède, une situation dite "CHAOTIQUE". Ce terme, particulièrement malheureux, couvre des situations nombreuses dans des domaines très variés (chimie, physique, économie). L'article et la brochure cités plus haut seraient un excellent point de départ pour un module de terminale, réservé à un groupe d'élèves curieux et combatifs. L'ouvrage de Prigogine et Stengers, "Entre le temps et l'éternité", (note de lecture dans Repères n° 9), leur ouvrirait de passionnantes perspectives.

Au delà de cette limite, le ticket n'est plus valable

La recherche de limites est un domaine par excellence ou nos élèves usent et abusent de la calculatrice. Est-ce bien raisonnable ?

La notion de limite présente de réelles difficultés pour les élèves de première et de terminale. Les programmes excluent la définition mathématique formalisée, la seule qui soit rigoureuse. L'usage des suites ou des fonctions de référence ne fait que déplacer le problème : quel sens précis faut-il donner à la phrase " la suite u définie par $u(n)=n^2$ tend vers plus l'infini quand n tend vers l'infini " ? L'enseignant donne en français la traduction suivante : " on peut rendre u(n) supérieur à tout nombre donné, aussi grand soit-il, pourvu que n soit assez grand ". Et parce qu'il a compris la notion (c'est le cas de la majorité d'entre eux), il imagine que cette phrase est claire pour ses interlocuteurs. L'élève moyen, qui connaît la propension de ses maîtres à compliquer les choses, traduira la définition en ces termes : " quand n devient grand, u(n) prend des valeurs très grandes ". Cette simplification lui paraît d'autant plus raisonnable qu'il a, en seconde, approché la notion de limite en étudiant l'évolution conjointe de x et de f(x). Lorsque u(n) "croît rapidement" — ou, mieux encore, lorsqu'apparaît le message "dépassement de capacité" —, le voilà convaincu de tenir la preuve de son affirmation. Le dépassement de capacité de la calculatrice renvoie obscurément à l'expression "aussi grand soit-il" de la définition. Et voilà les confusions installées pour longtemps. (On reconnaît, en revanche la notion d'infini du physicien, dans ces conceptions inacceptables pour le mathématicien "standard" (2))

Lorsqu'une notion est par nature complexe, on ne la rend pas limpide par un habillage en français courant, ou par des manipulations sur des calculatrices. Seul un approfondissement théorique, un travail patient et répété, peuvent conduire à la compréhension de la notion de limite, qui mit historiquement des décennies à mûrir dans de grands esprits. L'usage courant de la calculatrice peut obscurcir la question en donnant l'impression que la définition compliquée peut être remplacée par des manipulations simples. D'autant qu'en cette matière, la calculatrice atteint très vite ses... limites.

En toute rigueur, on ne peut pas dire grand chose de sérieux d'une limite avec l'outil informatique. Qu'on se rappelle le segment de décimaux dont il dispose : l'impossibilité de simuler la donnée d'un nombre "aussi grand soit-il" est évidente. Or, entre un nombre "très grand" (quel sens faut-il donner à cette expression ?) et un nombre "donné, aussi grand soit-il", la différence est de nature, non de degré. La même remarque clôt le débat pour des esprits rigoureux lorsqu'on cherche la limite en 0 d'une fonction. Il manque à la calculatrice tous les réels entre 0 et 10^{-m}.

Certes, l'intervalle est petit, mais cet adjectif n'a guère de sens en mathématiques puisqu'une homothétie le transforme en [0,X], X étant un réel quelconque. Comment simuler la phrase " la valeur absolue de (f(x) – 1) peut être rendue inférieure à tout réel positif, aussi voisin de 0 soit-il, pourvu que x soit assez voisin de 0 ", alors que les deux réels voisins de 0, celui qui est donné et celui que l'on cherche, peuvent se situer dans la tache aveugle de l'instrument de calcul ?

De plus, les phrases "pourvu que n soit assez grand" et "pourvu que x soit assez voisin de 0" supposent une vérification exhaustive, pour tous les x et tous les n d'un intervalle ou d'une demi-droite. Une telle vérification est irréalisable, et nul ne songe à la faire.

