REPERES - IREM . n°10 - janvier 1993

DES STATISTIQUES AUX PROBABILITES EXPLOITONS LES ARBRES

Bernard PARZYSZ
Equipe DIDIREM, Irem de Paris VII

Les nouveaux programmes du lycée introduisent les Probabilités en Première S, en préconisant une approche "fréquentiste", c'est-à-dire se fondant sur les acquis antérieurs des élèves dans le domaine des Statistiques, par opposition à l'approche "pascalienne", basée sur la notion d'équiprobabilité et les dénombrements (cf. Henry 1992, in Repères n° 6). La probabilité d'un événement apparaît ainsi comme une sorte de "limite" de la fréquence sur un grand nombre d'expériences. Pour y accéder, on dispose de deux moyens principaux :

— la réalisation "en vraie grandeur"

— la simulation

La première méthode a évidemment pour elle l'avantage de sa "réalité" même, mais elle est coûteuse à mettre en œuvre ; la seconde, grâce aux calculatrices et/ou aux tables de nombres au hasard, est plus "économique", mais elle a l'inconvénient de présenter l'effet "boîte noire", c'est-à-dire que l'élève utilisateur — contrairement à son professeur — ne dispose d'aucun moyen de contrôle sur la pertinence de la simulation : il est donc contraint à la confiance.

Quelle que soit la méthode utilisée, la question qui se pose, à un moment donné, est celle de la modélisation du phénomène statistique étudié. C'est de cette étape de l'apprentissage que je voudrais traiter ici, en considérant plus précisément le cas des épreuves répétées. Je propose dans ce qui suit un outil qui me semble bien adapté à ce genre de situations : je veux parler de l'"arbre probabilisé". J'ai déjà eu l'occasion d'aborder ce point de vue (Parzysz 1990), mais je voudrais, dans cet article, reprendre la question à la source, c'est-à-dire en fait valider l'arbre en tant qu'outil de résolution de problèmes, en expliciter les règles d'utilisation, et en indiquer la portée et les limites.

Qu'on ne croie cependant pas que je veuille faire de l'arbre probabilisé la panacée de l'enseignement des Probabilités au lycée. Bien au contraire, la réification de ce type de représentation (comme de tout autre, d'ailleurs) me semble un danger que l'on doit toujours avoir présent à l'esprit : les moins jeunes de nos collègues se souviennent sans doute des excès auxquels a conduit naguère une utilisation mal comprise des diagrammes de Venn et autres "papygrammes".

Qu'on ne se méprenne pas non plus sur le contenu de ce qui suit : il ne s'agit pas d'exposer le contenu de séquences d'enseignement, mais plus modestement de proposer une démarche (un "scénario") permettant un jeu de cadres, qu'il conviendrait, dans le but d'une utilisation en classe, de "réécrire" et de "mettre en scène".

Pour situer l'intérêt de cette démarche, j'esquisserai un parallèle entre arbre probabilisé et "figure" (c'est-à-dire, en fait, "dessin") de géométrie dans l'espace. D'une façon générale, les représentations graphiques peuvent être utilisées à plusieurs niveaux :

— soit simplement comme *illustration* de la situation étudiée (exemple : le dessin d'une boîte transparente contenant des boules de différentes couleurs pour illustrer un schéma d'urne) ;

— soit comme *support de la réflexion* (exemple : la représentation des diverses éventualités d'une épreuve aléatoire) ;

— soit comme *schéma explicatif* (exemple : le schéma ensembliste associé à la démonstration de la formule :

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) ;$$

— soit enfin comme *instrument technique de résolution* (ce qui peut être, on le verra, le cas de l'arbre).

Dans le cas de la géométrie dans l'espace, le dessin acquiert un aspect bien plus opératoire s'il est une véritable projection (au sens géométrique) de la figure spatiale qu'il représente (Parzysz 1991) ; on peut alors opérer sur lui des actions (constructions) qui permettront un meilleur accès aux conjectures (possibilité éventuelle de mesures, propriétés transférées) et constitueront une aide à la démonstration. Encore faut-il que l'utilisateur connaisse les propriétés de l'outil dont il se sert, afin d'éviter d'en faire un usage mal approprié. Et pour cela, il est nécessaire que les règles d'utilisation soient explicites.

