REPERES - IREM . n°10 - janvier 1993

DEBAT SCIENTIFIQUE EN COURS DE MATHEMATIQUES ET SPECIFICITE DE L'ANALYSE

Marc LEGRAND
Irem de Grenoble

Depuis une dizaine d'années, à Grenoble, la quasi-totalité des cours de mathématiques d'un amphi de DEUG A et une part de ceux de préparation à l'agrégation sont effectués sous forme de débat scientifique ; débat qui s'instaure entre les étudiants à partir de situations problématiques introduites par le professeur, ou à propos de questions ou conjectures que les étudiants apportent eux-mêmes.De nombreux enseignants du Secondaire et quelques-uns du Supérieur ont adopté à Grenoble et ailleurs une démarche similaire pour conduire tout ou partie de leur enseignement dès la classe de sixième.

Bien entendu, le débat qui s'instaure dans une classe de sixième n'est pas identique à celui qu'on retrouve en préparation à l'agrégation, et même à un niveau donné, ce débat peut beaucoup varier avec les élèves, les professeurs et le type de concepts abordés.Par exemple, dans un même amphi, avec le même professeur, ce ne sont pas forcément les mêmes étudiants qui interviennent le plus spontanément suivant que le sujet traité est plutôt de nature algébrique ou plutôt de l'analyse.

Cependant un certain nombre de caractéristiques propres à cette façon d'aborder les mathématiques se retrouvent un peu partout ; ce sont ces régularités que nous utiliserons pour définir ce que nous appelons "le débat scientifique en cours de mathématiques".

Comme on ne peut raisonnablement aborder dans un même article tous les problèmes simultanément, je ne vais pas décrire ici en détail les moyens que nous utilisons aux différents niveaux pour produire de tels débats en classe ou dans un amphi. Je n'aborderai pas toutes les difficultés que nous rencontrons pour faire vivre dans la durée une forme d'enseignement qui tranche par rapport aux coutumes dominantes, voire les échecs partiels que nous essuyons dans certains cas, notamment lorsque l'environnement est trop hostile ; je ne présenterai pas non plus de scripts complets (on pourra trouver de telles précisions par exemple dans Legrand M. et al. [1], [2], [3], [4]).

Dans une première partie, je vais essayer de préciser les caractéristiques de ce débat, ce que l'on peut en attendre, le type de contrat didactique qu'il présuppose et ensuite, dans une deuxième partie, je présenterai deux thèses ou conjectures de type épistémologico-didactique, tendant à montrer :

– qu'il est assez vain, au niveau de la formation générale, de vouloir "faire (faire) des mathématiques" sans (faire) entrer véritablement (l'élève) dans une problématique mathématicienne,

– en quel sens la forme de débat scientifique que nous décrivons ici prend en compte l'énorme difficulté qu'il y a pour l'élève ou l'étudiant à entrer dans une telle problématique, notamment en analyse.

PREMIERE PARTIE : DE QUEL DÉBAT SCIENTIFIQUE PARLONS-NOUS ?

Quand peut-on dire qu'une situation d'enseignement fonctionne sur le principe du débat scientifique ?

La nature et le statut des énoncés :

La première caractéristique de cette forme d'enseignement est la nature des énoncés qui circulent à l'intérieur de la classe. Est-ce que ce sont en majorité des résultats supposés connus ou à connaître, ou est-ce que l'on travaille essentiellement sur des **énoncés conjecturaux,** c'est-à-dire des énoncés jugés vrais par celui qui les propose, mais qui n'ont pour la classe aucun caractère de vérité institutionnelle ?

La forme adoptée par les protagonistes du débat :

La seconde caractéristique est double ; c'est d'une part la façon dont l'élève se positionne par rapport aux assertions, et le choix de ses interlocuteurs privilégiés d'autre part :

– L'élève s'adresse-t-il à l'enseignant sous la forme : "est-ce que j'ai le droit de..., est-ce qu'il est possible de...?"

– Ou bien s'engage-t-il directement devant ses pairs sous la forme : "avec telle hypothèse, je pense que... j'affirme que..." ?

Les expériences menées toutes ces dernières années semblent montrer qu'un débat scientifique consistant ne peut perdurer dans une classe ou un amphi et y produire des acquisitions de connaissances substantielles auprès du plus grand nombre que si *le jeu de la recherche de ce qui est vrai et l'engagement de sincérité l'emportent sur le désir d'être celui qui sait ce qu'il faut savoir (et qui par suite ne se trompe jamais dans ce qu'il propose).*

Si le jeu de la sincérité l'emporte, le débat, au lieu de ne porter que sur les énoncés du maître et d'être monopolisé par ceux qui connaissent la réponse institutionnelle, s'élargit à des énoncés qui dans la forme et sur le fond sont beaucoup plus proches des conceptions effectives des élèves de cette classe ou de cet amphi. Ce débat-là peut être nourri des interventions de tous les élèves. En effet, celui qui propose un énoncé conjectural n'est pas réputé "savoir qu'il est vrai", il pense seulement que c'est vrai ; celui qui lui apporte la contradiction n'est pas non plus réputé savoir que la conjecture est fausse, il pense que le résultat ou l'argumentation qui vient d'être avancé(e) n'est pas correct(e).

Ces protagonistes prennent effectivement un risque, celui de dire en public ce qu'ils pensent personnellement et de le soutenir avec leurs propres arguments (les arguments qui les persuadent intimement que c'est vrai ou faux) ; ils peuvent donc se tromper, et dans ce cas ils savent que le débat va mettre leur erreur au grand jour. Ils ne continueront donc à jouer ce jeu dangereux que s'ils sont protégés par un statut officiel de l'erreur et peuvent mesurer à terme ce qu'ils gagnent effectivement en se découvrant plus que de coutume.

A notre sens, c'est au professeur de donner un statut scientifique à l'erreur dans les phases de recherche, c'est au débat de faire à la longue la preuve de son efficacité didactique : montrer à la "classe" ou à "l'amphi" que ceux qui interviennent en prenant le risque d'une plus grande implication personnelle s'offrent à eux-mêmes et offrent aux autres des occasions de comprendre en profondeur les mathématiques, occasions qu'ils auraient rencontrées avec une moindre intensité et qui dans bien des cas leur auraient totalement échappé au cours d'échanges didactiques moins aventureux.

Ce point est essentiel et correspond à l'hypothèse épistémologique suivante :"***pour entendre en compréhension une proposition scientifique, il faut douter de sa vérité et de sa pertinence, il faut se sentir dans l'obligation d'exercer sur elle une réelle vigilance épistémologique***".

Habituellement, en classe, les énoncés qui sont travaillés en tant que tels sont ceux de l'enseignant. Ce sont généralement des axiomes, définitions et théorèmes qui ne peuvent être mis en doute par l'élève puisqu'ils sont institutionnellement vrais ; et même lorsque ce sont des questions et des problèmes dont la réponse est inconnue ou incertaine, l'élève n'a pas forcément intérêt dans une perspective de réussite scolaire immédiate à se placer sur un plan scientifique pour les analyser. Il lui est souvent plus simple de décoder dans les questions qui ont précédé, dans la façon dont la question est posée, dans l'intonation du professeur etc., les intentions ou le piège didactique.

En résumé, pour qu'il y ait potentialité d'acquisition de connaissances substantielles par un débat en cours de mathématiques, il semble nécessaire de respecter un premier groupe de contraintes :

- *les énoncés sur lesquels on travaille sont essentiellement conjecturaux,*

- *il existe un contrat didactique qui légitime le fait que tout élève puisse soumettre ses propres conjectures à la classe ou à l'amphi.* Ce contrat didactique doit être tel que celui qui propose l'énoncé puisse s'engager fortement, sans avoir à redouter d'être humilié (par le professeur, par la classe ou par son propre regard) si après coup il s'avère que l'énoncé est non vrai ou non pertinent.

- *les élèves qui entendent ces propositions doivent pouvoir réellement douter de leur pertinence et/ou de leur vérité,* c'est-à-dire qu'ils ne doivent pas pouvoir interpréter l'attitude du professeur en termes de soutien ou de désaveu (même tacite) de la conjecture ou de l'argumentation.

Le jeu de l'élève

Les "vrais" interlocuteurs du débat sont-ils les pairs ou l'enseignant ? Comme nous l'avons déjà souligné, ce point est essentiel ; faire en sorte que l'élève s'adresse directement à ses pairs nécessite un véritable apprentissage de toute la classe (élèves et professeur), vu les coutumes didactiques les plus répandues qui, lorsqu'elles autorisent un débat, se structurent essentiellement autour d'un dialogue maître-élèves.

Il y a donc obligation d'une négociation didactique pour amener l'élève à considérer qu'il va acquérir des connaissances différemment :

- il va apprendre en écoutant et en analysant avec sagacité le propos d'un pair,

- il va apprendre en s'adressant directement à ses pairs pour les convaincre du bien-fondé de ses assertions, sans solliciter *a priori* la médiation de l'enseignant.

Cette volonté collective (à des fins épistémologiques et didactiques) de ne plus centrer le travail de la classe autour de l'opinion de l'enseignant est la condition même de survie d'un débat, surtout avec des milieux hétérogènes.

En effet, s'il y a des élèves nettement "plus forts" que les autres et si l'interlocuteur à convaincre est l'enseignant, le débat ne peut pas durer, car l'élève qui pense avoir "trouvé" va parler en langage codé à l'enseignant, langage codé qui veut dire : "vous voyez que je sais ce que vous voulez que je sache" et l'enseignant comprendra à mi-mot, parce que l'information scientifique circule de façon très économique entre des personnes qui sont sur la même longueur d'onde. Par suite, ceux qui ont le plus besoin d'explications seront complètement "court-circuités" dans ce débat qui leur passera au-dessus de la tête.

L'essentiel de la potentialité cognitive engendrée par l'incertitude scientifique d'un débat entre pairs disparaît presque automatiquement dès que l'interlocuteur à convaincre est l'enseignant, car la connivence didactique induit un rythme trop rapide qui efface tout doute et toute contradiction scientifique : il y a d'un côté ceux qui croient savoir et qui font tout pour éviter de mettre en évidence ce qu'ils ne comprennent pas, et de l'autre ceux qui sont dépassés et qui ne cherchent plus à intervenir positivement dans un débat qui ne peut plus être le leur. Toute intervention de la part de ces derniers manifesterait trop violemment leur ignorance ; ils ne peuvent plus que se taire ou "casser" le débat, en saisissant toute occasion pour tourner en dérision la moindre faiblesse qui apparaîtrait chez un pair ou chez le professeur. S'il y a hétérogénéité à l'intérieur du groupe classe ou amphi, le débat ne subsistera que si le but de celui qui propose une idée est d'arriver à la faire partager au plus grand nombre de ses pairs (ce qui ne veut pas dire la totalité) et que si chacun peut légitimement considérer qu'on s'adresse bien à lui.

Pour qu'il y ait un réel débat mathématique en classe, il doit donc être clair pour le professeur comme pour les élèves que la vérité mathématique n'est pas absolue, mais sociale (cela touche très profondément à l'épistémologie mathématique des élèves et du professeur puisqu'il s'agit alors de replacer "la mathématique" dans une communauté scientifique large). En clair, la règle qui doit progressivement prévaloir dans la classe est que celui qui pense avoir une solution et qui n'arrive pas à atteindre par ses explications le groupe classe ou amphi a partiellement échoué dans la résolution du problème scientifique collectivement abordé.

Etre convaincu du bien-fondé de sa solution est indispensable ; arriver aussi à convaincre ses voisins immédiats (souvent les pairs qui vous sont intellectuellement les plus proches) est très important aussi, mais cela ne suffit pas parce que ces derniers ont peut-être trop de connivence avec votre forme de pensée pour déceler rapidement vos insuffisances d'argumentation ou vos erreurs de jugement.

Le fondement épistémologique de la didactique du débat scientifique en cours de mathématiques repose donc sur la conception des mathématiques suivante : *un mathématicien n'est pas un homme seul face aux mathématiques, c'est un homme qui utilise le point de vue et les méthodes des mathématiciens*

- pour saisir des enchaînements d'idées qu'il va considérer comme vrais (les conjectures),

- pour se persuader d'abord intimement que ces conjectures sont bien vraies (les preuves et les démonstrations personnelles)

- pour faire partager ses convictions à ceux qui adoptent ses prémices et s'accordent sur une certaine forme de rationalité (utilisation des cas particuliers et des métaphores pour faire comprendre, de la démonstration formelle pour persuader).

On reprend ici pour l'essentiel le schéma développé par I. Lakatos dans Preuves et réfutations [5]. Bien que ce point de vue soit peu explicité dans la culture courante et bien qu'il soit fortement contesté par certains mathématiciens, n'est-il pas profondément pertinent ? En effet, même lorsqu'ils s'en défendent, y a-t-il beaucoup de mathématiciens qui considèrent avoir véritablement résolu une conjecture tant qu'ils ne sont pas parvenus à emporter l'adhésion d'une partie notable de la communauté des mathématiciens compétents sur le sujet ? Ils vous diront que l'essentiel de leur travail scientifique était de résoudre le problème pour eux-mêmes et non de persuader leurs pairs, et je comprends bien ce qu'ils veulent dire par là. Mais ne négligent-ils pas cependant, en insistant trop sur l'aspect solitaire de leur découverte, tout le travail de clarification et de vérification qu'ils ont été inconsciemment amenés à faire en direction d'un hypothétique interlocuteur externe ; et finalement, ne croient-ils pas à la vérité de leur démonstration tout autant par la qualité des arguments qui les persuadent eux-mêmes que par la qualité des interlocuteurs qu'ils ont pu ainsi persuader ?

Si nous revenons à la classe, dans le système du débat scientifique l'élève-mathématicien a pour interlocuteur principal la mini-communauté scientifique classe ou amphi ; parfois c'est un interlocuteur qui, en un certain sens, peut exiger plus que le professeur lui-même. En particulier, l'élève accepte plus facilement l'exigence de produire des contre-exemples précis, de fournir des arguments reconnus de tous (y compris d'expliciter les théorèmes sur lesquels son argumentation repose), si cette demande vient de personnes qui réclament des arguments pour être intimement persuadées et comprendre, que si c'est l'exigence du professeur (l'élève sait que le professeur sait!).

On constate donc que cette pression des pairs pour obtenir une explication convaincante va obliger tout élève qui prend la parole (même s'il est très avancé par rapport au groupe) à aller plus loin dans l'investigation du problème, à mieux comprendre ce qu'il pense profondément pour arriver à le dire publiquement. Bien souvent d'ailleurs, on voit un élève s'arrêter brutalement dans son explication, car il vient de découvrir une faille dans son raisonnement en essayant de persuader les autres.... qu'il n'y en avait pas.