Quel secours peut-on, en fin de compte, attendre de l'informatique dans ce domaine ? Dans le cas où aucun théorème général ne s'applique, lorsqu'aucune forme indéterminée connue ne permet de conclure, une simulation du comportement de la fonction, pour les valeurs de la variable voisines de 0 ou grandes, jusqu'aux limites des possibilités de l'instrument, peut aider une imagination en panne. Les tendances décelées, si elles existent, doivent être prouvées par un raisonnement : rien ne permet d'affirmer qu'elles demeurent au delà des limites de l'instrument de calcul, ni même qu'elles ne constituent pas une fausse piste. Les conjectures que permet cette simulation sont marquées du sceau de la fragilité.

Deux exemples illustrent l'extrême prudence qu'exige cette démarche.

a) La simulation du comportement de la suite u définie par $u(n)=(1000^n)/n!$ ne conduit pas très loin. Très rapidement, la valeur de 1000^n dépasse les capacités de calcul de la machine. On peut retarder ce moment en programmant la valeur de u(n) par itération : « pour i de 1 à n répéter u = u * 1000 / i ». Là encore, après une croissance explosive, la calculatrice jette l'éponge. De là à conjecturer que u(n) tend vers plus l'infini quand n tend vers l'infini, il n'y a qu'un pas, et nombreux sont ceux qui le franchiront allègrement. Or, l'examen de la structure de u(n) permet une étude théorique à la portée des élèves de première.

En effet, $u(n+1) = u(n) * 1000/(n+1)$, donc, pour $n < 999$, u(n+1) est supérieur à u(n), et à partir de 1000, la suite se met à décroître. Cette phase de décroissance n'apparaît pas à la simulation, car les valeurs numériques mises en jeu sont inaccessibles aux calculatrices habituelles.

Pour $n > 1000$, posons $n = 1000 + k$, alors u(n) s'écrit :

$u(1000) * (1000/10001) * ... * (1000/(1000+k))$.

u(n) est donc majorée par :

$$u(1000) * (1000/1001)^k .$$

Cette suite géométrique converge vers 0. La limite de u(n) est donc nulle.

On peut multiplier à loisir des exemples de suites ou de fonctions dont le comportement effectif à l'infini ou en 0 s'écarte du comportement simulé sur machine. Le prolongement des courbes dans les zones aveugles de la calculatrice ne constitue pas, à lui seul, une attitude scientifique et présente de gros risques. Les conjectures que permet la calculatrice doivent passer au crible de la critique et n'être acceptées qu'après démonstration.

b) La suite u telle que $u(n) = (1+1/n)^n$ met à jour une autre classe d'errements souvent observés. Quand n croît, les valeurs approchées s'accumulent autour de 2,71 , puis brusquement, à partir d'un certain seuil, passent à 1, valeur stable jusqu'aux limites de l'instrument. Or il est facile de montrer que la limite à l'infini de u(n) est égale à e. Le phénomène s'explique par le format des nombres en machine. Prenons l'exemple d'une mantisse à 10 chiffres. Si $n=10^5$ la valeur affichée de 1+1/n est 1.00001. Pour $n=10^{10}$ on devrait avoir à l'écran la valeur 1.0000000001. Mais le onzième chiffre ne peut être pris en compte et le résultat affiché est 1. A partir de là, plus de mystère : u(n), calculée sous la forme 1^n reste constante. La raison du phénomène réside dans la différence trop importante d'ordre de grandeur entre 1 et 1/n. La valeur intrinsèque de 1/n n'est pas en cause, contrairement à certaines explications superficielles : $10^{15} + 10^{19}$ est affiché sans problème sous la forme $1.0001 * 10^{15}$. Le format des nombres en machine permet aussi de rendre compte des très intéressants exemples donnés par A. Robert : suites convergeant vers une limite autre que celle conjecturée, suites divergentes alors que la simulation informatique laisse présager une limite finie.

On l'aura compris : tout peut arriver si l'on se contente de faire confiance à un instrument de calcul. La démonstration peut seule emporter l'adhésion sans réserves. (5)

Petite cause, grands effets

Comment les solutions d'un système linéaire réagissent-elles à une modification légère de ses coefficients ?