Dans le cas des Probabilités, la construction d'un arbre selon des règles précises peut également faciliter la formulation de conjectures (formules), ainsi que l'approche de concepts (indépendance, probabilité conditionnelle...), comme j'espère le montrer ci-après.

L'utilisation des arbres en Probabilités n'est certes pas une nouveauté, loin s'en faut (et ceci témoigne de la pertinence du modèle), mais elle se cantonne le plus souvent au niveau de l'illustration ; et, lorsqu'il arrive qu'un arbre soit *employé* en tant qu'outil, les règles de fonctionnement en sont alors implicites, comme si elles allaient de soi : voir par exemple Engel 1990, Couty et *al.* 1990, Porté et *al.* 1991, Bontemps et *al.* 1991, etc. Ce que je propose ici, c'est simplement d'en tirer parti plus systématiquement qu'on ne le fait habituellement, en lui conférant un *véritable* statut d'outil, et ce pour un "coût" minimum : à savoir l'explicitation d'un très petit nombre de règles de codage et d'utilisation. En outre, cette algorithmisation n'étant pas déconnectée de la situation étudiée, le sens probabiliste se trouve préservé.

La première partie de ce texte concerne la classe de Première ; elle est relative à la mise en place de l'outil "arbre probabilisé". La seconde partie, elle, en propose une utilisation possible en classe de Terminale (et éventuellement en DEUG), pour l'étude des C_n^k et de la loi binomiale, ainsi que des probabilités conditionnelles.

Mais venons-en maintenant à un exemple de scénario possible.

I — De l'arbre des possibles à l'arbre probabilisé

L'idée de départ est le recours aux ramifications d'un graphe arborescent (arbre des possibles), avec pour premier but de visualiser l'évolution "buissonnante" des possibilités, lors de lancers successifs d'une pièce de monnaie (c'est le niveau "illustration" mentionné ci-dessus).

Premier cas : la pièce est "parfaite" (ou "non truquée").

Ce fait se traduit intuitivement par "on a une chance sur deux d'obtenir "pile" (resp. "face"). Codant "pile" par P et "face" par F, on obtient :

– au premier lancer : deux possibilités "de même chance", P et F, que l'on représente par deux branches ayant même racine ;

– au deuxième lancer, le même schéma se reproduit, à partir de chacune des deux situations issues du premier lancer (fig. 1) :

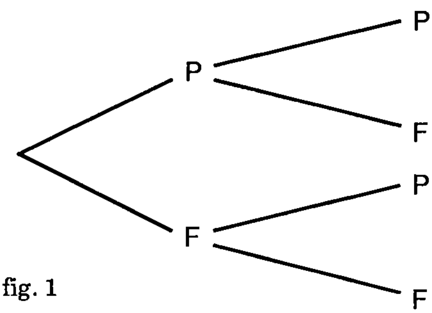


fig. 1

L'arbre se construit selon les règles suivantes :

– la construction se fait de gauche à droite (le graphe est orienté)

– un nœud représente à la fois le résultat d'une épreuve et le départ de l'épreuve suivante (sauf les nœuds terminaux).

Quant aux règles d'utilisation, on peut les formuler ainsi :

(R1) le cheminement sur l'arbre se fait uniquement de gauche à droite.

(R2) les branches issues d'un même nœud ont toutes la même probabilité.

On en déduit l'équiprobabilité des quatre résultats à l'issue de ceux deux épreuves, ce qui nous met en mesure de répondre aux questions : quelle est la probabilité d'obtenir deux "piles" ? deux "faces" ? une fois "pile" et une fois "face" ? La décomposition des événements en événements élémentaires constituants, ici visualisés, permet de comprendre simplement que, contrairement à ce que pensent *a priori* une majorité d'élèves de Première (cf Henry 1992 p. 39), ces trois éventualités n'ont pas la même probabilité.

Remarquons que la pertinence de ce modèle graphique est liée :

— d'une part, à l'équiprobabilité (au départ de chaque nœud, chaque branche a même probabilité)

— d'autre part, au caractère multiplicatif des épreuves répétées (qui correspond ici, puisqu'il y a équiprobabilité, à la multiplication des "possibles").

En outre, les règles d'utilisation — liées à l'algorithmisation de la situation — ne sont pas seulement des règles formelles, mais sont, de par la construction même de l'arbre, porteuses de sens probabiliste.

Deuxième cas : une étude statistique a montré que l'on avait deux fois plus de chances d'obtenir "pile" que "face".