Par contre, si le professeur est un interlocuteur possible, il devient à lui seul l'interlocuteur suffisant ; dans ce cas, tout le travail de changement de point de vue et d'approfondissement nécessaire pour atteindre les pairs devient superfétatoire et tend à disparaître : l'élève qui s'est adapté à l'école sait que le professeur fait semblant de ne pas comprendre quand il se fait tirer l'oreille pour accepter un raisonnement partiellement exact. Cet élève, et la classe avec lui, font alors pression sur le professeur pour que ce dernier fasse son travail : qu'il reconnaisse l'idée juste, qu'il la reprenne à son compte et qu'il rectifie lui-même tout ce qui ne va pas !

Le jeu de l'enseignant

L'enseignant, pour sa part, doit gérer simultanément un triple jeu : épistémologique, didactique et social.

Le jeu épistémologique d'abord : le professeur doit être le plus conscient possible, à chaque instant, de tout ce qui est mathématiquement mis en discussion. Sans cette (super)vision épistémologique du débat, l'enseignant ne peut sentir les différents niveaux d'argumentation en présence, il ne peut donc aider la classe à saisir ce qui est fondamentalement en jeu, il ne peut pousser les protagonistes à clarifier leurs points de vue afin d'éviter les faux débats, et surtout, il ne peut pressentir les changements de cap et l'entrée dans des impasses. *En clair, l'enseignant doit pouvoir contrôler* *épistémologiquement le débat,* car il ne peut se payer le luxe de découvrir avec la classe qu'on est dans une impasse (excepté si la classe est très homogène et de très haut niveau). En effet, il s'avère qu'un débat que l'enseignant ne contrôle plus sur le plan épistémologique, soit s'effondre dans un désarroi improductif, soit s'envole et se concentre sur quelques individus. Le reste de la classe assiste alors dans l'indifférence, l'admiration ou plus fréquemment le bruit, à quelques passes d'armes entre ces individus.

Précisons ce qu'on entend par *"l'enseignant doit pouvoir contrôler épistémologiquement le débat"*. Il s'agit de ne pas se cacher le fait très délicat suivant : dès que plusieurs élèves interviennent sincèrement, il y a très peu de chances pour qu'ils se situent sur le même plan ; le plus souvent ils développent des arguments parallèles ou en apparence contraires, mais qui ne peuvent ni se renforcer ni se contredire, car ils ne partent pas des mêmes prémices, ne visent pas le même résultat, ne s'appuient pas sur des arguments de même nature.

En clair, livrés à eux-mêmes, ces élèves ne pourront pas après quelques échanges continuer à débattre scientifiquement, car soit ils ne se comprendront plus du tout, soit au contraire ils croiront faussement être d'accord.

Si, pour des raisons épistémologiques, cognitives et éthiques, l'enseignant s'interdit absolument de manipuler le débat au sens où il tenterait de faire dire aux élèves des choses qu'ils ne pensent pas vraiment, il ne peut pas non plus tout laisser venir dans le désordre (sinon trois élèves au plus vont rester dans la course au bout de cinq minutes et zéro au bout de dix). A la suite de quelques échanges, l'enseignant doit donc choisir très rapidement quel point va être discuté avant, après ou contradictoirement à tel autre ; il ne doit pas désigner ce qui est pertinent et ce qui ne l'est pas, mais il doit organiser le débat de telle sorte qu'un élève "normal" puisse le suivre, c'est-à-dire n'ait pas à prendre en compte simultanément trop de raisons se situant sur des plans trop différents. En particulier, s'il y a un trop grand foisonnement des considérations, l'enseignant doit choisir quel argument ne va pas être discuté tout de suite et expliquer, de façon non péjorante, pourquoi il est épistémologiquement et/ou didactiquement raisonnable de ne pas le discuter maintenant.

Le fil conducteur pour effectuer rationnellement tous ces choix est donc prioritairement de nature épistémologique. Par exemple, si la classe s'engage dans une impasse, le professeur doit le pressentir, et s'il décide néanmoins de laisser faire, il doit savoir comment on pourra trouver une issue mathématique à cette impasse. C'est à mon sens le seul moyen pour qu'il soit après coup possible d'exploiter pleinement, sur un plan didactique, l'apparente perte de temps occasionnée par cette mésaventure.

S'il est surpris, le professeur risque de "paniquer" car il doit alors simultanément être pleinement chercheur et pleinement enseignant. Le résultat probable de cette trop forte tension est que, se départissant de sa neutralité didactique, brutalement l'enseignant ne devienne un élève pris au piège de l'ignorance devant ses élèves devenus censeurs ; il cherchera fébrilement en essayant en solitaire (sans dire ce qu'il fait) tous les coups mathématiquement permis et il dépossédera brutalement la classe de toute initiative. Les élèves verront alors leur professeur ne plus tenir compte de leur avis et "sortir des lapins de dessous son chapeau", sans comprendre pourquoi il y a eu cette rupture brutale du contrat didactique. Finalement, tout le monde gardera un si désagréable souvenir de cette mésaventure que la connaissance en jeu risquera d'en avoir pris un bien “mauvais coup”.

En résumé, si l'enseignant perd le contrôle épistémologique du débat, il ne peut plus aider à le clarifier sans prendre parti, et l'on constate bien souvent alors qu'en interprétant à contresens les propositions des élèves, ses interventions deviennent inadéquates et embrouillent plus la situation qu'elles ne l'éclairent.

Le jeu didactique du professeur

Toutefois, comme on vient de le pressentir, le professeur, tout en contrôlant le niveau épistémologique, doit néanmoins se garder de se laisser prendre lui-même au jeu mathématique : s'il éprouve pendant le débat un certain plaisir dans l'échange des idées scientifiques, c'est très positif dans la mesure où cela l'aide à mieux supporter certaines énormités sans maudire, mais là n'est pas le but. La fonction essentielle de ce débat reste de permettre aux élèves ou aux étudiants de s'introduire dans des problématiques et des techniques scientifiques difficiles, tout en gardant un niveau de sens que la plupart d'entre eux perdent ou déforment profondément quand le professeur déroule très linéairement son argumentation personnelle. L'enseignant ne doit donc pas laisser le débat se dérouler au rythme de sa propre compréhension ou de celle de ses meilleurs élèves ; pour cela, il écrit au tableau ce qui se dit afin, d'une part, de **ralentir la vitesse des échanges et d'autre part, de constituer une mémoire des idées fortes** (vraies ou fausses), de telle sorte que chacun puisse en (re)discuter. Dans un débat purement verbal, les idées importantes sont trop fugitives pour que des non-spécialistes puissent les épingler au moment où elles sont proposées.

De plus, il s'est avéré pertinent de placer un intermédiaire inerte (le tableau) entre le locuteur et ses contradicteurs. Si plusieurs élèves interviennent avec force pour contredire une intervention purement orale, celui qui s'est initialement exprimé a du mal à ne pas se sentir agressé, surtout s'il est timide ; par contre, si les élèves peuvent critiquer ce qui est résumé par écrit au tableau, ils ne s'attaquent plus directement à la personne, mais à l'idée qu'elle défend. Dans ces conditions, plus le débat s'approfondit scientifiquement, et plus l'idée écrite et complétée de commentaires externes se détache naturellement de son locuteur (jusqu'au point où ce dernier peut comme les autres réintervenir pour la défendre ou la critiquer lui aussi).

Tout en restant neutre sur ce qui se dit, l'enseignant organise donc la mémoire de la classe par sa gestion du tableau et des faits soumis au débat contradictoire. Par là il agit en sous-main, non pour désigner implicitement ce qui est vrai, mais pour augmenter le nombre des élèves qui entrent dans la problématique et découvrent ce qui est fondamentalement en jeu à travers les arguments forts (vrais ou faux) qui s'échangent. Ces arguments, le professeur les reprendra au moment de l'institutionnalisation pour mettre en avant ce qui est vrai (et à retenir en tant que tel) et ce qui est faux (et à retenir plus encore en tant que savoir erroné).

Le jeu social de l'enseignant

Ce jeu social est très important, car il faut bien que quelqu'un conduise le groupe social classe ou amphi, afin d'éviter que le débat ne s'enlise dans un forum où chacun crierait plus fort que l'autre. En mathématiques, avec le principe “un contre-exemple suffit pour montrer la fausseté d'une conjecture", nous détenons un remarquable outil de régulation du débat. Je pense que les autres disciplines (philosophie, français et même sciences physiques) ne disposant pas du même atout, il est probablement beaucoup plus difficile d'y organiser un débat dans lequel le professeur reste effectivement neutre pendant tout un temps (cf Joshua S. et Dupin J.J. [6] pour le débat scientifique en cours de physique). Malgré ces atouts naturels de la discipline, il faut néanmoins dans bien des cas lutter pour que certains leaders, ayant le verbe plus facile, n'étouffent les idées originales plus discrètes : l'important n'est pas que tout le monde parle, mais que tous les groupes d'idées puissent être exprimés.

Jeu social aussi, car l'enseignant doit réinstituer son propre statut social : comme, dans toute la première partie du débat, l'enseignant ne peut pas laisser apparaître ce qu'il pense en tant que spécialiste, sa position risque de devenir intenable s'il n'a pas suffisamment intériorisé les raisons de sa neutralité épistémologique et s'il ne les fait pas régulièrement partager à la classe. En effet, cette obligation de réserve est contraire à l'image qu'un professeur de mathématiques se fait traditionnellement de son rôle et aux habitudes sociales dominantes, car d'une part, la société confine de plus en plus l'enseignant dans un rôle de spécialiste qui se doit de transmettre ses techniques, i.e. dire tout ce qu'il sait tel qu'il le sait (illusion de la transparence du discours technique!), d'autre part le mathématicien est doté d'une sorte d'aversion épistémologique vis-à-vis de tout ce qui lui paraît faux.

Un mathématicien a tendance à prendre sans arrêt parti de façon tranchée : nous sommes tout sourire face à ce qui "ne peut être que vrai" et nous sommes horriblement grimaçants face à tout ce qui "ne peut être que faux". Vous pouvez observer qu'il est très dur pour un professeur de mathématiques de rester neutre quand il entend une assertion fausse ; et il ne suffit pas qu'il se taise pour réussir à cacher ses opinions. En effet un professeur qui meurt d'envie de donner son avis, fournit à son insu des indicateurs non verbaux très pertinents. Ces indicateurs sont d'autant mieux reçus qu'il s'adresse à des élèves plus jeunes, car les enfants décodent beaucoup plus finement que les adultes les attitudes, les mimiques et les intonations de leur interlocuteur (surtout s'il s'agit de leur professeur ou de leur maître habituel) : ils savent très vite et très sûrement ce que leur professeur pense réellement, même lorsque ce dernier déclare solennellement qu'il ne prend pas parti.

Cette neutralité de l'enseignant, qui est la clef de voûte du dispositif, est donc techniquement difficile à établir et ne peut se maintenir que dans un contrat didactique explicite qui permet de renégocier le contrat social coutumier.

Le professeur doit donc, à maintes reprises, expliquer à ses élèves la signification épistémologique et cognitive d'une certaine forme de désordre, d'une incertitude prolongée, du conflit cognitif ; il doit régulièrement redonner un sens didactique à ses silences et à son refus de prendre parti, faute de quoi il risque de passer pour un incompétent et sur le plan didactique et sur le plan épistémologique. Il ne s'agit pas ici pour le professeur de caresser un narcissisme de mauvais aloi, il s'agit très sérieusement de préserver les atouts dont il a un besoin absolu pour exercer son métier : un professeur qui est considéré comme manquant d'autorité, qui n'est plus respecté sur le plan épistémologique, ne peut plus enseigner sa discipline.

L'enjeu du débat : épistémologique, didactique et éthique

L'enjeu est d'abord épistémologique, bien qu'il soit clair que le but du débat n'est pas la découverte de propriétés originales, mais la prise de sens au sujet de théories bien établies. Il s'agit, par le débat, non de se donner l'illusion qu'on serait tous capables de découvrir en très peu de temps des résultats et des modes de raisonnement que les mathématiciens ont mis en évidence progressivement, erratiquement et sur une durée importante ; par contre, il s'agit de découvrir la signification de ces résultats et de s'approprier les méthodes de raisonnement qui confèrent une certaine indépendance de pensée. Nous évitons donc de faire croire aux élèves qu'ils sont subitement devenus des chercheurs professionnels, mais par contre nous les invitons à prendre très au sérieux cette mini-communauté scientifique classe ou amphi, dans la mesure où elle exploite des méthodes et des résultats qui ont fait leurs preuves dans la recherche.

C'est un élément essentiel de la négociation du contrat didactique que de faire partager l'hypothèse que, si le questionnement interne de la mini-communauté scientifique classe est important et sincère, il va permettre la vie dans la durée de la classe de problématiques scientifiques indispensables à la constitution du sens. C'est donc pour permettre aux élèves, d'abord d'**entrer dans des problématiques** scientifiques, ensuite d'**éviter de trop déformer le sens** des connaissances apprises et enfin d'**accéder à une certaine forme d'autonomie de pensée**, que le professeur propose à la classe ou à l'amphi d'adopter un mode de fonctionnement inspiré de la communauté des chercheurs. Pour ma part, je mets fortement en avant dans mon enseignement l'idée que *pour être libre, l'homme doit acquérir les moyens d'une certaine autonomie de pensée et que le travail scientifique en profondeur est un de ces moyens.* Nous sommes quelques-uns, je crois, à utiliser explicitement cet objectif éthique fondamental comme levier pour aider l'élève, et a fortiori l'étudiant, à se découvrir et à dépasser les inhibitions qu'il a sécrétées au fil de ses années d'école.

La place du débat à l'intérieur du cours

Nous avons voulu que les objets du débat puissent devenir l'essence des théorèmes du cours, afin que se fasse, dans l'action, la preuve auprès des élèves de l'efficacité de la preuve mathématique.

Un problème ou un exercice qui est donné à résoudre fait bien évidemment travailler l'élève, mais en fin de compte le résultat est le plus souvent oublié. La preuve, dans ce cas, fournit des énoncés dont la durée de vie est le temps de la discussion. Nous avons donc choisi qu'une partie des conjectures proposées par les élèves deviennent, par rectifications successives, les théorèmes du cours : on cherche à garder les "bonnes idées" des conjectures initiales, mais on les débarrasse, par le jeu de la recherche de preuves ou de contre-exemples, de ce qui les empêchait éventuellement d'être vraies.