L'exercice qui suit est extrait de l'ouvrage de terminale CE de Nathan (Transmath). Il met en évidence l'instabilité des solutions de certains systèmes linéaires par rapport à une faible variation des coefficients. Pour que les conclusions soient incontestables, il faut le résoudre à la main ou avec un logiciel capable de calculer les valeurs exactes. DERIVE convient à ce type de travail qu'il allège considérablement. Voici ce système :

$$\begin{aligned} 10x + 7y + 8z + 7t &= 32 \\ 7x + 5y + 6z + 5t &= 23 \\ 8x + 6y + 10z + 9t &= 33 \\ 7x + 5y + 9z + 10t &= 31 \end{aligned}$$

On trouve : $x = y = z = t = 1$.

Si l'on modifie les coefficients du second membre de 0,1 , en les remplaçant par 32,1 ; 22,9 ; 33,1 et 30,9 (les autres coefficients n'étant pas altérés), les solutions deviennent :

$$x = 9{,}2 \ ; \ y = -12{,}6 \ ; \ z = 4{,}5 \ ; \ t = -1{,}1 .$$

La surprise est de taille ! Il est alors naturel de se demander comment ce système réagit à d'autres variations de ses coefficients. En prenant comme second membre les réels 32,01 ; 22,09 ; 33,01 ; 30,09 (soit une variation d'un centième), les conséquences sont encore plus spectaculaires :

$$x = 44{,}12 \ ; \ y = -70{,}56 \ ; \ z = 19{,}35 \ ; \ t = -10{,}01 .$$

Si la variation porte sur le millème avec la suite de seconds membres 32,001 ; 22,009 ; 33,001 ; 30,009 , la perturbation des solutions est du même ordre que dans le cas précédent :

$$x = 47{,}612 \ ; \ y = -76{,}356 \ ;$$
$$z = 20{,}835 \ ; \ t = -10{,}901 .$$

Enfin le système :

$$10x + 7y + 8z + 7{,}2t = 32$$
$$7{,}08x + 5{,}04y + 6z + 5t = 23$$
$$8x + 5{,}98y + 9{,}89z + 9t = 33$$
$$6{,}99x + 4{,}99y + 9z + 9{,}98t = 31$$

a pour solution :

$x = -0{,}267922$; $y = 2{,}93652$;
$z = 0.649764$; $t = 1{,}23964$.

Ces valeurs sont *exactes*, et non approchées. Davantage de perturbations semblent conduire à de moindres conséquences.

Pour qui connaît l'algorithme du "pivot de Gauss", ce qui précède conduit à une légitime inquiétude. Quelles sont les garanties de simple vraisemblance des solutions calculées à partir d'approximations des coefficients ? La transformation du système initial en un système triangulaire utilise de nombreuses divisions qui font appel à des valeurs approchées. Si les systèmes sont théoriquement équivalents, le restent-ils au point de vue des résultats numériques ? Dans quelles conditions ? (6) On le voit, l'utilisation d'instruments de calcul numérique pose autant de questions qu'elle en résout.

Sœur Anne, ne vois-tu rien venir ?

Point n'est besoin d'être prophète pour annoncer une nouvelle et prochaine vague de bouleversements dans la pédagogie des mathématiques. L'outil de calcul numérique s'est imposé sans que la majorité des enseignants l'aient voulu. Leur absence de maîtrise a conduit à une pratique "sauvage" et sans valeur intellectuelle de ce très bel instrument. L'arrivée des outils de calcul formel risque de faire encore plus mal à ceux qui ont choisi la politique de l'autruche. Le logiciel DERIVE "sait faire" l'essentiel de ce qui est demandé à un étudiant jusqu'au niveau "bac plus deux". Certaines calculatrices sont déjà pourvues de ses principaux savoir-faire. Lorsqu'il sera entre les mains d'une majorité d'élèves, il faudra vraiment changer la forme et le contenu de l'enseignement des mathématiques, si on veut éviter une totale incompréhension entre leur maître et eux. D'ici là (il reste peu de temps), il faut réfléchir et expérimenter : tester l'outil dans tous les cas de figures possibles, en mesurer la puissance et les limites, imaginer une mise en œuvre pédagogiquement valable et intelligente. C'est ce que tente de faire la commission Inter-Irem "Mathématique et informatique", qui publie une "Lettre des utilisateurs du calcul formel", disponible à l'Irem de Lyon. Ce document fait utilement le point sur les expérimentations en cours des logiciels de calcul formel : Derive, Mathématica, Maple, etc. Il aidera beaucoup ceux qui veulent accompagner la vague à venir et canaliser ses effets. Si cet effort n'est pas fait dans de brefs délais par une majorité d'enseignants, il deviendra possible d'avoir, dans toutes les sections, la moyenne aux épreuves de mathématiques au baccalauréat, sans comprendre grand chose à cette matière. Le caractère formateur des mathématiques en prendra alors un sacré coup... (7)