N.B.- la situation de lancer d'une pièce truquée utilisée ici peut, bien entendu, être remplacée par une situation "isomorphe", par exemple le lancer d'une punaise, la rotation d'une roulette à deux secteurs d'angles 120° et 240°, ou un schéma d'urne non exhaustif avec deux boules d'une couleur et une boule d'une autre couleur.

L'arbre précédent ne convient plus, mais on peut sans grande difficulté l'adapter : il suffit de dédoubler les branches allant vers P, et donc de remplacer la dichotomie par une trichotomie, les règles (R1) et (R2) restant valables. Notons que, du point de vue du sens, le schéma d'urne est sans doute ici la situation la mieux adaptée, car d'une part la situation d'équiprobabilité est conservée "physiquement", et d'autre part chacune des trois branches issues d'un même nœud correspond à l'une des trois boules de l'urne (mais cela nécessite de "personnaliser" les deux boules de même couleur, par exemple à l'aide d'un indice). Ce faisant, on retrouve la genèse historique de la notion de probabilité : "La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements d'un même genre à un certain nombre de cas également possibles" (Laplace 1814, éd. 1986 p. 35). On obtient alors, dans le cas de la pièce truquée, l'arbre de la fig. 2 :

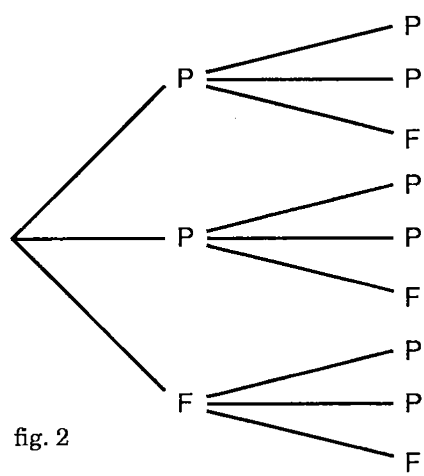


fig. 2

On trouve ainsi :

— 4 chances sur 9 d'obtenir deux "piles",

— 4 chances sur 9 d'obtenir une fois "pile" et une fois "face",

— 1 chance sur 9 d'obtenir deux "faces".

On voit que le problème se pose maintenant en termes de probabilités, ce que nous allons préciser dans la suite.

Troisième cas : Cette fois, l'étude statistique conduit à attribuer 53 chances sur 100 à l'obtention de "pile".
(N.B. : les versions "punaise", "roulette" et "schéma d'urne" sont, ici aussi, envisageables (l'urne comportant 100 boules).)

L'adaptation précédente tombe ici en défaut, et ce d'un point de vue purement pratique : il faudrait subdiviser en 100 à chaque fois (on notera au passage le rôle de la variable didactique "valeur numérique de la probabilité d'obtenir "pile""). Cependant on peut, cette fois encore, procéder à un aménagement du schéma initial, en affectant à chaque nouvelle branche sa probabilité (règle (R'2), qui se substitue à (R2) :

(R'2) Chaque branche reliant deux nœuds successifs est affectée de la probabilité de passer du premier au second.

D'où le nouveau schéma (cf. fig. 3). Remarquons que (R'2) entraîne comme conséquence immédiate le fait que :

(C) La somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même nœud est égale à 1.

La conséquence (C) peut permettre, soit de contrôler un résultat, soit de compléter l'arbre (cest-à-dire de déterminer des probabilités inconnues).

(N.B. : dans ce qui suit, j'appellerai "séquence" tout chemin allant de la racine de l'arbre à un nœud, et "séquence maximale" toute séquence aboutissant à une extrémité de l'arbre ; de plus, j'omettrai le qualificatif "maximale" lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté).

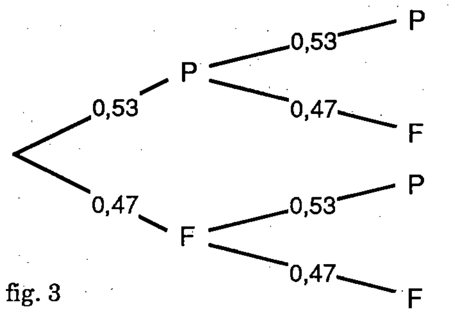


fig. 3

Le problème est maintenant qu'à chaque extrémité (et donc à chaque séquence associée) ne correspond plus la même probabilité. D'où : Quelle probabilité affecter à chacune des quatre séquences ? Un retour sur le cas précédent permet de surmonter cette difficulté (fig. 4) :