Si les principaux théorèmes qu'on utilise au cours de l'année sont obtenus de cette façon, il devient alors clair pour l'étudiant que la preuve mathématique sert à autre chose qu'à montrer qu'on sait faire des preuves ; la preuve sert à se frayer un chemin dans la jungle du vrai et du faux, elle permet de sélectionner parmi les intuitions spontanées celles qui sont profondes et qui vont fournir des théorèmes, en les distinguant de celles qui sont trop naïves et qui pour cela aboutissent à des résultats faux.

L'institutionnalisation

L'institutionnalisation est ce moment où l'enseignant sort totalement de sa neutralité épistémologique pour étiqueter, parmi les résultats étudiés, ceux qui seront certainement réutilisés : ceux qui sont vrais deviennent les théorèmes du cours, et ceux qui sont erronés mais qui correspondent à des modes de pensée très "naturels" sont repérés comme tels (i.e. on sait qu'ils sont faux et on sait qu'on "aimerait bien" qu'ils soient vrais!) Dans ce contexte, le professeur réaffirme donc que ce n'est pas du temps perdu que de produire des énoncés faux et de s'en rendre compte, et que **c'est une véritable connaissance scientifique que de savoir que tel raisonnement, telle méthode, tel résultat n'aboutit pas dans telle ou telle situation.**

Une part importante des connaissances institutionnalisées est donc de nature très différente de celles qui figurent traditionnellement dans un cours, puisque ce sont des méta-connaissances.

En effet, le débat met systématiquement en évidence un certain nombre d'idées fausses et de modes de pensée erronés. L'analyse collective de ces propositions fait ressortir qu'elles sont loin d'être totalement absurdes : l'explication donnée par leurs auteurs montre le plus souvent qu'elles ont même une certaine pertinence ; il est donc fort probable qu'elles réapparaîtront par la suite, dans l'action. Il est indispensable, pour que l'élève entre véritablement dans le jeu scientifique, qu'il prenne peu à peu conscience que les intuitions scientifiques, ces idées qui viennent spontanément à l'esprit quand on analyse qualitativement un problème, sont loin d'être idiotes (le débat montre que ce sont elles qui bien souvent produisent, après travail, les théorèmes du cours), mais que ces raisonnements spontanés, seuls, conduisent le plus souvent à des résultats en partie ou fondamentalement faux.

Un des enjeux du débat est donc de faire découvrir à chacun qu'à partir du moment où l'on n'inhibe pas ses facultés imaginatives et créatrices (par exemple en se déclarant inapte à la réflexion ou en se disant qu'il ne sert à rien de chercher ce qui a déjà été trouvé), on a des idées personnelles, mais qu'une idée scientifique spontanée n'est pour ainsi dire jamais immédiatement satisfaisante et totalement exacte ; elle doit être "travaillée" et soumise à l'épreuve de la recherche de preuves et de contre-exemples.

Il y a donc une triple connaissance à institutionnaliser : d'abord faire repérer ce qui est faux, ensuite étiqueter des procédures qui permettent de débusquer et de neutraliser les idées fausses, enfin garder ce qui après analyse peut être prouvé comme étant vrai, tout ceci afin d'acquérir un sens critique aigu qui ne conduise pas pour autant à "jeter systématiquement le bébé avec l'eau du bain".

Le rôle du contrat didactique

Si dans la phase d'institutionnalisation, l'enseignant doit clairement indiquer ce qui est exact et ce qui ne l'est pas, son rôle, comme nous l'avons signalé au début de cet article, n'est surtout pas de mettre en avant les élèves qui avaient d'emblée trouvé la bonne solution et de péjorer l'attitude de ceux qui avaient commis des erreurs. Il lui incombe, par contre, de montrer en quoi l'introduction de propositions ou de raisonnements erronés ont finalement, par le jeu de la critique scientifique, obligé le groupe classe à prendre conscience de difficultés insoupçonnables à la seule vue du résultat final.

Bref, il s'agit à ce moment de faire expérimenter à la classe la puissance du raisonnement scientifique qui permet paradoxalement de faire de l'erreur analysée une source de connaissance plus approfondie. Si globalement la classe peut reconnaître qu'elle a effectivement beaucoup appris grâce à son fonctionnement erratique (elle est maintenant moins naïve sur le problème abordé que si chacun avait gardé pour lui ce qu'il pensait intimement), aucun intervenant ne pourra être légitimement étiqueté dans l'absolu comme étant celui qui avait raison ou celui qui avait tort.

Pour que ce fonctionnement erratique du cours soit acceptable par les élèves, il est donc indispensable que le contrat didactique soit très explicite sur le point suivant : les situations qui sont mises en débat ne sont ni des situations scolaires traditionnelles de type applications directes du cours, ni des situations totalement incertaines comme celles auxquelles sont confrontés les chercheurs. Comme c'est maintenant le cas dans bon nombre d'activités proposées par les Irem, les élèves doivent donc se savoir à l'intérieur d'un montage didactique, montage dans lequel l'enseignant, s'il s'interdit de les manipuler (au sens où il chercherait à les piéger ou à leur faire dire des choses qu'ils ne pensent pas), s'autorise par contre à réorganiser le contexte scientifique de façon à ce que les problèmes soumis à leur réflexion soient :

- abordables avec leurs connaissances,
- suffisamment simples pour que chacun puisse avoir des idées personnelles en un temps fini assez bref,
- suffisamment complexes pour nécessiter l'introduction d'une nouvelle connaissance,
- et suffisamment orientés pour que les énoncés conjecturaux qu'ils suscitent soient en rapport avec la connaissance visée par le cours.

Les élèves doivent donc être réellement complices d'une certaine mise en scène du savoir : ils savent que l'enseignant cache volontairement la connaissance qu'il veut enseigner parce que, s'il la montrait directement, ils ne pourraient peut-être pas la découvrir de façon aussi significative. (cf Brousseau G. [7])

L'élève ou l'étudiant n'acceptera cette mise en scène du savoir que s'il a compris qu'en poursuivant le petit jeu par trop scolaire – qui consiste à cacher le mieux possible ses incompréhensions et à tenter de trouver par tous les moyens la "bonne réponse" – il risque gros sur le plan scientifique et cognitif. En fait, nous constatons que cette complicité élève-enseignant doit être constamment renégociée, pour que vive ce double jeu didactique où l'enseignant cache ce qu'il veut montrer et où l'élève s'interdit de "tirer les ficelles" ; et cette complicité ne peut se nouer et perdurer qu'autour d'un fort enjeu épistémologique et en acceptant les contraintes matérielles de ces choix didactiques. En particulier, professeur et élèves doivent constamment intérioriser la contrainte du temps. En effet, si l'un des deux partenaires veut trop fortement gagner du temps, il lui faut "tricher" pour supprimer artificiellement les erreurs qui empêchent d'aller directement au résultat. Dans ce cas, on voit systématiquement le charme se rompre : le débat se pervertit, la connaissance qui circule n'ayant plus de véritable statut, on en vient très rapidement à perdre véritablement son temps !

Pour que la classe accepte ce ralentissement du cours par rapport à la coutume scolaire, il doit donc être présent à l'esprit de l'élève comme du professeur qu'aucun élève n'est ici censé savoir le résultat qui fait l'objet de la leçon et que cela ne lui interdit pas d'avoir des idées intéressantes *sur la question, ni d'émettre des jugements fondés sur les solutions proposées par d'autres.*

L'évolution des modes de preuves

C'est ainsi que l'on voit peu à peu les élèves modifier leurs contre-exemples tout au long de l'année : au début, ils proposent des cas génériques beaucoup trop vagues ou complexes pour être des outils de preuve (l'élève trop scolaire pense que "plus c'est compliqué, plus cela fera bien") ; puis, dans le jeu du débat, ils prennent conscience qu'ils ont intérêt à choisir des cas particuliers extrêmement simples à décrire et faciles à circonscrire, de façon d'une part à être compris de tous, et d'autre part à ne pas se trouver immédiatement battus en brèche par un pair qui va leur opposer quasi instantanément un "contre-contre-exemple".

Ils apprennent aussi à éviter les calculs non indispensables, difficiles à suivre, les propositions trop techniques ou filandreuses que personne ne peut contrôler ; ils découvrent l'importance de dire où ils veulent en venir, ce qu'ils ont l'intention de montrer. Ceux qui ne veulent pas prendre en compte ces considérations sont obligés de constater que leurs pairs ayant trop de mal à les suivre finissent par ne plus les écouter. Ainsi, pour pouvoir être pris au sérieux par le groupe socio-professionnel classe ou amphi de mathématiques, l'élève découvre qu'il lui faut être précis et pertinent et qu'il a intérêt à exercer un minimum de contrôle épistémologique avant de tenir pour vraies les "idées de génie" qui lui viennent spontanément à l'esprit.

Les exhortations magistrales "soyez précis, soyez rigoureux, précisez vos hypothèses, etc.", qui sont habituellement si peu entendues des élèves et si mal interprétées par ceux qui ne sont pas encore entrés dans une problématique mathématicienne (ils prennent ces exigences pour des manies de prof), deviennent ici les règles de survie dans le jeu social de la communauté mathématique classe ou amphi.

Pour beaucoup d'élèves qui éprouvent un plaisir ou une fierté à jouer un rôle dans ce jeu social, ces règles ne peuvent donc plus être ignorées ou détournées de leur signification épistémologique : ici être clair, c'est se faire comprendre de ceux qui ne connaissent pas encore la réponse ; être rigoureux, c'est débusquer les erreurs des autres et ne pas faire des affirmations qui vont se révéler trivialement fausses dans quelques instants. En ce sens, le débat scientifique permet de faire la dévolution à l'élève des aspects dynamiques de la rigueur mathématique : se sentir la responsabilité de découvrir et de mettre en évidence ce qui est pertinent ou non, vrai ou faux.

Paradoxalement, cette dévolution se fait d'autant plus facilement que le groupe est nombreux, pas trop homogène et non exclusivement constitué de "bons élèves" au sens classique du terme. En effet, avec un assez grand nombre d'élèves, et parmi eux des personnes très différentes, des conjectures assez naïvement fausses vont être régulièrement produites à l'approche de chaque nouveau concept. Or nous avons pu constater, à maintes reprises, que c'est précisément autour de ces conjectures assez naïvement fausses ou non pertinentes que se font le plus efficacement l'apprentissage et l'approfondissement des règles du jeu de la rigueur mathématique. La plupart de ces conjectures naïves, on ne les obtient pour ainsi dire jamais avec de "très bons élèves", non parce qu'ils ont totalement dépassé le stade de ces naïvetés, mais parce qu'ils ne les formulent pas explicitement ou que, ne les ayant vu figurer nulle part dans ce qu'ils connaissent institutionnellement, ils flairent un piège. Prudents pour leur réputation, ces élèves s'abstiennent alors de dire au groupe ce qu'ils pensent véritablement, sans que pour autant cela les empêche de le penser dans l'action.

Le traitement des définitions

Ces conjectures naïvement fausses présentent en plus l'énorme avantage de faire prendre conscience que *lorsqu'on n'est pas d'accord sur des évidences, c'est peut-être parce qu'on ne parle pas des mêmes choses.* Les objets que nous manipulons en mathématiques, même lorsqu'ils sont la transposition d'une réalité sensible, sont néanmoins des objets construits, et **on ne peut pas en discuter mathématiquement si leur définition n'est pas claire** ; mais ceci est de l'ordre du discours de l'enseignant, et les élèves, surtout ceux qui ont des difficultés, n'ont en général que faire d'un tel discours. Le traitement des conjectures naïves provoque le plus souvent des prises de position très tranchées qui obligent au bout d'un temps à se dire : "est-ce que nous parlons bien tous de la même chose ?" Le débat de définition qui suit, a alors beaucoup de chances d'être écouté, même par ceux qui boudent tout ce qui a un aspect formel, car la définition devient alors le seul moyen rationnel de lever un malentendu.

La démonstration

Autant la dévolution à la classe de la recherche de pertinence et de la désignation de ce qui est faux est relativement facile à faire à partir d'un certain contrat de débat, autant **la dévolution de la démonstration est un autre problème :** on peut aisément dans le débat obtenir des idées de démonstration, mais le plus souvent elles vont avorter si on laisse les élèves organiser seuls ces idées. Je ne prétends donc pas que dans la majorité des situations que nous avons utilisées en DEUG ou dans le secondaire, nos étudiants aient réellement construit la démonstration complète des théorèmes que nous avons finalement institutionnalisés.

Ce que l'on peut affirmer par contre, c'est que lorsque l'enseignant a abordé lui-même la démonstration à l'issue d'un débat, les raisonnements simplistes qui stérilisent bien souvent le besoin de démonstration ("pourquoi chercher à démontrer, puisqu'un raisonnement évident prouve le résultat!") ont en général déjà été proposés, et le débat a permis de voir qu'ils ne prouvaient rien. Ainsi, au moment où il aborde une argumentation rationnellement construite (très difficile à suivre quand on ne saisit pas ce qui est fondamentalement en jeu), le professeur se trouve en présence d'un groupe de personnes qui ont à peu près la même problématique, à peu près la même préoccupation démonstrative et qui parlent à peu près de la même chose.

Il peut donc décemment inviter la classe à s'engager franchement dans la rationalité mathématicienne malgré l'exigence de cette démarche, car elle répond à un besoin, elle correspond à une problématique commune.

Ce professeur parvient d'ailleurs d'autant mieux à garder l'attention du groupe qu'il peut, au cours de son enchaînement démonstratif, utiliser une part non négligeable des éléments de preuve qui ont surgi de façon éparse dans la discussion et justifier certains choix à partir de mésaventures que le groupe vient de vivre en se fourvoyant dans de "fausses solutions".

Le débat apporte donc, le plus souvent dans le désordre, des matériaux souvent très pertinents qui réclament néanmoins, pour être agencés sous une forme démonstrative mathématicienne, une technicité que très peu d'élèves ont encore acquise.

Certaines propositions erronées, antérieurement débattues, montrent des directions dans lesquelles il vaut mieux se garder d'aller et justifient par là même les choix "surprenants" du professeur.

Ce dernier point est à mon sens capital, car c'est lorsque les choix de l'enseignant au cours de la démonstration (et Dieu sait s'ils sont nombreux en analyse, vu l'utilisation qui y est faite de majorations et de minorations) apparaissent à l'élève comme totalement arbitraires, voire impensables, qu'il est envahi par le découragement : "Je n'y comprends rien, car je n'aurais jamais eu l'idée de faire cela". Le débat préalable permet donc de suivre autrement la démonstration du professeur. Et disons, en faisant preuve d'un optimisme modéré, que beaucoup d'élèves peuvent après coup se tenir le discours : "Avec un peu plus de temps et d'expérience, avec beaucoup de travail, je crois que j'aurais pu avoir moi aussi ces idées, car elles s'inscrivent assez logiquement dans le droit fil d'un débat où j'ai pu personnellement intervenir". Sans se bercer de l'illusion qu'il a presque tout découvert seul, l'élève ne se sent pas non plus totalement étranger à la démonstration proposée par le professeur. Il a donc de bonnes raisons de chercher à en repérer la philosophie et les méthodes, car il ne se sent pas trop loin du moment où il pourra prendre lui-même l'initiative démonstrative (il a suffisamment compris les raisons du cheminement adopté pour espérer avoir des idées personnelles dans des situations similaires !)