Le pire n'est jamais sûr. Si les maîtres forment leurs élèves à l'usage intelligent et éclairé de l'outil l'informatique, l'expérience prouve que les mathématiques vivent et s'en trouvent enrichies. L'instrument de calcul, qu'il soit de type numérique ou formel, appelle, pour être efficace la réflexion et le contrôle de l'utilisateur : celui-ci a besoin, à cause de la puissance de la technologie qu'il met en œuvre, de davantage de mathématiques et d'une connaissance précise des algorithmes qu'il met en œuvre. La toute puissance et l'infaillibilité de la technique informatique tiennent du mythe : il faut une tête bien faite, pour poser à l'outil informatique de bonnes questions et pour interpréter correctement les résultats qu'il propose. Il en va d'ailleurs de même pour les mathématiques.

NOTES

Note 1

Les mathématiques "standard" sont celles qu'ont apprises et que dispensent les enseignants de la discipline. Depuis une trentaine d'années, elles n'occupent plus seules la scène mathématique. En 1961, A. Robinson présente "l'analyse non standard". E. Nelson en propose une deuxième version en 1977. L'article de Th. Gilbert "Qu'est-ce que l'analyse non standard", qui paraît dans ce même numéro de "Repères" constitue une bonne introduction à cette théorie. Il sera suivi par un article sur la continuité et la dérivabilité en analyse non standard dans le prochain numéro.

Note 2

Cette note reprend l'essentiel d'une réflexion critique de Marc Legrand. Elle propose pour le débat entre les mathématiques et l'informatique, une sortie "par le haut", comme disent les alpinistes.

L'approche du mathématicien "non standard" déstabilise un peu la conviction du mathématicien classique d'avoir trouvé la forme de pensée absolue, car elle montre que pour modéliser les réalités concrètes, l'infini n'est pas nécessaire, et que le saut ne se produit pas entre fini et infini, mais entre fini accessible et fini non accessible.

Dans cette vision, pour se déplacer sur l'axe réel, on est conduit à procéder comme dans un ordinateur, de *halo* en *halo*. Mais pour éviter les contradictions qui vont apparaître en informatique, le mathématicien non standard ne fixe aucun critère dichotomique pour passer d'un halo au suivant.

Cette façon de voir le monde est donc plus proche des réalités concrètes que l'analyse traditionnelle, mais elle reste totalement inopérationnelle sur la façon dont on pourra, en pratique, avancer de 0 à 1 au moyen d'un nombre accessible de réels accessibles !

L'approche de l'informaticien reprend l'idée précédente, mais comme il lui faut bien concevoir une réalisation matérielle qui permettra à la machine d'avancer de 10^{-99} à 10^{99} de halo en halo, en un temps fini accessible et à un prix fini accessible, il est amené à effectuer des compromis en décidant arbitrairement la taille des halos et la façon de passer d'un halo au suivant (ce processus est décrit à la fin du deuxième paragraphe de cet article).

Cet arbitraire pour passer d'un halo au suivant conduit dans certains cas, on le voit dans l'article, à une représentation du monde fort différente de celles que suggéraient les mathématiques classiques.

Les mathématiques du continu opposent des obstacles considérables à la modélisation des réalités concrètes. Les physiciens ne se servent quasiment pas du concept de continuité, car en fait pour eux, là ou nous voyons une discontinuité, ils identifient une indétermination, une nécessité de changement de modèle (par exemple la discontinuité du champ électrique en arrivant sur un conducteur).