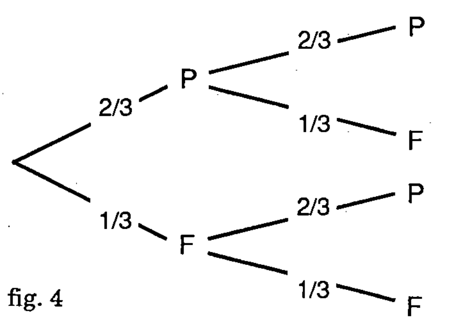


fig. 4

La "condensation" de deux branches de l'arbre de la fig. 2 en une seule, et la comparaison des fig. 2 et 4 permettent de définir une nouvelle règle d'utilisation, que l'on peut appliquer illico à la situation de la fig. 3 :

(R3) la probabilité affectée à chaque séquence est le produit des probabilités affectées à chacune des branches qui la composent.

(On notera qu'ici encore, la règle de multiplication prend du sens grâce à l'algorithme de construction de l'arbre.)

Nous pouvons également convenir d'indiquer entre parenthèses — si besoin est — sous chaque nœud de l'arbre la probabilité de la séquence associée.

Nous obtenons finalement le schéma général de la fig. 5, dans laquelle p est la probabilité d'obtenir "pile" et q (= 1 − p) la probabilité d'obtenir "face" (entre parenthèses, les probabilités de chacune des quatre séquences possibles).

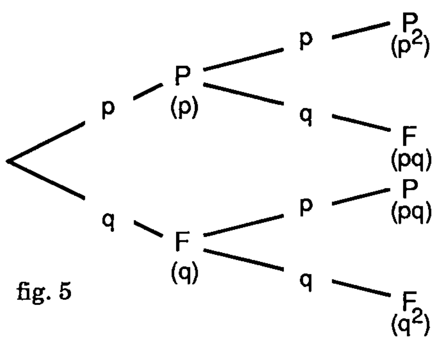


fig. 5

Ce schéma se généralise sans difficulté au cas de n lancers successifs (on obtient alors l'arbre "au rang n").

D'autre part, un problème tel que celui de la détermination de la probabilité d'obtenir une fois "pile" et une fois "face" en deux lancers (problème déjà abordé lors du deuxième cas) conduit à une autre règle d'utilisation de l'arbre :

(R4) La probabilité d'un événement correspondant à plusieurs séquences de l'arbre est la somme des probabilités correspondant à chacune de ces séquences.

On peut alors espérer que cette approche, dans laquelle les règles (R3) et (R4), associées à la construction et à l'utilisation de l'arbre, donnent du sens à des propriétés importantes des probabilités, aura des chances de réduire la confusion — souvent observée chez les élèves — entre produit et somme de probabilités.

II — Vers la loi binomiale

On a reconnu dans le graphe ci-dessus celui qui est associé à la loi binomiale, lorsqu'on s'intéresse à la variable aléatoire "nombre de "piles" obtenu au bout de n lancers successifs de la pièce".

(N.B. : Bien entendu, ce n'est pas la seule variable aléatoire que l'on peut associer à cet arbre. Par exemple, si l'on considère le rang du premier lancer fournissant "pile", on obtient la loi géométrique.)

En Terminale, on peut utiliser ce même schéma d'arbre pour :

– définir et étudier les propriétés des C_n^k,

– définir la loi binomiale

– calculer son espérance mathématique et sa variance.

Ce qui suit indique une façon possible de le faire. (Certes, la loi binomiale ne figure pas au programme de la classe de Terminale, mais elle peut être abordée en travaux pratiques, à propos du schéma de Bernoulli. De même, le raisonnement par récurrence demandera des précautions d'emploi).

1) C_n^k *et loi binomiale :*

a) Considérons l'arbre au rang n (c'est-à-dire après n lancers de la pièce). L'arbre compte alors 2^n extrémités, et par conséquent 2^n séquences maximales. Chacune de ces séquences a une probabilité de la forme $p^k q^{n-k}$, où k est le nombre de "piles" obtenus au cours de n lancers.

Fixons k ($k \in [[0 ; n]]$). Combien y a-t-il de séquences ayant pour probabilité $p^k q^{n-k}$?