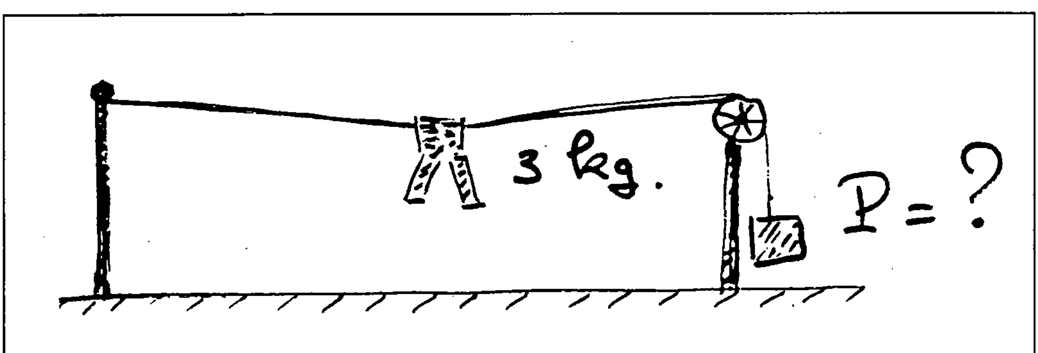
Différents types de situations gérées par le débat

Les situations d'introduction à un nouveau concept

Quand on parle de débat en classe, on pense prioritairement à la mise en place de situations problématiques permettant l'introduction d'un concept. **Par exemple, pour introduire à la notion de vecteur dans le secondaire**, on peut utiliser la problématique des forces, et pour cela s'engager sur des paris à propos de la tension d'un fil à linge "horizontal" quand il supporte un blue-jean mouillé de 3 kg. Au tableau se trouve le dessin ci-dessous...

Question : La tension T du fil (c'est-à-dire le poids P qu'il faudrait suspendre à son extrêmité pour maintenir le blue-jean en l'air) est-elle à votre avis plutôt de :

1,5 kg   3 kg   6 kg   20 kg   45 kg   100 kg ?



Cinq minutes de réflexion individuelle ou en petits groupes sont laissées aux élèves pour se faire une opinion avant qu'ils désignent par un vote leurs préférences individuelles :

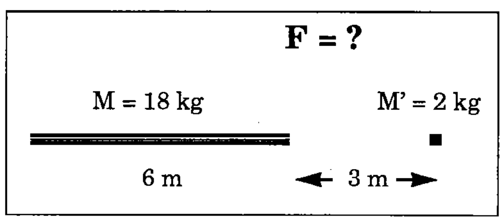
1,5 kg	3 kg	6 kg	20 kg	45 kg	100 kg	?
7	13	9	1	0	0	

Il est normal que le "bon sens" pousse un élève sur trois à choisir 3 kg puisque c'est le poids du pantalon. De même, il est naturel que le cadre purement numérique (qui est le cadre préférentiel de l'élève qui n'a pas encore formé le concept de vecteur) pousse un élève sur quatre à proposer 1,5 kg, car chaque brin du fil à linge semble supporter la moitié du poids. La discussion basée en partie sur des expériences déjà réalisées par certains élèves (les pragmatiques qui ont déjà essayé de tendre un fil à linge chargé) va peu à peu disqualifier les raisonnements numériques qui privilégient les réponses 1,5 kg, 3 kg, 6 kg. Le fait que les réponses les plus réalistes (45 kg à 100 kg quand la corde ne fléchit pas trop) n'aient été choisies par personne, montreront en fin de compte que le fameux "bon sens" peut nous orienter sur des résultats très faux.

Les élèves sentent donc, d'entrée de jeu, qu'ils ont peut-être intérêt à prendre au sérieux et la science et ces nouveaux venus : les "vecteurs". Ces vecteurs vont donc être introduits comme des modèles plus adéquats que les nombres pour rendre compte de la réalité physique. (Combien de personnes ayant fait des études scientifiques retendent néanmoins constamment leurs étendages jusqu'à ce qu'ils cassent? Pourquoi n'ont-elles pas pu "tirer" de leurs études vectorielles qu'il leur faudrait une tension infinie pour maintenir l'étendage horizontal?) Ainsi le vecteur entre dans la classe avec une de ses caractéristiques essentielles, à savoir que le module de la somme n'est pas forcément la somme (ou la différence) des modules, il peut prendre toutes les valeurs intermédiaires entre ces deux extrêmes. Il nous semble capital que la discussion sur ce point soit très vive, car on ne peut pas dire que la non-linéarité de la somme des normes soit une connaissance qui s'acquiert à la longue, à l'usage (voir par exemple le comportement à ce sujet d'étudiants de licence de mathématiques).

De même, en Deug A, on peut introduire à la problématique de l'intégrale de Riemann (découpage, encadrement, sommation, passage à la limite) à partir de la question suivante :

Question : *Quelle est la force F qui s'exerce entre deux masses M et M' situées à 3 m l'une de l'autre, la masse M étant constituée d'une barre homogène de 6 m de long et de 18 kg, et la masse M' de 2 kg étant considérée comme ponctuelle ?*



Réponses des étudiants au bout de 15 mn de travail personnel :

F =	- 8.k	4/9.k	**k**	4/3.k	4.k	8.k	**?**
Nb. d'étd. :	10	3	**#50**	8	10	4	**#25**

Ici, le débat que suscitent ces résultats contradictoires amène les étudiants qui croient majoritairement pouvoir appliquer un faux principe de centre de gravité (résultat majoritaire k) à revoir leur position trop simpliste. Arrivent alors des procédures d'encadrements ([4/9 k , 4 k]). Pour affiner ces encadrements, ils sont conduits à effectuer des découpages de plus en plus fins, puis à consentir à un passage à la limite pour faire disparaître totalement les erreurs d'encadrement (4/3 k est ce résultat limite).

Le débat met donc en évidence la fonctionnalité d'une procédure fondatrice du concept d'intégrale. **Ce débat est toujours très fort, car l'idée qui veut systématiquement s'imposer comme naturelle et de bon sens** (tout se passe comme si la barre était concentrée en son centre de gravité) **est un principe qui entre en contradiction avec lui-même** quand on le réapplique à chacune des moitiés de la barre. Il faut donc aller chercher des procédures plus complexes, mais plus fiables que sont les encadrements, les découpages et le passage à la limite. (Pour une étude détaillée de cette situation, cf [4])

En pratique, il s'agit de bien comprendre que ces situations d'entrée dans un concept sont longues et difficiles à élaborer, et souvent assez délicates à gérer quand on n'en a pas l'habitude, surtout si on n'en maîtrise pas convenablement les variables didactiques. En effet, en cas de mauvaises prévisions, le débat va difficilement converger vers la connaissance visée, il va éventuellement devenir tellement confus que l'enseignant sera contraint à manipuler le groupe et à utiliser l'effet Topaze (effet qui consiste à téléguider les élèves pour leur faire dire ce qu'on veut obtenir, sans se donner les garanties pour s'assurer que ces derniers comprennent les raisons profondes pour lesquelles ils donnent miraculeusement la bonne réponse. Pour approfondir ce point, cf [6] G. Brousseau). Le recours abusif à ce procédé tuera complètement la potentialité cognitive de la situation ; il valait mieux dans ces conditions que le professeur explique directement lui-même ce qu'il voulait dire.

Par exemple, dans la situation du blue-jean, il y a une différence didactique très importante entre poser la question sous la forme :

— Quelle tension T ?

et

— La tension T du fil est-elle, à votre avis, plutôt de :

1,5 kg   3 kg   6 kg   20 kg   45 kg   100 kg ?

Dans le premier cas, les élèves qui ne connaissent pas les vecteurs n'ont pas les moyens de faire ce calcul. Or, on leur fait croire qu'ils le peuvent, en leur posant cette question ; ils vont donc être poussés à faire un "peu n'importe quoi" en manipulant les données du problème, dans le style "âge du capitaine". Le débat sera alors probablement très difficile à gérer. Dans le second cas, il est clair que la référence à l'expérience est évoquée comme un recours légitime : on demande à l'élève son avis, ce qui est vraisemblable pour lui, et on envisage qu'il n'y ait pas une réponse unique et impersonnelle.

L'enseignant va alors pouvoir exploiter les réponses du type 1,5 kg comme non adéquates au problème, mais relevant néanmoins d'une rationalité : elles correspondent au problème où les deux extrêmités du fil seraient attachées à un même crochet au plafond. **Il est donc possible de s'appuyer sur les raisonnements partiellement inadaptés des élèves pour les faire évoluer** : en sciences on travaille sous hypothèses, et ici l'hypothèse est que les extrêmités du fil ne sont pas accrochées au même point, mais en des points écartés. La discussion de ce premier type de modèle, le modèle vertical, conduit, par effet de contraire, à regarder le modèle horizontal et à constater qu'il ne correspond à aucune réalité observée par les élèves (élargissement du problème aux fils électriques, aux téléphériques, etc.) A terme, il va donc falloir envisager un modèle intermédiaire où le fil à linge fait une flèche, et élaborer des hypothèses sur "l'ouverture" de cette flèche afin de dépasser le stade des opinions et des impressions sur la tension du fil.

Le débat, s'il reste délicat à gérer, peut "naturellement" (sans manipulation traumatisante de l'enseignant) évoluer vers la nouvelle branche des mathématiques que l'on veut enseigner. En effet, la classe se rend assez rapidement compte ici que **les nombres qui sont les seuls objets mathématiques disponibles, ne fournissent plus le modèle adéquat de cette réalité.** Il est alors moins difficile pour l'enseignant de négocier l'entrée dans la complexité du modèle vectoriel.

Il n'est pas question ici de dire que ce modèle "la somme de deux vecteurs est donnée par la règle du parallélogramme" prouve que (pour une flèche raisonnable où le pantalon ne traîne pas au sol) la valeur T = 45 kg ou T = 100 kg est la bonne tension ; *il s'agit par contre de constater que ce modèle tient bien compte de cette flèche, qu'il semble beaucoup mieux adapté que les nombres pour rendre compte de cette réalité.*

Dans ces conditions le débat qui a permis de disqualifier le "bon sens" spontané :

$$3 \text{ kg} = 1{,}5 \text{ kg} + 1{,}5 \text{ kg}$$

nous conduit à remplacer l'égalité "longueur de la somme = somme des longueurs" du modèle des nombres positifs par l'inégalité triangulaire :

$$\| V + W \| \leq \| v \| + \| W \|$$

qui rend compte du fait réel que "deux tensions de 45 kg ou de 100 kg peuvent en s'ajoutant pour compenser le poids du pantalon ne produire qu'un résultat de 3 kg !".

Cette inégalité fondamentale en analyse devient alors, dès la naissance du concept de vecteur, un passage obligé qui donne sens à cette complexité vectorielle.

Pour revenir au cas général, la situation problématique choisie pour introduire un concept doit donc être assez ciblée pour qu'au cours du débat l'enseignant puisse laisser se développer la plupart des idées émises par les élèves, et que ces idées soient suffisamment connectées au sujet abordé pour pouvoir devenir les matériaux de base à partir desquels, par opposition ou par perfectionnement, le professeur introduira le nouveau concept, le nouveau raisonnement. Nous ne croyons pas (parce que nous n'avons jamais vu ce fait se produire) que la théorie que l'on souhaitait enseigner puisse surgir spontanément dans la classe à partir d'un débat ou d'une expérience préalable ; nous attendons par contre de l'expérience préalable et du débat qu'ils facilitent l'introduction magistrale de la théorie : ils la rendent crédible, lui donnent du sens, justifient a priori sa complexité.

Les autres formes de situations de débat

A côté de ces situations de constructions "sophistiquées", il y a fort heureusement deux types de situations de débat beaucoup plus simples à produire et à gérer : **les débats de conjectures pour approfondir une théorie bien engagée et les débats issus des questions spontanées.**

Les débats de conjectures

Ces débats se produisent le plus souvent quand le cours est engagé dans la phase de développement d'une théorie. Par exemple, au sujet de l'intégrale, lorsque le signe $\int f$ a été introduit de façon problématique et bien défini mathématiquement, on demande aux étudiants de faire des conjectures reliant les qualités mathématiques que peut détenir l'intégrale dépendant de la borne supérieure de f, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, à celles que détient l'intégrant f.

On n'obtiendra pas tout de suite les théorèmes "F est toujours continue", ou "F est croissante quand f est positive", mais plutôt les conjectures naïves du type "si f est continue, alors F est continue", "si f est croissante, alors F est croissante". Les théorèmes classiques sur l'intégrale vont néanmoins se construire par rectification de ces conjectures, ils vont alors avoir une épaisseur sémantique très différente pour l'étudiant qui aura contribué à ce travail d'élaboration erratique, que s'ils sont directement proposés par l'enseignant lui-même qui les démontre au fur et à mesure qu'il les énonce.

Les débats "spontanés"

Le troisième type de débat est le débat de retournement des questions en conjectures et le renvoi à l'amphi ou au groupe classe de la responsabilité de répondre sous les trois formes : "vrai", "faux", "autre" ; où "autre" signifie "je ne peux pas" ou "je ne veux pas (pour des raisons à justifier ultérieurement) répondre sous la forme "vrai/faux".

Nous avons beaucoup appris depuis dix ans en transformant en conjectures ces questions naïves, que nous traitions auparavant de façon expéditive parce qu'elles nous paraissaient, vu ce que nous venions d'expliquer cinq minutes avant, comme totalement triviales. Le plus souvent, nous avions l'impression que les élèves qui posaient de telles questions soit n'avaient rien écouté, soit étaient complètement déphasés avec la connaissance en jeu.

Il nous a donc fallu apprendre à maîtriser nos pulsions de réponses instantanées et parfois cinglantes.

Par exemple, si f est la fonction $f(x) = \sin(x)$ sur $[0, \pi[$ et $f(x) = \cos(x)$ sur $[\pi, 2\pi]$ et si l'on a à calculer $\int_0^\pi f(t)\,dt$, les étudiants ne voient en général aucun inconvénient à ce que nous écrivions :

$$\int_0^\pi f(t)\,dt = [-\cos t]_0^\pi = 2 .$$

Ils sont d'accord parce qu'ils ne se posent pas la question de savoir si la discontinuité de f en π peut ou non introduire une perturbation sur la valeur de l'intégrale. (Ceux qui se posent de telles questions, les abandonnent assez rapidement, car d'un côté ils ne savent pas comment faire intervenir une discontinuité dans leurs calculs, et d'autre part ils se disent que s'il y avait quelque chose à modifier, "on le leur aurait appris !") L'enseignant-épistémologue conclut, lui, que ses étudiants ont "presque tous compris" la subtilité qui fait marcher les choses.