L'algorithme : "répéter : S := S+1 " fait partir S à l'infini dans le modèle mathématique. Dans le modèle informatique, il laisse S stationnaire dès que 1 n'est plus significatif devant S. Or ce modèle est mieux adapté à représenter certaines réalités que le précédent, car personne ne montrera jamais "qu'on peut faire monter le niveau de la mer en versant des verres d'eau un par un !"

Les mathématiques classiques et l'informatique constituent deux regards, deux modèles permettant d'appréhender le monde. Beaucoup de nos élèves ne parviennent pas à donner à nos infinitésimaux, à nos irrationnels, le même degré de réalisme que nous y mettons. Est-il dramatique qu'ils considérent le "pi" de leur machine comme un bon représentant de l'aire du disque unité ? Non s'ils sont conscients qu'entre le "pi" de leur machine et celui d'une autre, il peut y avoir des différences... Si ces différences deviennent gênantes, ils sera peut-être économique pour eux d'avoir recours au "pi" du mathématicien, dont la complexité est le prix à payer pour ne pas subir les aléas du constructeur.

Les mathématiques classiques sont plus performantes sous certains rapports, celles de la machine sont mieux adaptées pour traiter certains problèmes : les deux coïncident dans la majorité des cas. Un article reste donc à écrire dans cette perspective. Il pourrait s'intituler : "L'informatique, un autre regard sur la réalité"...

Note 3

Précisons la démarche. Etant donné un repère, une courbe mathématique d'équation $y = f(x)$ est en général un ensemble INFINI de points du plan. Nous nous limitons à celles que l'on peut inclure dans un rectangle (R) du plan : x varie dans [a,b] et y dans [u,v]. Nous allons appliquer ce rectangle sur l'écran graphique EN RESPECTANT LES PROPORTIONS.

Appelons ABCD le rectangle (R) et désignons par PQRS l'écran graphique. Soit N un point de (R). Nous allons lui attribuer une image N' sur l'écran, par l'algorithme (1) suivant (voir fig. 10) :

1) On projette N en n_1 et n_2 sur AB et CD. Soient a, b, x, les abscisses de A, B, n_1. Soient u, v, y les ordonnées de A, D, n_2.

2) Sur PQ, on définit le point k_1 d'abscisse x' par la relation :

$$\overline{Pk_1} / \overline{PQ} = \overline{AN_1} / \overline{AB} .$$

Cela se traduit par :

$$(x - a) / (b - a) = (x' - 0) / (639 - 0) ,$$

donc par : $x' = 639 * (x - a) / (b - a)$.

3) Sur PS, on définit le point k_2 d'abscisse y' par la relation :

$$\overline{Pk_2} / \overline{PS} = \overline{AN_2} / \overline{AD} .$$

Cela se traduit par :

$$(y - u) / (v - u) = (y' - 0) / (479 - 0) ,$$

donc par : $y' = 479 * (y - u) / (v - u)$.

4) On désigne par X' et Y' les parties entières de x' et y'.

5) N' est le point de coordonnées (X',Y') sur l'écran.

La mise au point de cet algorithme est une activité importante en elle-même. Elle met en œuvre des notions mathématiques centrales pour la classe de seconde (proportionnalité, transformations définies algébriquement). Nous pouvons maintenant donner l'algorithme essentiel de passage de la courbe mathématique au tracé sur écran graphique. Soit I l'ensemble d'étude de la fonction f (I = [a,b]). Cela donne l'algorithme (2) suivant :

1) Choisir un PAS. Le nombre de points de subdivision ainsi définis sur [a,b] est : $n = ent((b - a) / pas) + 1$.