Appelons C_n^k ce nombre.

Remarquons tout d'abord que, puisque le nombre total de séquences est égal à 2^n, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n .$$

D'autre part, les extrémités correspondant aux séquences fournissant k "piles" s'obtiennent à partir de deux types de séquences de rang (n – 1) :

— celles qui ont pour probabilité $p^k q^{n-k}$, et qui sont complétées par "P" : il y en a donc C_{n-1}^{k-1} ;

— celles qui ont pour probabilité $p^k q^{n-1-k}$, et qui sont complétées par "F" : il y en a donc C_{n-1}^k.

D'où la formule de récurrence :

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k .$$

Cette formule conduit au triangle de Pascal puis, par récurrence, à l'expression classique de C_n^k . Si l'on s'intéresse à la variable aléatoire "nombre de "piles" obtenu", on a donc maintenant :

$$P(X = k) = C_n^k \, p^k q^{n-k} .$$

b) Si maintenant, dans l'arbre au rang n, on permute :

— les lettres P et F d'une part,
— les lettres p et q d'autre part,

on obtient un autre arbre, *correspondant à la même situation*, mais dans lequel les séquences sont disposées de façon différente. Considérons plus précisément les séquences précédemment affectées de la probabilité $p^k q^{n-k}$ (il y en a, rappelons-le, C_n^k). Les séquences qui occupent maintenant la même place dans l'arbre sont affectées de la probabilité $q^k p^{n-k}$ (= $p^{n-k} q^k$). Or, par définition, ces séquences sont au nombre de C_n^{n-k} ; on en déduit l'égalité :

$$C_n^k = C_n^{n-k} .$$

N.B. : C_n^k est habituellement défini comme étant "le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments", ce qui permet une justification visuelle élégante de la formule $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ (à l'aide d'un schéma ensembliste).

On peut ici aisément faire le lien entre les deux définitions de C_n^k, grâce à un arbre des possibles (non probabilisé) au rang n, auquel on donne l'interprétation suivante :

Considérons un ensemble E de cardinal n. Pour constituer une partie de E à k éléments, nous pouvons considérer successivement chacun des n éléments de E, et :

— soit le conserver (P) ,

— soit l'éliminer (F) .

Chacune des 2^n séquences maximales de l'arbre ainsi construit correspond à une partie A et E, et le cardinal de A est égal au nombre de "P" figurant dans la séquence considérée. On retrouve ainsi (en leur donnant un autre sens) les formules précédentes, ainsi que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \quad (\text{Card } \mathcal{P}(E))}$$

2) *Espérance mathématique et variance*

Revenons maintenant à la loi binomiale. Les deux méthodes les plus couramment utilisées pour le calcul de E(X) et V(X) sont fondées :

– soit sur l'utilisation des propriétés de l'espérance et de la variance de la somme de n variables aléatoires indépendantes (mais ceci est hors programme de Terminale) ;

– soit sur le calcul de Σ k.P(X=k) et de Σ k.(k-1).P(X=k) , (mais les calculs font appel à quelques "jongleries" sur les indices).

Je propose ci-après une alternative à cette dernière méthode :

a) calcul de E(X) :

Appelons X_n la variable aléatoire "nombre de "piles" obtenu au bout de n lancers", et cherchons une relation de récurrence entre $E(X_n)$ et $E(X_{n+1})$.

Pour faciliter l'explication, supposons que l'on a numéroté (de façon quelconque) les 2^n extrémités de l'arbre au rang n. Considérons une extrémité quelconque A_i , de cet arbre (A_i est donc égal, soit à "P", soit à "F") et appelons k_i la valeur de X_n correspondant à la séquence d'extrémité A_i ; soit a_i la probabilité de cette séquence (a_i est en fait égal à $p^{k_i}q^{n-k_i}$, mais cela n'a aucune importance ici).

On a, bien entendu :

$$\sum_i a_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_i k_i.a_i = E(X_n) .$$

(N.B. : Ici et dans ce qui suit, toutes les sommations se font sur l'ensemble des séquences de l'arbre au rang n, c'est-à-dire sur i , qui décrit ainsi $[[1 ; 2^n]]$.