Si, dans ces conditions, un étudiant atypique pose la question qui s'impose tant qu'on ne l'a pas résolue :

— "pourquoi a-t-on le droit de ne pas tenir compte de la valeur de f en π pour calculer $\int_0^\pi f(t)\,dt$? "

il s'entendra répondre laconiquement :

— "parce que la mesure d'un point est nulle !"

On peut être assuré qu'alors le malentendu élève-enseignant est consommé car, que cet étudiant ait compris ou non, que d'autres se posent en cachette la même question, personne n'interviendra plus sur ce sujet après cette magnifique réponse : elle a été si instantanée, si naturelle et si simple que l'étudiant en conclut que sa question était profondément "stupide"!

D'ailleurs, si d'aventure cet étudiant manifestait une nouvelle fois son incompréhension, il serait probablement accueilli par un petit rire moqueur de l'amphi ou du T.D., rire qui lui rappellerait, s'il ne l'avait senti, qu'il est franchement hors-jeu. Si par contre,

– vous arrivez à contraindre votre envie de répondre,

– si vous arrivez à contrôler ce froncement de sourcils qui dit si bien : "voilà une question incongrue dont la réponse est évidente",

– si vous transformez imperturbablement cette question en conjecture, par exemple :

Conjecture : *Si f est intégrable sur $[0, \pi]$ et si $g(x) = f(x)$ sauf pour $x = 1$, alors quelle que soit la valeur de g en 1 , la fonction g est intégrable sur $[0, \pi]$ et*

$$\int_0^\pi f(t)\,dt = \int_0^\pi g(t)\,dt\ .$$

– si après avoir écrit cette conjecture au tableau, vous laissez cinq minutes aux étudiants pour avoir un avis motivé (une éternité pour vous qui êtes en retard dans le programme !),

– et si enfin vous soumettez cette conjecture au vote en commençant par : "Qui ne peut pas prendre de décision ?" *les contradictions qui apparaîtront dans le résultat du vote et les débats qui suivront vous permettront un approfondissement de la continuité et une entrée significative dans le "presque partout", qui justifieront très largement "le temps perdu" à ne pas répondre instantanément à cette question apparemment triviale.*

La crédibilité de cette forme d'enseignement

Pour conclure ce panorama lacunaire de la nature et de la fonction du débat scientifique pendant le cours de mathématiques, (re)disons que cette forme d'enseignement étant tout à fait contraire aux formes plus traditionnelles, elle doit en permanence (re)faire la preuve de sa fonctionnalité didactique.

Soulignons toutefois qu'il y a deux périodes tout à fait différentes dans l'année :

– la première période est celle où il s'agit d'installer ce nouveau mode de fonctionnement du cours ; il faut donc bien choisir ses entrées, car si les élèves sont attirés par ce contrat qui semble les prendre plus au sérieux, ils en ont simultanément peur : N'est-ce pas trop beau pour être vrai ? N'est-ce pas un peu démagogique ? Va-t-on véritablement apprendre quelque chose d'important ainsi ? On n'a donc pas le droit à plusieurs erreurs successives.

- puis vient une deuxième période au bout de deux, trois mois où les élèves ont suffisamment compris les règles du jeu pour qu'il reste jouable, même si localement la situation choisie n'est pas excellente.

Il ne faut pas se leurrer cependant, car :

– d'une part les élèves sont souvent très déstabilisés au bout de deux mois : ils ont découvert ce qu'ils ne comprenaient pas, alors qu'ils croyaient le savoir, et ils ne mesurent pas bien encore la portée des nouvelles compétences qu'ils sont en train d'acquérir ; beaucoup font donc pression pour qu'on en revienne à des formes d'enseignement moins risquées ;

– d'autre part, même lorsque le principe du débat est reconnu par la grande majorité des élèves comme fécond pour apprendre, rien n'est définitivement acquis. La pression extérieure est tellement forte pour qu'on aille toujours plus vite et plus simplement vers "la bonne réponse", qu'il faut toute l'année que les élèves ou les étudiants puissent toucher du doigt ce qu'ils gagnent dans cette approche plus erratique : ils doivent mesurer régulièrement qu'ils acquièrent par ce procédé des connaissances plus intériorisées que celles que le professeur aurait pu leur enseigner en plus grand nombre par un discours explicatif plus direct.

Entendons-nous bien, il ne s'agit pas par là de faire un clan et de dénigrer le travail des collègues, il s'agit de justifier aux yeux des élèves et de leurs parents qu'il vaut bien la peine de dépenser son temps et ses énergies de cette façon. Sans explications réitérées, cette pratique de débat va être laminée car considérée comme du temps perdu, comme manquant de clarté et/ou comme marquant une perte d'autorité de la part du professeur, voire comme une forme de démagogie. La situation de débat peut se bloquer très vite si trop d'élèves se disent : "on n'apprend plus, ou plus assez...", car alors ils font (de bon droit) pression sur leurs camarades pour que le débat n'ait pas lieu, afin d'avancer plus vite dans le cours.

Je vais maintenant proposer deux conjectures didactiques à propos de l'activité mathématique en général et de l'analyse en particulier.

DEUXIEME PARTIE : THÉSES DIDACTIQUES

Première thèse ou conjecture générale sur la nécessité des conjectures.

*Si **la résolution d'exercices et de problèmes** est une activité indispensable pour permettre à l'élève d'assimiler la théorie mathématique, pour lui donner l'occasion de créer du sens et de comprendre l'opérationalité des concepts scientifiques, je défends néanmoins la thèse que **cette activité à elle seule ne suffit pas pour provoquer "naturellement"** chez un grand nombre d'élèves et d'étudiants **une conceptualisation qui respecte la spécificité de la démarche mathématicienne.***

***Pour comprendre cette spécificité, il faut pouvoir agir comme un mathématicien, c'est-à-dire prendre l'initiative de proposer soi-même des conjectures et se lancer dans l'aventure de les résoudre** (i.e. arriver par la démonstration à la certitude qu'elles sont vraies ou bien fausses).*

Ainsi, par exemple, si chacun conçoit bien l'importance qu'il y a à étudier le comportement de diverses suites récurrentes ou de fonctions données par des formules pour approfondir les concepts de limite et de continuité (car le plus souvent l'étude de ces cas très particuliers force à se poser des questions plus générales sans provoquer les pertes de sens), l'expérience du secondaire et du supérieur montre néanmoins que ce travail seul (qui produit un certain résultat scolaire) ne provoque qu'exceptionnellement une conceptualisation de type mathématique des notions de suite, de fonction, de limite et de continuité.

Par conceptualisation non mathématicienne, j'entends le fait que la conceptualisation qui se produit sous la pression des exercices et problèmes, reste le plus souvent enfermée dans le particularisme et la contingence des situations étudiées.

En effet, par l'enchaînement des questions qu'il pose, le concepteur d'un problème guide son interlocuteur de façon quasi irré-

sistible vers sa solution ; et l'élève le sent bien. Dans ces conditions, il faut que ce dernier soit très sûr de lui pour se permettre de prendre la moindre initiative scientifique.

La pratique des problèmes scolaires apprend en un certain sens à être docile ; l'élève a "intérêt" pour répondre efficacement à se mettre des œillères pour avancer dans la direction recommandée, sans s'encombrer l'esprit de questions annexes, sans chercher à voir autrement, sans vouloir explorer des pistes qui dépassent le cadre du problème, sans entrer dans le cadre des nécessités d'ordre général. C'est ainsi que malgré l'éventuel commentaire placé au début d'un problème situant l'ensemble des questions posées dans une problématique plus large, l'étudiant de licence de mathématiques ou de préparation à l'agrégation passe, le plus souvent, en grande partie à côté de ce qui représentait l'idée directrice du problème, ce qui en caractérisait la pensée mathématique. (Pour le concepteur, il s'agit effectivement d'un très beau problème de maths ; pour l'utilisateur placé en position d'élève, c'est le plus souvent une suite d'épreuves à propos desquelles il doit montrer ce qu'il sait).

Je prétends donc que si l'élève ne peut travailler sur les concepts qu'à travers une suite de mises en application dans lesquelles il n'a pas l'initiative de proposer les idées directrices, il risque de ne percevoir que des concomitances, de ne former que des concepts amalgamés, aux antipodes de la pensée scientifique. Le danger d'un tel écrasement épistémologique est d'autant plus réel que nous nous trouvons dans une période où l'on veut lutter de façon beaucoup trop idéologique et volontariste contre l'échec scolaire.

Par exemple, suite aux recommandations du programme et légitimement désireux de ne pas faire perdre pied à leurs élèves par un formalisme excessif, certains professeurs de premier cycle des collèges choisissent de ne pas distinguer très nettement, à propos du parallélogramme, ce qui va être pris en classe (avec un certain arbitraire) comme définition et ce qui deviendra, par ce choix, propriété caractéristique.

On constate alors que *le concept de parallélogramme se réduit dans ces classes à la juxtaposition de faits élémentaires :* Pour les élèves qui ont été ainsi "exonérés des subtilités mathématiciennes", un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés égaux et parallèles, dont les diagonales se coupent en leur milieu, dont les angles opposés sont égaux et les angles consécutifs supplémentaires, et ce n'est rien d'autre !

Ce parallélogramme là ne représente donc pas les différents liens entre ces propriétés, c'est-à-dire que ces élèves "privés d'une problématique mathématicienne" ne pourront tirer de leur connaissance du parallélogramme aucun lien de nécessité entre une forme de parallélisme, la conservation des longueurs ou des angles. Il ne faudra donc pas s'étonner si, par la suite, ces mêmes élèves ne manifestent aucune envie de prouver ce qu'ils affirment en géométrie : la nature des connaissances géométriques qu'ils ont ainsi acquises ne leur permet pas de faire de preuves!

Certains diront que les élèves de ce niveau sont bien jeunes pour entrer dans une telle problématique ; nos expériences ne confirment pas ce point de vue, et de plus je suis obligé de constater qu'à ne pas vouloir entrer franchement dans une problématique mathématicienne en premier cycle du secondaire, "ça ne s'améliore pas spontanément" par la suite.

En effet, par un mécanisme analogue, dans le second cycle du secondaire et le premier cycle du supérieur, on constate que les racines d'une équation du second degré ne peuvent être envisagées par les élèves en dehors de l'algorithme du discriminant, la fonction ne peut se concevoir sans une formule, la croissance ne peut se déterminer qu'avec une dérivée positive, la convergence des suites ne peut se détacher de la monotonie, la limite et la borne supérieure ne sont traitées suivant les étudiants que comme toujours égales ou au contraire comme toujours différentes des valeurs prises par les éléments , etc. etc.. Et malgré la sélection, cet écrasement des concepts se poursuit en licence de mathématiques auprès d'étudiants qui disposent néanmoins de suffisamment d'exemples et contre-exemples pour pouvoir se prémunir contre ces déformations grossières de la théorie.

Je fais donc l'hypothèse que si l'activité mathématique sous le contrôle de l'étudiant (le cours proprement dit, c'est-à-dire l'énonciation par l'enseignant de définitions et de théorèmes et leur démonstration, n'est en général ni à l'initiative ni sous le contrôle de l'étudiant) se réduit à la résolution d'exercices et de problèmes particuliers, l'étudiant se trouve très insuffisamment incité à conceptualiser dans une problématique mathématicienne. Vu la sollicitation incontournable de l'école vers une mathématique des examens, et vu les pressions qui s'exercent de l'extérieur pour que personne n'échoue à l'école, il y a donc de façon structurelle une très forte probabilité pour qu'il se produise au lycée comme à l'université un glissement de sens de l'activité mathématique et que le jeu scientifique pratiqué à l'école ne se trouve au niveau de l'esprit en très forte contradiction avec les principes fondamentaux de l'activité scientifique.

En clair, je fais la conjecture que l'élève ou l'étudiant ne peut véritablement conceptualiser les mathématiques qu'on lui enseigne à l'école ou à l'université que si on lui ménage des entrées explicites au niveau de l'action dans une problématique de mathématicien, c'est-à-dire que si on lui propose une structure de travail dans laquelle il va pouvoir lui aussi, de sa propre initiative, passer du particulier au général (faire des conjectures), du général au particulier (tester la portée de ces conjectures) et éprouver le besoin de distinguer le nécessaire du contingent (s'engager dans la validation de ces conjectures).

En fait, la plupart des exercices et problèmes qui sont traités dans une classe doivent (pour être efficaces sur le plan d'un apprentissage à long terme) être considérés par l'élève comme des paradigmes, i.e. comme des cas particuliers dont le traitement est porteur d'une grande généralité.
En d'autres termes, quand il travaille un problème, l'élève doit pouvoir se dire : “en résolvant ce problème précis, j'apprends en fait à en résoudre beaucoup d'autres analogues, même s'ils sont apparemment très différents ; en identifiant tel obstacle dans cette situation particulière, je me rends apte à identifier des obstacles analogues dans des problèmes apparemment bien distincts”. Pour que l'élève devienne complice de cet aspect paradigmatique de l'enseignement, il faut donc qu'il puisse s'exercer à passer de sa propre initiative du particulier au général et, complémentairement, qu'il prenne l'habitude de profiter de l'étude d'un objet particulier pour vérifier la portée et la signification des idées générales.

Toutes les expérimentations du débat scientifique que nous avons pu mener dans le secondaire comme dans le supérieur tendent à fonder la thèse :

La fabrication par les élèves ou les étudiants d'énoncés généraux, de conjectures, et la discussion par le groupe classe ou amphi de leur pertinence et de leur vérité tendent à rééquilibrer le jeu scolaire au profit du jeu scientifique. Cette didactique "force l'élève" à chercher la ou les raisons des choses, l'incite (à mon sens bien au delà de ce que produisent les exhortations magistrales classiques) à sortir de la contingence au profit de la découverte d'une nécessité, qui est le propre de la démarche mathématicienne.

Quelques éléments à l'appui de cette thèse

Pour mieux expliciter le sens de cette thèse, confrontons-la aux avatars didactiques des concepts de fonction, de continuité et d'intégrale. Les fonctions sur lesquelles on fait travailler habituellement les lycéens et les étudiants de Deug A sont celles qui sont définies globalement au moyen d'une unique formule. Ces fonctions-formules nous fournissent de bons outils pour construire des situations a-didactiques(*) sur le concept de continuité ou d'intégrale.