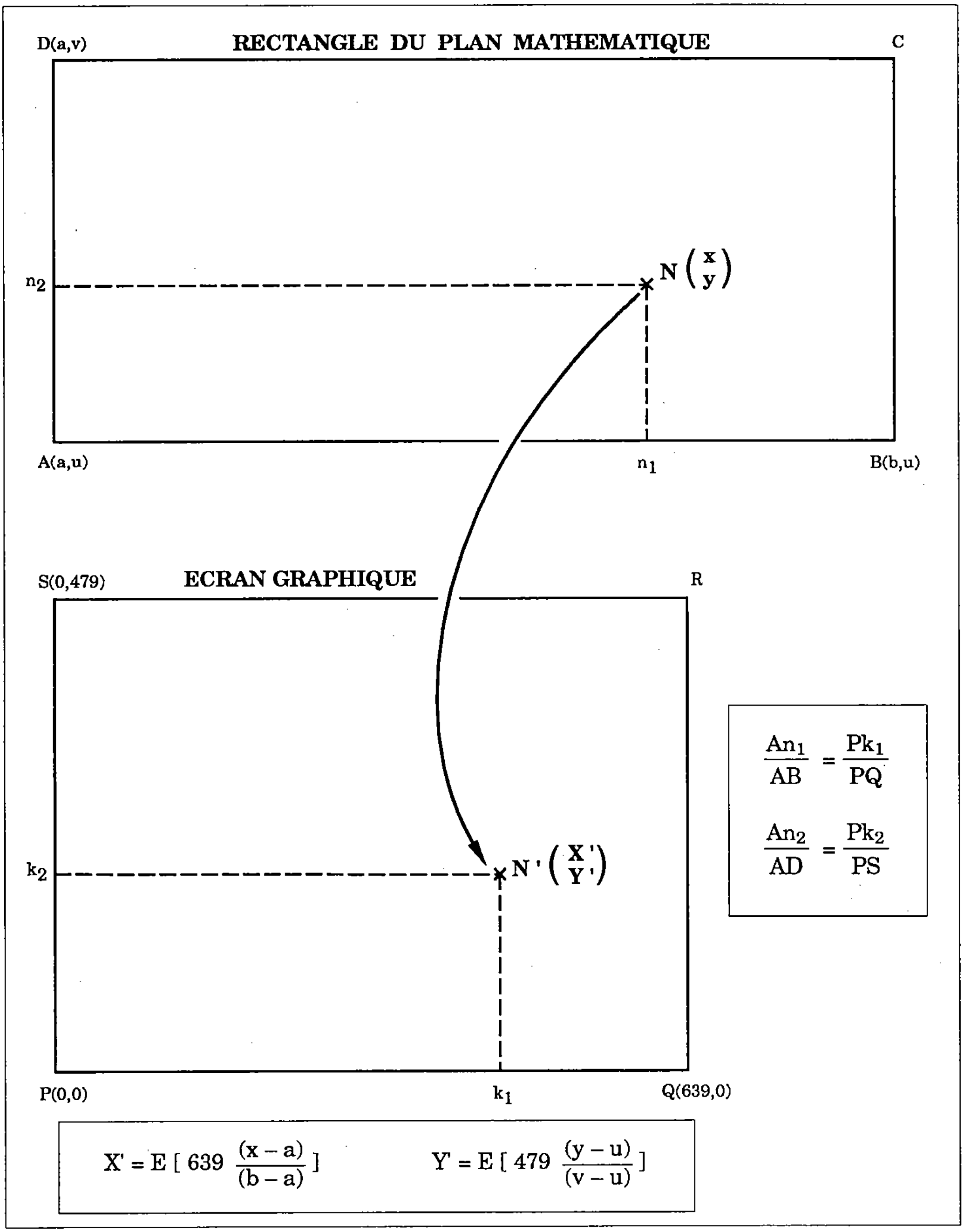
RECTANGLE DU PLAN MATHEMATIQUE
D(a,v)
C
n_2
$N\binom{x}{y}$
A(a,u)
n_1
B(b,u)
ECRAN GRAPHIQUE
S(0,479)
R
k_2
$N'\binom{X'}{Y'}$
P(0,0)
k_1
Q(639,0)
$\frac{An_1}{AB} = \frac{Pk_1}{PQ}$
$\frac{An_2}{AD} = \frac{Pk_2}{PS}$
$X' = E\left[\,639\,\frac{(x-a)}{(b-a)}\,\right]$
$Y' = E\left[\,479\,\frac{(y-u)}{(v-u)}\,\right]$

Figure 10

2) Définir les n points M_i, de coordonnées

$$(x_i = a + (i - 1) * PAS \; ; y_i = f(x_i)) ,$$

i variant de 1 à n.