L'extrémité A_i conduit à deux extrémités de l'arbre au rang (n + 1) (fig. 6) :

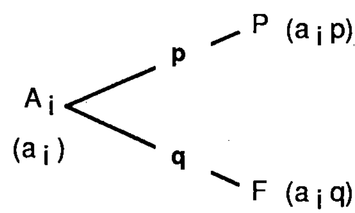


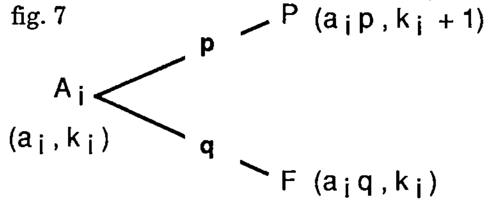
fig. 6

– la branche d'extrémité P correspond à la valeur K_i + 1 de X_{n+1} (puisqu'il y a une "pile" de plus), et la séquence correspondante a pour probabilité $a_i.p$;

– la branche d'extrémité F correspond à la valeur K_i de X_{n+1} (puisque le nombre de "piles" est inchangé), et la séquence correspondante a pour probabilité $a_i .q$.

Dans le passage de X_n à X_{n+1} l'augmentation de l'espérance due à A_i provient uniquement de la branche d'extrémité "P", et elle est égale à $a_i.p$. Cette explication risque cependant de n'être pas suffisamment convaincante pour certains élèves.

fig. 7



On peut alors s'aider davantage du graphique en complétant la figure 6 par l'indication, sous chacun des trois sommets, de la valeur correspondante de la variable aléatoire, en plus de la probabilité (par exemple sous forme de couple, fig. 7).

Les contributions respectives des deux séquences (d'extrémités "P" et "F") de la figure 7 à $E(X_{n+1})$ apparaissent ainsi plus nettement : lorsqu'on passe de $E(X_n)$ à $E(X_{n+1})$, chaque terme de $E(X_n)$ est remplacé par deux autres ; plus précisément, le terme $a_i K_i$ devient $(k_i+1)\, a_i.p + k_i a_i.q$. La variation de l'espérance dans le passage de X_n à X_{n+1} est donc, pour les deux séquences concernées :

$$(a_i\, p\, (k_i+1) + a_i\, q.k_i) - a_i\, k_i ,$$

soit $a_i\, p$.

La variation totale de l'espérance est donc alors égale à $\Sigma\, a_i.p$, soit p (puisque $\Sigma\, a_i = 1$). D'où $E(X_{n+1}) = E(X_n) + p$.

Comme $E(X_1) = p$ (calcul direct), on en déduit $E(X_n) = np$.

(N.B. : le raisonnement précédent ne présente aucun intérêt si l'on connaît la linéarité de l'espérance, mais les outils mis en place se révèlent utiles pour l'application à la variance, que nous allons voir maintenant).

b) Calcul de V(X) :

Nous utiliserons la formule de Kœnig :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 .$$

Cherchons tout d'abord une relation de récurrence entre $E(X_n)$ et $E(X_{n+1})$.

Avec les notations précédentes et le recours au graphique (fig. 8), on voit que la variation de l'espérance du carré de la variable qui correspond au terme associé à la séquence d'extrémité A_i est égale à :

$$(a_i\, p\, (k_i+1)^2 + a_i\, q.k_i) - a_i\, k_i ,$$

c'est-à-dire à $2a_i\, p.k_i + a_i\, p$.

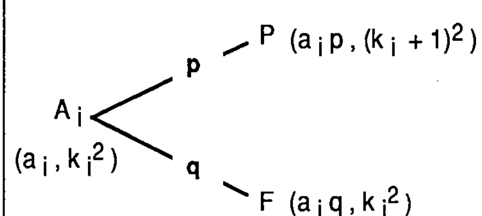


fig. 8

D'où, pour l'ensemble, une augmentation de :

$$2\, \Sigma\, k_i\, a_i\, .p + \Sigma\, a_i\, .p =$$

$$2\, p.E(X_n) + p =$$

$$2\, np^2 + p .$$

On en déduit alors, par un petit calcul, une relation de récurrence sur $V(X_n)$:

$$V(X_{n+1}) = V(X_n) + p\, q .$$

Enfin, puisque $V(X_1) = p\, q$ (calcul direct), on obtient $V(X_n) = npq$.