En effet, une façon de voir si les étudiants commencent à bien intérioriser la continuité ou le concept d'intégrale, peut être de leur proposer d'étudier l'intégrale dépendant de la borne supérieure d'une fonction suffisamment compliquée pour que les calculs de primitive échouent. Dans ces conditions, seuls ceux qui maîtrisent les grandes idées que recouvrent les concepts de continuité et d'intégrale peuvent avancer, car précisément la continuité, la positivité, la monotonie, etc. sont les éléments pertinents qui permettent de répondre à bon nombre d'interrogations sans avoir à effectuer de calculs ; ces propriétés figurent implicitement dans le problème, mais elles n'ont pas été désignées comme les hypothèses à utiliser ou comme les conclusions à obtenir.

Cette situation a-didactique pour la continuité et/ou l'intégrale est donc très distincte de la situation suivante portant sur le même thème :

Le professeur désigne l'intégrale comme objet d'étude et au lieu de faire directement un cours sur ce sujet, il

(*) La notion de situation a-didactique est un concept développé par Guy Brousseau [7] qui permet d'appréhender le phénomène suivant : dire qu'une situation est a-didactique par rapport à la continuité, par exemple, signifie qu'elle fait intervenir la continuité de façon assez décisive sans qu'il y ait de marques didactiques qui poussent l'élève à penser que c'est ce concept qu'il faut évoquer.

Ainsi, lorsqu'on dit : soit f une fonction continue qui tend respectivement vers $\pm\infty$ quand x tend vers $\pm\infty$, et qu'un peu plus loin on demande de montrer que l'équation $f(x) = 2$ a au moins une solution réelle, il ne s'agit pas d'une situation a-didactique vis-à-vis de la continuité, car celle-ci est clairement désignée comme la donnée pertinente, c'est pratiquement la seule hypothèse sur f.

Par contre, s'il s'agit de déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation $g(x) = 2$ quand $g(x) = \sin(x^3) + \sqrt{(x^2 + 1)}$, le calcul direct étant trop difficile à réaliser, la continuité de g devient le concept non explicitement désigné qui est idoine pour se persuader que g prend au moins une fois la valeur 2 entre 0 et 3. Cette situation-là est a-didactique vis-à-vis du concept de continuité, car si l'élève la fait intervenir, c'est probablement qu'il en a compris l'importance (la plupart de ses camarades feront une étude de la dérivée et s'ils arrivent à déterminer son signe, invoqueront la monotonie de g pour conclure !)

demande aux élèves d'émettre eux-mêmes des conjectures sur cet objet. Il indique que ces conjectures devront permettre d'anticiper le comportement de l'intégrale dépendant de la borne supérieure $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ d'une fonction quelconque f ; les élèves pourront, suivant les conclusions auxquelles ils veulent arriver sur F (continuité, dérivabilité, monotonie etc.), supposer que l'intégrant f est lui-même soit continu, soit positif, soit monotone, etc..

Nous utilisons très régulièrement cette deuxième situation bien qu'elle soit en un certain sens épistémologiquement moins fine que la première, puisqu'ici les élèves n'ont plus aucune incertitude au niveau des concepts à utiliser. (Cette situation est non a-didactique vis à vis de l'intégrale, elle l'est par contre vis à vis de la continuité). Nous préférons cette deuxième situation à la première parce qu'en pratique on peut la gérer en laissant beaucoup d'autonomie mathématique à l'étudiant, alors que dans le premier cas c'est rarement possible.

En effet, si on met en œuvre ces deux situations, que constatera-t-on ?

– Dans le premier cas, si la situation est vraiment a-didactique, seuls quelques rarissimes étudiants arrivent à faire quelque chose de mathématiquement acceptable ; les autres, ne voyant pas bien ce qu'ils peuvent faire d'autre, s'acharnent pour faire aboutir des calculs infaisables ou ne font plus rien au bout d'un moment. Une telle situation ne pouvant se répéter plusieurs fois, l'enseignant, malgré son désir initial de faire faire de "vraies mathématiques à ses élèves", se trouve peu à peu contraint à "dé-a-didactifier" la situation, c'est-à-dire qu'au lieu de continuer à "cacher ce qui était pertinent" pour que ses élèves entrent dans la démarche intellectuelle de le découvrir par eux-mêmes, il leur indique de plus en plus précisément (à coup de "démontrez que..." et de questions intermédiaires) les concepts qu'il faut faire intervenir.

Ce fléchage des concepts utiles a une efficacité immédiate, mais en fait il tue une grande part de la potentialité cognitive de la situation (les élèves réduits au rôle d'exécutants techniques n'ont plus à penser les mathématiques qu'ils mettent en œuvre, seule la mise en application des techniques reste à leur charge).

– Dans le second cas, si on utilise un dispositif codidactique (i.e. un travail en petits groupes, un débat scientifique entre pairs, etc.), on constate assez régulièrement que la grande majorité des élèves ou des étudiants se piquent au jeu mathématique de l'anticipation et du contrôle.

Ainsi on les voit se poser eux-mêmes de vraies questions sur les concepts de fonction ou de continuité, alors qu'on leur a soumis un problème sur l'intégrale ; et vice versa, en étudiant la continuité de l'intégrale dépendant de la borne supérieure, ils sont amenés à s'interroger sur la signification profonde de l'hypothèse "f est intégrable" sur [a, b] , et finalement sur l'existence d'une fonction $x \to \int_a^x f(t)\,dt$.

Bien évidemment, je ne prétends pas que personne ne comprend dans la première situation, et que tous apprennent dans la seconde, mais quelques indices solides montrent qu'une proportion "anormale" d'élèves ou d'étudiants font ainsi une entrée significative dans une problématique mathématicienne. ("Proportion anormale" par rapport à celle qui se dégage habituellement avec des méthodes plus traditionnelles). Ainsi, quand j'affirme que restreindre le travail de l'élève à la seule étude de mathématiques particulières risque de le détourner du sens du jeu mathématique, je veux souligner que, par cette méthode, les concepts généraux des mathématiques risquent de n'être pour lui que des qualifiants des objets du cours et non de nouveaux moyens de connaître.

Par exemple, pour un élève de terminale ou un étudiant de Deug A1, les fonctions, ce sont des formules, l'ensemble de définition, c'est l'ensemble des valeurs où les calculs se font, et la continuité, c'est le qualifiant qui accompagne algébriquement ces fonctions-formules, sauf aux endroits où leur écriture n'a plus de sens. Par habitude scolaire, l'étudiant envisage donc la continuité comme une sorte d'application directe du cours. Il fait ici ou là un raisonnement de continuité, parce qu'on lui demande de vérifier que telle ou telle fonction est bien continue ; mais il ne pense pas un instant qu'inversement la continuité pourrait lui éviter des calculs pénibles ou lui permettre d'orienter ses calculs en vue d'obtenir un résultat qui ne s'exprime pas au départ en terme de continuité !

Par exemple, si nous regardons la conjecture :

"L'ensemble A des nombres rationnels, dont le carré est plus petit que 2 , n'a pas de maximum"

la quasi-totalité des étudiants d'un amphi de Deug A1 est persuadée que c'est vrai.

– Pourquoi ?

– Parce que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel !

Question de l'enseignant :

– Admettons que nous ayons démontré ce résultat " $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel", a-t-on du même coup montré la conjecture ?

L'amphi :

– Oui !

– Pourquoi?

– Parce que c'est impossible que A ait un maximum.

– Et pourquoi c'est impossible ?

Silence déconcerté de l'amphi. Rires gênés et exclamation à mi-voix :

– C'est évident!

– C'est impossible parce que c'est impossible !

– ça se voit !

Au bout d'un temps, petite voix timide d'une étudiante :

– Ne serait-ce pas une histoire de continuité de x^2 ?

Rire moqueur de l'amphi signifiant probablement que l'étudiante a dépassé les bornes : "Il ne faut pas exagérer, car vraiment la continuité n'a absolument rien à voir avec ce problème !" On peut donc apercevoir que dans un amphi de 120 titulaires du bac C, seuls un ou deux étudiants ont formé un concept de continuité qui leur permet de montrer autre chose ... que de la continuité.

Ici cette étudiante tire de la continuité la non-existence d'un maximum, et la grande majorité de ses collègues ne comprennent goutte à ce rapprochement invraisemblable, puisqu'ils sont persuadés par amalgame de la croissance, des valeurs intermédiaires et de la continuité ici présentes qu'il n'y a rien à montrer, que ... c'est évident ! Ils se trouvent donc contraints de se moquer de cet argument mathématiquement pertinent, qui n'a pas de sens dans leur problématique.

Essayons d'analyser pourquoi il n'est pas évident de se rendre compte que la continuité de la fonction $x \to x^2$ est ici décisive.

A mon sens, pour le voir, il faut entrer dans l'univers des mathématiciens :

– *Supposons l'impossible*, c'est-à-dire que A possède *un maximum* a *et tentons de faire logiquement surgir une contradiction !*

– *Ecrivons qu'un maximum* appartient à l'ensemble : $a^2 < 2$.

– L'idée naturelle est alors de se dire que si a^2 est strictement plus petit que 2, il y a une "telle place" entre les deux nombres a^2 et 2 qu'on doit "forcément" pouvoir y loger un carré b^2 d'un rationnel b strictement supérieur à a (ce qui contredirait immédiatement l'hypothèse "a = max A").

– Pour se persuader de l'existence d'un tel b ($b \in \mathbb{Q}$, $b > a$ et $b^2 \leq 2$), l'idée "naturelle" (si on suppose que le concept de "se rapprocher de" est un concept opérationnel) est de *traduire l'hypothèse* $a^2 < 2$ *par l'égalité* $2 = a^2 + \varepsilon$ *et de considérer ce nombre* ε *strictement positif comme la distance "incompressible" entre* a^2 *et* 2 .

Dans cette vision du problème en terme de distance, on sait alors que *tout nombre* b^2 *qui sera proche du nombre* a^2 *de moins de* ε *ne pourra dépasser* 2 (c'est l'idée clef de cette preuve). Notre problème sera donc résolu s'il est possible de trouver un nombre rationnel $b > a$ dont le carré b^2 soit proche de a^2 à moins de ε .

C'est alors que l'idée générale de continuité de la fonction $x \rightarrow x^2$ s'impose (si ce concept existe) comme un fait pertinent. En effet, en écrivant $b = a + \beta$, on est certain, grâce à la continuité en a de la fonction $x \rightarrow x^2$, qu'*en choisissant un rationnel* $\beta > 0$ *suffisamment petit, on fabriquera par ce procédé un rationnel* $b > a$ *suffisamment proche de* a pour que son carré b^2 soit proche de a^2 à moins de la distance fatidique ε donnée au départ, et donc un rationnel b tel que $b^2 \leq 2$.

Si jamais on n'était pas totalement convaincu par ce raisonnement qualitatif, l'idée de continuité nous permettrait encore d'organiser nos calculs pour le prouver explicitement en détail :

– *Traduisons nos intuitions* en termes d'accroissements, et pour cela écrivons :

$$b = a + \beta \quad \text{avec } \beta \text{ rationnel } > 0 .$$

Par construction, b est un rationnel strictement plus grand que a .

– Ecrivons le carré en développant $(a+\beta)^2$; on obtient en tenant compte du fait que $a^2 = 2 - \varepsilon$: $b^2 = 2 - \varepsilon + 2\,a.\beta + \beta^2$.

– *Pour connaître la position de* b^2 *par rapport à* 2 *, écrivons* :

$$b^2 = 2 - (\varepsilon - 2\,a.\beta - \beta^2) .$$

Il suffit alors, pour pouvoir affirmer que b est un élément de A , de montrer que la parenthèse $(\varepsilon - 2\,a.\beta - \beta^2)$ *peut être rendue* positive pour un β strictement positif.

– *Pour voir si on peut choisir un tel* β , il suffit de résoudre l'inéquation :

$$\varepsilon - 2\,a.\beta - \beta^2 \geq 0.$$

Comme cette inéquation "aveugle" n'admet pas de solution évidente en $\beta > 0$, on peut toujours, *en pensant à la continuité* de $x \rightarrow k.x$ et de $x \rightarrow x^2$, la transformer en :

$$2a.\beta + \beta^2 \leq \varepsilon ;$$

puis, remarquant que $a \leq 2$ et *en prenant* $\beta \leq 1$, *on peut effectuer la majoration :*

$$2\,a.\beta + \beta^2 \leq 5.\beta .$$

Une telle majoration nous persuade que *notre inéquation de départ sera satisfaite si l'inéquation plus triviale :* $5\beta \leq \varepsilon$ *l'est également.*

– Il suffit alors de choisir $\beta = \varepsilon/5$ *pour fabriquer un rationnel* b *strictement supérieur à* a *et dont le carré ne dépasse pas* 2.

Ayant ainsi obtenu une contradiction formelle, on en déduit sous couvert de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ *que* A *n'a pas de maximum !*

N.B. J'ai mis en italique tout ce qui, dans ce raisonnement, relève à mon sens d'une pratique profondément mathématicienne.

Faisons l'inventaire de ces pratiques profondément mathématiciennes :

– supposer le contraire de ce qu'on pense être le résultat,

– chercher une contradiction,

– travailler par conditions suffisantes,

– utiliser le fait que deux points distincts sont en un certain sens très éloignés,

– utiliser le jeu des écritures, notamment l'écriture $b = a + \beta$*, pour signifier qu'on travaille autour de* a *et pour matérialiser les idées de continuité,*

– ne pas résoudre aveuglément une inéquation compliquée, mais faire des majorations, afin d'en résoudre une plus simple qui implique la précédente,

– choisir, parmi les paramètres possibles, non pas le "meilleur", mais un qui soit simple et qui "marche",

– considérer qu'une seule contradiction en fin de raisonnement suffit, par enchaînement logique, pour faire vaciller les prémices, et que si ces prémices sont la négation du résultat qu'on souhaite établir, il devient certain par ce raisonnement que ce résultat est exact.

Il est clair que pour celui qui est familier avec ces pratiques mathématiciennes et qui a une bonne vision de la continuité, il suffit d'évoquer la continuité de $x \to x^2$ pour que se dessine rapidement dans son esprit la trame du raisonnement précédent ; il est tout aussi clair qu'excepté pour quelques génies, le raisonnement précédent ne viendra jamais à l'esprit d'élèves ou d'étudiants qui sont étrangers à ces pratiques et à ce concept de continuité. On pourra bien leur laisser un temps de réflexion quasi illimité, ils n'auront pratiquement aucune chance de découvrir seuls un tel raisonnement, et même lorsque le professeur le leur détaillera, ce dernier risquera de leur apparaître comme une sorte d'extra-terrestre tant ses arguments seront éloignés de leurs problématiques : ce raisonnement semblera immensément loin et complexe à certains et sera ressenti comme une véritable tartufferie par d'autres.