3) Pour i de 1 à n appliquer l'algorithme (1) au point M_i.

4) Allumer à l'écran les n points N_i ainsi obtenus.

En appliquant cet algorithme à quelques points de la courbe du sinus dans [0,5000], on comprend clairement les tracés spectaculaires que l'on a obtenus (on choisit quelques valeurs de i, et l'on situe les points correspondants sur l'écran).

Note 4.

Ce terme est emprunté au jargon informatique. Il signifie que ce qui se passe est caché à l'utilisateur. C'est ce que les informaticiens appelle "transparence" !

Note 5.

Cette affirmation fait partie du credo de tout enseignant de mathématiques qui se respecte. Son effort, au fil des années, consiste à faire partager sa conviction à ses élèves. Or, l'expérience le prouve, le seul discours ne suffit pas pour entraîner leur adhésion à ce point de vue épistémologique. Ceux qui accordent à la machine plus de crédit qu'il ne conviendrait, ont souvent beaucoup de peine à entrer dans la démarche préconisée par l'enseignant. Pour eux, la réalité mathématique n'a rien de supérieur, ce n'est simplement pas la leur. Ils n'y croient pas parce qu'ils n'y ont aucune initiative et n'y exercent aucun contrôle. Si les objectifs épistémologiques et didactiques des activités décrites dans l'article ne sont pas clairs, et si à terme, l'élève n'est pas invité à entrer dans le jeu en construisant lui-même de telles situations, il risque de les ressentir comme une perversion du professeur de mathématiques qui veut toujours avoir raison et qui cherche à détruire son objet de remplacement. Quant au professeur, grande sera la tentation, certes inconsciente, de se venger de cet outil perturbateur.

Note 6

L'ouvrage de P. G. Ciarlet "introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation" (Masson 1990) traite largement les questions posées par la fiabilité des résultats numériques obtenus par approximations. Le théorème 2.2-1 p. 30 dissipe les illusions. Soit une norme vectorielle et la norme matricielle subordonnée. Si A est une matrice inversible, on pose :

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\| * \|A^{-1}\| .$$

Soit alors u et u+ u les solutions des systèmes linéaires :

$$Au = b \quad \text{et} \quad a(u + \Delta u) = b + \Delta b ,$$

(on suppose b non nul). Alors l'inégalité :

$$\|\Delta u\| / \|u\| < \mathrm{cond}(A) * \|\Delta b\| / \|b\|$$

est satisfaite et c'est la meilleure possible : pour une matrice A donnée, on peut trouver des vecteurs b et Δb , non nuls tels qu'elle devienne une égalité.

Note 7.

Pourquoi fait-on des mathématiques ? Pour une minorité, c'est affaire de goût. L'immense majorité investit dans cette discipline qu'elle sait socialement incontournable, pour assurer son avenir professionnel. Au passage, en plus de la réussite aux examens, l'aspect formateur des mathématiques agit, souvent à l'insu de celui qui les pratique de façon utilitaire. Si cet aspect formateur, généralement reconnu aux mathématiques, devait être fortement réduit par l'usage ingénieux de moyens de calcul, on aurait d'excellentes raisons de diminuer leur poids dans l'enseignement.

BIBLIOGRAPHIE.

Qu'est-ce-que l'analyse non standard ? (Th. Gilbert. Repères-Irem n°11).

Itérations et systèmes dynamiques (Jean Brette. Repères-Irem n°9).

L'approche du chaos (Jean-Marie Vigoureux. Irem de Besançon, mars 89).

Entre le temps et l'éternité (Prigogine et Stengers, Fayard 88).

Eléments de réflexion sur l'utilisation numérique des calculatrices programmables en première S et en terminale C et E (A. Robert Repères-Irem n°11).

Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation (P. G. Ciarlet, Masson 90).

Lettre des utilisateurs du calcul formel (Commission inter-Irem "mathématiques et informatique", Irem de Lyon)