N.B. : Cette approche, on le voit, demande nettement moins de "virtuosité" dans le maniement du signe Σ : on n'a, en effet, à effectuer que des développements, des regroupements ou des mises en facteur d'une constante, à l'exclusion de tout travail sur l'indice de sommation. L'arbre ne sert ici qu'à fixer sur un schéma la variation de chacun des termes de la sommation ; on pourrait obtenir le même résultat avec des écritures formelles, mais le schéma a un rôle simplificateur.

III — Probabilités conditionnelles

L'arbre probabilisé permet également d'aborder — et de traiter — la notion de probabilité conditionnelle. Le modèle graphique précédent peut en effet s'adapter sans problème à d'autres cas d'épreuves répétées, que les conditions soient ou non identiques à chaque fois, et qu'il y ait deux éventualités à chaque étape ou plus.

Prenons par exemple le cas de tirages successifs (sans remise) d'une boule, dans une urne contenant au départ 4 boules rouges, 3 boules blanches et 2 boules noires. La construction de l'arbre n'offre pas de difficulté (fig. 9, où l'arbre au rang 3 n'est que partiellement représenté, faute de place).

Ainsi, la probabilité d'obtenir une boule rouge au deuxième tirage est égale à :

$$(1/6) + (1/6) + (1/9),$$

soit 4/9 .

On a donc la même probabilité de tirer une boule rouge au premier et au deuxième tirage (et aussi, d'ailleurs, au troisième, au quatrième..., au neuvième), et ceci en dépit de la composition variable de l'urne. Résultat qui ne laisse pas de troubler les élèves, persuadés que cette probabilité varie en fonction des tirages. (Ce "paradoxe de la roulette russe" trouve sans doute son origine dans le fait que la variation des conditions incite à induire une variation concomitante de toute "quantité" liée à cette situation fluctuante.)

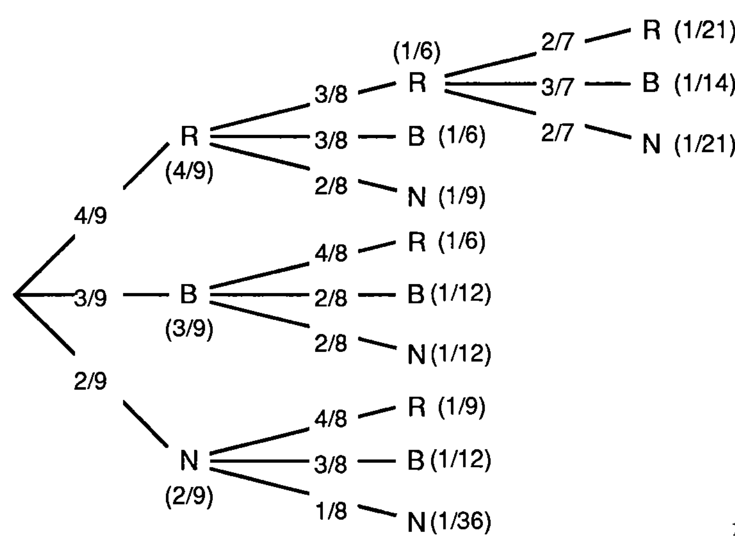


fig. 9

L'arbre probabilisé se généralise encore, on peut en fait l'utiliser chaque fois que l'on se trouve en présence de plusieurs systèmes complets d'événements. Elle conduit alors à la notion de probabilité conditionnelle, comprise comme probabilité *relative* d'atteindre un nœud donné à partir du nœud précédent. Ce qui revient (voir l'exemple ci-dessus) à considérer ce dernier comme racine d'un sous-arbre. La construction même de l'arbre probabilisé (fig. 10) conduit ainsi, par la règle (R3), à la formule

$$P(A \cap B) = P_A(B).P(A),$$

d'où : $P_A(B) = P(A \cap B) / P(A)$.

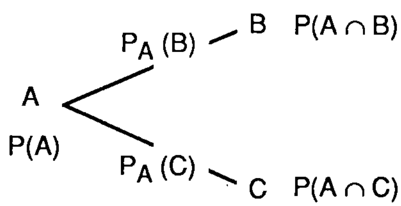


fig. 10

C'est ici que se voit le mieux, me semble-t-il, le fonctionnement de l'arbre, car son opérationnalité se justifie en même temps que la formule définissant la probabilité conditionnelle. L'accès à la notion de probabilité conditionnelle est certes difficile, mais l'arbre en facilite la mise en œuvre au départ. Ce qui n'empêche pas, ensuite, de la définir dans sa généralité, c'est-à-dire de la faire passer du statut d'outil à celui d'objet. Enfin, l'arbre permet de distinguer, de par leurs positions différentes, $P_A(B)$ de $P(A \cap B)$, qui sont souvent confondues par les élèves : la première est en effet affectée à une branche, et la seconde à un nœud.