Ma conjecture est donc que jouer véritablement le jeu mathématique en construisant et en discutant des énoncés généraux est une activité indispensable pour que de tels raisonnements deviennent d'abord nécessaires, ensuite accessibles, enfin naturels.

Sachant qu'à l'heure actuelle les étudiants qui pratiquent spontanément, seuls ou avec quelques camarades, une telle activité de conjecturation à l'issue des cours et des T.D. sont devenus rarissimes, cette conjecture didactique a pour corollaire la nécessité de trouver des didactiques de cours et de travaux dirigés qui amènent momentanément l'élève à entrer dans une problématique de chercheur. L'organisation en cours d'un débat scientifique est donc une mise en application de ce corollaire.

Des choix didactiques, plus idéologiques que didactiques, vont à l'encontre de cette thèse.

Depuis la réaction contre l'excès de bourbakisme des "maths modernes" des années 70, les choix dominants de l'enseignement secondaire et supérieur vont à mon sens à l'encontre de la thèse précédente. Ces choix didactiques reposent essentiellement sur l'analyse suivante :

"Pour que les élèves ne soient pas formalistes, pour qu'ils ne raisonnent pas comme des caisses vides, faisons-les entrer dans les mathématiques par le calcul, par le travail sur des expressions "concrètes", supprimons les mots trop complexes, n'utilisons plus le langage symbolique, naturalisons la logique mathématique, n'insistons pas sur les différences entre définitions et propriétés caractéristiques, car toutes ces subtilités risquent de passer par-dessus la tête du plus grand nombre des élèves qui se contenteront alors de jargonner sur des objets qu'ils ne maîtrisent pas.

L'important n'est-il pas de faire manipuler à l'élève des objets mathématiques courants?

Parions sur le fait que la conceptualisation des techniques se réalisera progressivement, de façon naturelle, quand la complexité des problèmes la rendra indispensable et que l'élève accédera à la maturité nécessaire, comme cela s'est produit spontanément chez tous ceux qui sont devenus mathématiciens, y compris les très grands!".

Il y a, je crois, dans cette analyse pleine de "bon sens" faite en général par d'anciens "bons élèves" devenus bons mathématiciens, un terrible oubli, une formidable ignorance de toute l'action didactique qu'ils se sont appliquée à eux-mêmes (au delà et en dehors des enseignements officiels) pour comprendre, didactique que la plupart des chercheurs continuent à s'appliquer quotidiennement pour mener de front technique et sens, langage familier et langage symbolique.

Il y a aussi dans cette façon d'envisager les problèmes d'enseignement une sorte d'identification du monde de nos élèves à notre propre monde d'élève, car cette analyse nie tout ce qu'un certain environnement extra-scolaire a pu apporter à ceux qui sont issus de milieux culturellement favorisés, et par suite ne tient aucun compte du manque didactique dont souffrent ceux qui n'en bénéficient pas.

En fait, il est clair que nos élèves ou nos étudiants ne deviendront pas tous de grands mathématiciens et que leur préoccupation principale n'est pas, et ne sera jamais pour la plupart d'entre eux, les mathématiques vingt quatre heures sur vingt quatre, et c'est bien ainsi. Cela a pour conséquence que, pour eux, le transfert du particulier au général et du général au particulier ne va probablement pas se produire spontanément comme il s'est peut-être produit pour certains d'entre nous.

C'est la raison pour laquelle je pense que l'action didactique doit prendre en charge ce problème explicitement. Le débat scientifique en cours de mathématiques (qui agace si fortement ceux qui déclarent qu'ils n'auraient pas aimé qu'on leur enseigne les mathématiques de cette façon) a précisément pour but de faire en sorte que les élèves non "extraordinaires" par leurs dons initiaux ou par leur environnement culturel puissent eux aussi "jouer avec les mathématiques", qu'ils puissent apprivoiser les énoncés généraux en apprenant à les manipuler en tenant compte de leur fonctionnalité, c'est-à-dire finalement qu'ils parviennent à leur attribuer un sens compatible avec celui du mathématicien professionnel.

Je ne défends pas ici le point de vue irréaliste "tout le monde est capable de faire des mathématiques à un très haut niveau", mais par contre l'idée plus raisonnable bien que très exigeante au niveau didactique : ***"si on estime que des mathématiques d'un certain niveau sont à enseigner dans un cursus donné, il faut pour les maintenir dans ce cursus pouvoir inventer une didactique qui permette à la majorité des élèves de leur attribuer un niveau de sens compatible avec celui des concepteurs de ces mathématiques".***

Maintenant on peut se poser la question : pourquoi soutenir la thèse précédente principalement en analyse, puisque, si elle est pertinente en analyse, elle le sera certainement aussi pour les mathématiques en général, et peut-être même pour tout apprentissage scientifique ?

En fait, je pense que la pertinence de cette conjecture est effective sur l'ensemble des mathématiques, mais que ses conséquences sont plus directement sensibles en analyse qu'ailleurs, car si beaucoup d'élèves arrivent dans un enseignement non problématique à manipuler avec un certain bonheur les équations ou les matrices, rarissimes sont ceux qui sans être entrés profondément dans une problématique mathématicienne, arrivent à faire autre chose que de la figuration avec les notions de convergence.

Tant que l'expression " $\forall\ \varepsilon > 0 ; \exists > 0 ; \ldots$ " demeure une formule magique, les seuls traitements possibles de l'analyse consistent en des manipulations formelles de règles et d'algorithmes de passage à la limite, l'élève ne contrôlant ni le sens ni la portée des résultats qu'il manipule au travers de ces symboles. *(Beaucoup d'étudiants de Deug ou de classe préparatoire savent par exemple appliquer convenablement les critères classiques de convergence des séries, mais une infime minorité sait donner du sens aux résultats fournis par ces critères, i.e. expliciter ce que signifie "la série converge", "la série diverge".)*

C'est précisément l'objet de la conjecture suivante que de pointer le fait que "passer par l'analyse", c'est accepter, pour des raisons méta-mathématiques non évidentes, d'entrer dans un jeu scientifique qui est en un certain sens encore plus anormal que celui que le mathématicien pratique en algèbre ou en géométrie.

Deuxième thèse ou conjecture plus spécifique de l'analyse

De par les choix au deuxième degré qu'ils contiennent, les raisonnements propres à l'analyse présentent un saut épistémologique très important.

En effet, *entrer dans le jeu de l'analyse, c'est pour l'essentiel accepter à partir de quelques principes directeurs de* ***perdre volontairement une information particulière*** *très forte pour en déduire une plus faible mais plus significative et plus manipulable (majorations, minorations), c'est* ***penser qu'un détour par l'infini peut permettre de traiter un problème dont la formulation est finie.***

En particulier, faire de l'analyse, c'est ***croire qu'en utilisant des approximations*** *et bien souvent des empilements de plus en plus grands d'approximations,* ***on peut rationnellement obtenir*** *par des procédures infinitésimales (et non par la* *magie)* ***un résultat rigoureusement exact.*** *C'est enfin prendre en compte dans les calculs certaines quantités très petites et en négliger d'autres,* ***sans pouvoir se référer dans ce choix à une intuition tirée de la réalité matérielle,*** *car précisément ces quantités sont si petites qu'elles ne peuvent être significativement regardées comme des modèles d'une réalité sensible.*

Je fais donc l'hypothèse que contrairement aux démarches de l'arithmétique, de l'algèbre ou de la géométrie qui peuvent jusqu'à un certain point garder sens à partir d'une vision assez empirique des mathématiques, la démarche de l'analyse (quand elle n'est pas regardée sous son angle algébrisé) confine rapidement à l'absurdité pour quelqu'un qui n'entre pas franchement dans une problématique mathématicienne.

En effet, dans un traitement de l'analyse qui ne se réduit pas à son vernis algébrique, il faut accepter un changement radical de point de vue dans la façon de contrôler "qu'un chat est bien un chat". Ce changement radical de point de vue est résumé par ce que j'appelle **la procédure de l'analyse** qui se distingue des procédures bien connues par les élèves, **les procédures de l'algèbre et de l'ordre**.

Trois procédures très différentes, quoique complémentaires

Pour prouver qu'une quantité A à étudier est égale à une quantité B connue, i.e. **pouvoir écrire que $A = B$,**

– en algèbre, on passe par un nombre fini d'intermédiaires :

$$A = C, \quad C = D, \dots, \quad F = B$$

– sur un ensemble ordonné, on montre simultanément que $A \leq B$ et $B \leq A$

– en analyse, on dit :

prenez un élément C strictement supérieur à B et vérifiez que : (1) $A \leq C$.

ou

prenez une approximation ε strictement positive et vérifiez que :

(2) *la distance $d(A, B) \leq \varepsilon$.*

si (1) "marche" **pour tout $C > B$**, alors vous pouvez être **certain que $A \leq B$**,

ou

si (2) "marche" **pour tout $\varepsilon > 0$**, alors vous pouvez être **certain que $A = B$**.

Si la première procédure est assez évidente, et si la seconde, celle de l'ordre, bien que beaucoup moins naturelle est cependant très "logique", *je prétends que pour croire à la fiabilité de la troisième, pour accepter de l'utiliser, il faut impérativement quitter les mathématiques empiriques, calculatoires ou concrètes.*

En effet, si je me trouve en présence de deux quantités finies et fixes A et B, si je les "vois", je sais en les voyant si A est ou non inférieure à B, si A est ou non égale à B ; et si je peux les atteindre par le calcul, j'effectue ces calculs qui vont me permettre de les ranger. Je ne peux donc m'intéresser à cette procédure de l'analyse que si je suis poussé dans mes derniers retranchements, c'est-à-dire si je crois à la réalité et à l'utilité de ces deux quantités A et B, bien que la façon dont elles ont été produites ne me permette ni de les "voir", ni de les calculer directement.

De plus, pour penser à utiliser une telle procédure, il faut peut-être aussi avoir découvert expérimentalement les ***contraintes du "créneau"*** *(la quasi-impossi-*

bilité de garer sa voiture dans un emplacement qui fait l'exacte longueur de votre véhicule), ***il faut donc savoir à l'avance ce qu'on pourra faire de mieux si on se "donne un ™ de respiration"!***

Pour m'intéresser à cette procédure de l'analyse, il faut donc que je possède un pressentiment de continuité qui me permette d'imaginer que si on me donne un peu de "liberté" dans la façon de traiter les résultats (i.e. au lieu de me demander de montrer directement que $A \leq B$, on me demande seulement de montrer que $A \leq B + \varepsilon$), je vais pouvoir profiter de cette liberté pour faire varier de façon ad hoc le ou les paramètres qui gouvernent continument ces résultats (par exemple : si $A = A(x)$ dépend continument du paramètre x, alors je sais que si x ne s'écarte pas trop de sa position initiale, $A(x)$ ne variera pas de plus de cet $\varepsilon > 0$ de liberté qui m'a été donné).

Si donc je ne sens pas confusément tout cela, je ne m'engagerai jamais dans une procédure aussi coûteuse que celle de l'analyse, puisqu'en principe elle nécessite une infinité de vérifications ! Et non seulement je ne m'y engagerai pas personnellement, mais je ne comprendrai même pas pourquoi d'autres personnes osent s'y engager et prétendent avoir prouvé quelque chose en s'y référant !

Par exemple, lorsque nous établissons l'inégalité des accroissements finis (C) :

$|f(b) - f(a)| \leq K.|b-a|$, où $K = \sup |f'(t)|$,

nous demandons à nos étudiants d'être convaincus de la validité de la démarche suivante :

"Pour obtenir (C), il suffit d'établir l'inégalité (C') : $|f(b) - f(a)| \leq K'.|b - a|$, pour toute constante K' strictement supérieure à K...

Prenons donc $K' > K$ et montrons (C ') ... etc."

Bien entendu nos élèves ne protestent pas, car nous l'affirmons magistralement, mais sont-ils intimement persuadés de l'argument que nous leur donnons ?

En effet, la rigueur d'un tel raisonnement portant explicitement sur un seul K' n'est pas évidente et tient au fait que ***si l'infini n'y est pas explicitement désigné, il est néanmoins potentiellement présent*** pour parer à toute contestation.

De façon précise, ayant à montrer que $A = |f(b) -f(a)| / |b-a|$ est inférieur ou égal à K et n'y arrivant pas directement, on décide de se donner un $K' > K$, c'est-à-dire on considère $K' = K + \varepsilon$, pour un certain $\varepsilon > 0$.

En exploitant les possibilités que donne cet $\varepsilon > 0$ de liberté, on prouve alors que : $A \leq K + \varepsilon$. (C'est le "principe du créneau" : en exploitant la différentiabilité de f sur $[a, b]$, c'est assez facile pour un quelconque $\varepsilon > 0$, impossible directement si $\varepsilon = 0$).

En principe, puisque la propriété devrait être vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$, il faudrait maintenant changer de K', c'est-à-dire diminuer ε et voir si la démonstration "marche" encore pour un autre $\varepsilon > 0$, et ainsi de suite indéfiniment. En pratique, le mathématicien (qui a fait sienne la procédure de l'analyse) va considérer de façon quasi évidente que s'il est arrivé à démontrer que $A \leq K + \varepsilon$ sans utiliser sur cet ε d'autre spécificité que sa stricte positivité, il n'a plus besoin d'envisager d'autres cas pour conclure.

Si néanmoins, pris de doutes, nous voulons expliquer cette évidence, il nous faut faire un raisonnement par l'absurde pour nous persuader que le cas de figure $A > K$ est impossible.

En effet si $A > K$, alors on peut écrire $A = K + ß$ avec $ß > 0$ et alors, en choisissant $\varepsilon = ß/2$ et en appliquant le raisonnement précédent (ce qui est licite puisque l'approximation ε choisie en vue d'obtenir une contradiction est strictement positive), on obtient l'absurdité indéniable $1 \leq 1/2$; donc, par refus de cette absurdité élémentaire là, on peut légitimement, sans craintes, déduire que $A \leq K$.

La démonstration précédente repose donc sur un raisonnement fini dans lequel on s'est donné des facilités supplémentaires (C ' est plus facile à démontrer que C), facilités qu'on devrait "payer" *a posteriori* par un recours à l'infini (on démontre en principe une infinité de C '). Le travail que réclamerait ce recours explicite à l'infini est "économisé" par un raisonnement par l'absurde. Il y a donc là, à mon sens, une procédure détournée très "anormale" et très chère conceptuellement.

Je fais donc l'hypothèse qu'on ne peut être tenté d'adopter une telle procédure que si l'on est dans une problématique assez générale, car alors :

– d'une part on n'aura peut-être aucune autre solution,

– d'autre part, les objets que l'on manipulera seront relativement bien adaptés à ce type de traitement.

En effet, celui qui a repéré les possibilités que lui offre cette procédure pense facilement à l'introduire dans l'élucidation d'un problème général, car dans ce cadre il lui suffit de faire les hypothèses de continuité indispensables à son fonctionnement à chaque fois que cela lui paraît nécessaire. Bien entendu, faire des hypothèses supplémentaires pour pouvoir utiliser un outil de démonstration peut restreindre inutilement la portée de résultats que l'on établit ainsi. Mais c'est dans l'esprit même de la résolution d'un problème général que d'arriver à cerner des classes de situations favorables où tout "marche bien" grâce à des hypothèses de continuité (ou bien, au contraire, de constater que même avec des hypothèses supplémentaires de ce type, on ne peut toujours pas garantir le résultat).

Par contre, dans une problématique initialement très particulière ou très algébrique, on aura tendance à s'acharner sur la particularité, à faire des calculs, à chercher des raisons techniques éventuellement très compliquées, car rien a priori ne nous incitera à penser qu'un passage par l'infini fournirait une solution à un problème qui est explicitement posé en termes finis, ou que des majorations ou des approximations pourraient en fin de compte produire les égalités recherchées.

En résumé, il me semble qu'en analyse, le jeu mathématique scolaire, s'il n'est pas compensé par un fort jeu scientifique, est condamné plus qu'ailleurs à se réduire à la mise en œuvre assez mécanique de recettes, car il oblige l'élève qui ne contrôle plus rien au niveau du sens et de la validité à faire une confiance quasi aveugle en l'enseignement!

Dès lors se pose la question du sens véritable de notre formation scientifique, car si les vraies raisons qui valident la démarche échappent à l'apprenti scientifique, la rationalité qu'il développe dans cet apprentissage est sans objet.

En effet une telle rationalité n'a pratiquement aucune fonctionnalité externe : elle n'est pas exploitable dans le monde du travail, elle n'est pas non plus libératrice pour l'individu, puisqu'elle n'est utilisable que dans l'atmosphère aseptisée de l'école.

Un exemple où l'analyse scolarisée glisse vers une caricature de démarche scientifique.

Pour ne pas en rester au stade des affirmations générales, regardons sur un exemple caractéristique de l'analyse *(la procédure différentialo-intégrale)* jusqu'où peut aller la perte de contrôle épistémologique de l'étudiant, quand on veut lui éviter d'entrer de plein pied dans une problématique scientifique.

Quel problème didactique va-t-on épingler ici ?

Combien d'étudiants sortant d'une licence de mathématiques ont remarqué en quoi la mise en équation différentialo-intégrale de certains problèmes dits "physiques" est une pure mystification quand on l'effectue sans contrôle? et inversement, combien d'étudiants de physique ont réalisé qu'en exerçant un minimum de contrôle, ils disposaient par cette procédure de l'exemple même de ce que la science peut produire de meilleur, quand elle exploite convenablement la rationalité mathématique pour traiter physiquement certains aspects de la réalité ?

De quoi s'agit-il au fait dans cette procédure ?

Il s'agit de remplacer un calcul direct qu'on ne sait pas effectuer, par un empilement de calculs approchés, empilement qui paradoxalement devient de plus en plus précis à mesure qu'on augmente le nombre des approximations, jusqu'à fournir à la limite, par un moyen très détourné, un résultat rigoureusement exact ! De façon plus technique, cette procédure se présente de la façon suivante :

– *Ne sachant pas calculer directement un résultat V attaché à un objet Ω, on "découpe" astucieusement l'objet Ω en parties ou "tranches très petites" $\Delta\Omega$, dans l'espoir de pouvoir calculer plus simplement le résultat partiel ΔV correspondant à chaque élément $\Delta\Omega$ du découpage.*

On fait cela bien sûr quand des considérations externes montrent que le problème est additif, c'est-à-dire que la somme de toutes ces contributions partielles ΔV redonne le résultat V initialement recherché.

En principe donc $V = \sum \Delta V$ et par suite, si on connaît exactement tous les Δv, on connaît par sommation finie le résultat V recherché.

– *Par une alchimie qui échappe facilement au néophyte, le calcul du résultat partiel ΔV devient $dV = f(x)\,dx$,* où $f(x)$ est le coefficient qui apparaît pour calculer ΔV quand on considère que "l'épaisseur" dx de la tranche est "infiniment ou très petite".

La somme finie $\sum \Delta v$ devient alors $\int dv$ ou $\int_a^b f(x)\,dx$, qui par la théorie de l'intégration se calcule en effectuant l'opération $F(b) - F(a)$ avec une primitive quelconque F de f.

Ainsi se présentent donc la plupart des mises en équations différentialo-intégrales ! *Pour des raisons de coutume didactique et d'efficacité scolaire, personne ne se révolte contre ce qui pourrait apparaître à beaucoup, lorsque cela se reproduit, comme un tour de "passe-passe".*

Il n'y a pas de révolte car, d'abord, *personne n'a envie d'aller calculer directement le $\sum\Delta v$* qui a du sens physique, mais qu'on ne sait pas traiter algébriquement, alors qu'on sait calculer (tout au moins dans les cas qui sont présentés à l'école) le $\int_a^b f(x)\,dx$

par un calcul de primitive classique. Ensuite et surtout, il n'y a pas de révolte parce qu'*à chaque fois que cette procédure est utilisée dans le cadre scolaire ou universitaire, elle ne fournit jamais de résultats surprenants :* on retrouve bien πR^2 pour l'aire du disque et $4/_3\pi R^3$ pour le volume de la sphère !

Jusqu'à ce point, on pourrait dire qu'il n'y a rien là de très scandaleux : nous utilisons tous à un moment ou à un autre des sortes de boîtes noires dont nous contrôlons uniquement les entrées et les sorties, et le travail scientifique n'interdit pas (bien au contraire) de faire confiance aux équipes constituées qui nous fournissent des outils scientifiques dont elles garantissent les spécificités.

Là où la procédure relève de la mystification, c'est lorsque l'étudiant cherchant à s'en servir pour établir lui-même un résultat, se trouve face au fait crucial suivant :

Quand on découpe Ω en parcelles $\Delta\Omega$, dans 99,99... % des cas on ne sait pas mieux calculer exactement au moyen d'une procédure algébrique le ΔV qu'on ne savait le faire directement pour V (c'est même souvent encore plus délicat, car les morceaux $\Delta\Omega$ ont éventuellement perdu les symétries et autres régularités que détenait l'objet global initial Ω).

Par suite, écrire en utilisant le mot magique "tranche infiniment petite" que : $\Delta V = f(x)\,\Delta x$, relève du miracle ou de la "magouille".

Par contre, en analysant les caractéristiques de la situation et en essayant de modéliser la tranche $\Delta\Omega$ par une tranche "plus simple" $d\Omega$, l'hypothèse " Δx est infiniment petit" permet **honnêtement** d'envisager de pouvoir décomposer le résultat partiel Δv (que l'on ne sait pas calculer exactement) en **somme d'un résultat idéal dv** proportionnel à l'épaisseur Δx (résultat idéal que l'on écrira $dv = f(x)\,dx$) et **d'une partie secondaire $r(\Delta x)$ qui représentera ce que l'on ne sait pas calculer :**

$$\Delta v = dv + r(\Delta x)\,.$$

Si, pour calculer V, on additionne dans ces conditions tous les résultats partiels Δv, d'un côté on va bien retrouver le résultat V cherché et de l'autre on va trouver deux sommes : une somme $\sum dv$ dont la théorie de l'intégration garantit sous des hypothèses faibles (f intégrable) qu'elle tend vers $\int f dx$, et une somme $\sum r(\Delta x)$ qui représente la somme de toutes les erreurs commises dans le calcul approximatif des résultats partiels :

$$V = \sum dv + \sum r(\Delta x)\,.$$

En sciences, l'apparition de ce reste $\sum r(\Delta x)$ est a priori dramatique, car dire que chaque reste $r(\Delta x)$ est très petit, ne garantit en rien que la somme $\sum r(\Delta x)$ de tous ces restes le soit aussi.

Dans une procédure de découpages de plus en plus fins, la précision sur chaque tranche augmente, mais le nombre des tranches aussi, et l'un des b.a.-ba de l'analyse est de réaliser que la somme d'un grand nombre de quantités très petites peut ne pas être petite.

Par exemple, quand chacun des a_i est de l'ordre de $1/n$, la somme $\sum_1^n a_i$ n'est pas toujours petite :

$$\sum_1^n a_i > 1/2 \text{ quand } a_i = i / n^2$$

et $\Sigma_1^n a_i = 10^{10}$ quand $a_i = 10^{10}/n$.

A priori donc, les mises en équations intégrales devraient immanquablement déboucher sur une discussion de fond : quels sont les ordres de grandeur admissibles pour $r(\Delta x)$ qui légitiment cette procédure ? c'est-à-dire à quelles approximations partielles $r(\Delta x)$ a-t-on droit pour que leur somme $\Sigma\, r(\Delta x)$ tende vers zéro quand Δx tend vers 0 ?

Une réponse simple pourrait être : **si l'erreur partielle est du second ordre** au sens large (i.e. $r(\Delta x) | \leq M.\Delta x^2$ où M est une constante quelconque, par exemple 10^{10}, ou encore $r(\Delta x) = \Delta x.\varepsilon(\Delta x)$ avec $\varepsilon(\Delta x)$ tendant vers zéro — indépendamment de x — quand Δx devient infiniment petit, ou encore des hypothèses plus pointues), **alors $\Sigma\, r(\Delta x)$ tend vers zéro avec Δx et la procédure est valide.**

Mais la coutume d'enseignement est autre : pour éviter la partie proprement analyse de cette mise en équation, on ne discute pour ainsi dire jamais en mathématiques comme en physique les ordres de grandeur qui légitimeraient la procédure adoptée. Par suite, on est condamné à pratiquer ces mises en équation "sauvagement", c'est-à-dire sans véritablement se soucier de savoir si ce qu'on ne prend pas en compte dans la mise en équation est ou non infiniment petit par rapport à ce qu'on retient pour ce calcul.

Les mots magiques utilisés par tous sont alors : "la tranche est très fine, Δx est infiniment petit..." et c'est à ce stade que la procédure intégrale devient, à mon sens, une véritable mystification scientifique.

En effet, en bonne logique, si dans cette procédure on "jette $r(\Delta x)$ du seul fait qu'il est infiniment petit", il faut de même "jeter $f(x)\,\Delta x$ qui lui aussi est infiniment petit" !

Mais cela, on ne le fera jamais ! car si on le faisait, il ne resterait plus rien à intégrer, et on serait vite conduit à abandonner cette procédure **qui ne présenterait plus les apparences de la scientificité**!

On ne garde donc cette procédure que parce qu'en présentant une façade de rationalité, elle nous redonne les résultats que nous connaissons déjà.

Autant donc donner directement le résultat qu'on prétend établir rigoureusement ainsi, puisque les moyens de contrôle qui sont évoqués (toute théorie de l'intégrale mise à part) sont tels que personne ne peut savoir si ce qui est négligé est négligeable ou au contraire aussi grand, si ce n'est beaucoup plus grand, que ce qui a été minutieusement calculé. Pour que cette procédure intégrale prenne sens et donne à l'étudiant un nouveau moyen d'investigation sur la réalité physique, il nous semble donc nécessaire de lui offrir l'occasion d'effectuer "sauvagement" des mises en équations intégrales qui produiront "naturellement" des résultats absurdes.

Par exemple, on peut proposer des mises en équation qui "prouvent" que l'aire latérale du cône est égale à la moitié de celle du cylindre de même disque de base et de même hauteur, ou que la surface de la sphère est égale à $\pi^2 R^2$ (cf [1] et Artigue M.[8]).

A partir de ces expériences qui conduisent à de véritables catastrophes (trouver par cette procédure une aire 2 fois, 10 fois, 10 000 fois supérieure à la réalité), la discussion sur les ordres de grandeur des approximations locales $r(\Delta x)$ a de bonnes chances de prendre plus de sens.

La procédure intégrale une fois dotée de quelques outils opérationnels pour contrôler la légitimité de ce qu'on néglige, peut devenir pour ces étudiants non seulement un formidable moyen d'investigation scientifique, mais aussi un paradigme, une remarquable illustration de ce que peut produire la science quand elle marie intuition et rigueur.

En conclusion, je fais donc l'hypothèse que si l'enseignement traditionnel aboutit si inexorablement à de telles mystifications scientifiques, c'est probablement qu'il est quasiment impossible d'aborder scientifiquement des concepts fondamentaux, tels la continuité ou l'intégrale, sans convier les élèves à pratiquer le grand jeu, c'est-à-dire le jeu d'une communauté scientifique dans laquelle chacun s'essaye à produire des énoncés généraux (les conjectures) et se sent en charge de contrôler la validité de ceux qui lui sont proposés par les autres.

Dans l'entreprise didactique, ce jeu scientifique est difficile à maintenir dans son esprit certes, mais n'est-ce pas par lui que l'on pourra le plus sûrement faire partager à nos élèves une valeur fondamentale de notre culture : *l'accès à une forme de rationalité qui confère à ceux qui la maîtrisent une certaine indépendance de pensée ?*

Bibliographie

[1] *L'enseignement des mathématiques au niveau universitaire.* Textes réunis par la commission Inter-Irem "UNIVERSITE". ICME 6 -1988.

[2] Legrand M. : *Genèse et étude sommaire d'une situation codidactique : le débat scientifique en situation d'enseignement.* Colloque franco-allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique. Journées S.M.F. Luminy, 16-21 novembre 1986.

[3] Legrand M. : *Les compétences scientifiques des étudiants sont-elles indépendantes de la façon dont nous leur présentons la science ?* Gazette des Mathématiciens, Supplément n° 48, avril 1991.

[4] Grenier D. - Legrand M. - Richard F. : *Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année.* Cahiers de Didactique des Mathématiques, Irem Paris VII, n° 22, 1985.

[5] Lakatos I. 1976. *Preuves et réfutations.* Paris : Hermann Ed., 1985.

[6] Johsua S. et Dupin J.J. (1989) *Représentations et modélisations : le "débat scientifique" dans la classe et l'apprentissage de la physique.* Editions Peter Lang S.A., Berne.

[7] Brousseau G. Thèse d'état. Irem de Bordeaux I.

[8] Artigue M. et al. *"Questionnaire de travail sur les différentielles".* Irem de Paris VII, mars 1989.