Je me contenterai d'illustrer l'intérêt de son utilisation dans ce cas en résolvant l'exercice classique suivant :

> "Dans une population donnée, la fréquence d'une certaine maladie est de 0,6 %. Un test relatif à cette maladie réalise les "performances" suivantes :
>
> – la probabilité, pour un individu atteint de la maladie, d'avoir un test positif, est de 0,998 ;
>
> – la probabilité, pour un individu non atteint, d'avoir un test négatif, est de 0,996.
>
> On soumet au test un individu pris au hasard dans cette population. Ce test est positif. Quelle est la probabilité que l'individu ne soit pas atteint par la maladie ?"

1) Construisons tout d'abord, en utilisant les données, l'arbre probabilisé des possibles, en considérant d'abord la situation de l'individu relativement à la maladie (fig. 11), et en utilisant les notations suivantes :

M (resp. $\overline{M}$) : l'individu est (resp. n'est pas) atteint par la maladie

T (resp. $\overline{T}$) : le test de l'individu est positif (resp. négatif).

Il nous manque deux probabilités, que nous obtenons aisément en utilisant la conséquence (C) indiquée plus haut, et qui nous permettent de compléter l'arbre (cf. la fig. 12 page suivante).

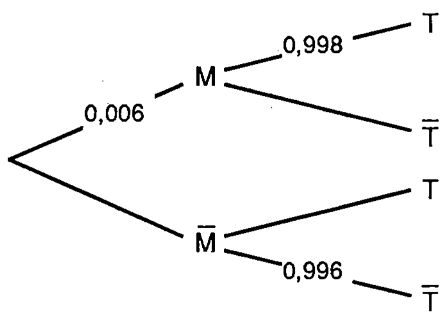


fig. 11

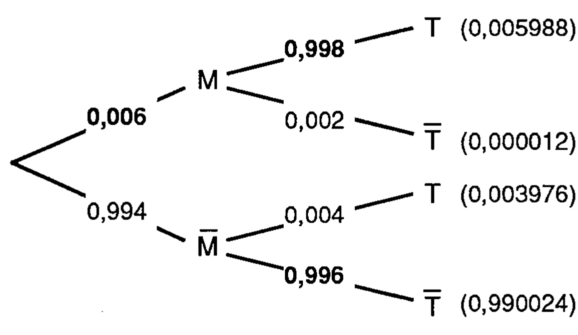


fig. 12

2) Construisons maintenant un nouvel arbre, en partant cette fois de la situation de l'individu relativement au test. Nous avons pour cela besoin de connaître P(T) et P($\overline{\text{T}}$), que nous obtenons à partir de la figure 12 (règle R4) :

$$P(T) = 0{,}005988 + 0{,}003976 = 0{,}009964 \text{ ,}$$

et de même $P(\overline{T}) = 0{,}990036$,

(on contrôle que la somme est bien égale à 1). C'est-à-dire que nous avons utilisé implicitement la formule :

$$P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M}).$$

D'où la fig. 13 (page de droite), où ne figure que la partie "utile" de l'arbre ...

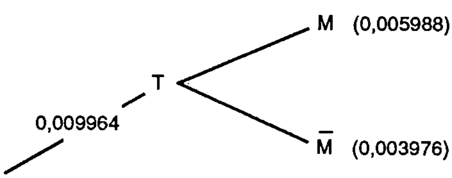
Ce qui est demandé, c'est la probabilité associée à la branche reliant T à $\overline{\text{M}}$ soit :

$$P_T(\overline{M})\,.$$

la règle R3 nous fournit la réponse :

0,003976 / 0,009964 , soit environ 0,401 (ou 2 chances sur 5). *Conclusions* :

fig. 13



a) il ne faut pas tout de suite s'affoler en cas de test positif,

b) nous avons utilisé, sans le dire, la formule de Bayes qui n'est pas au programme de Terminale.

Je terminerai en disant que, si l'explicitation des formules utilisées est bien sûr nécessaire dans une démonstration, le retour au graphique aide, non seulement à les retrouver sans peine, mais aussi à leur donner du sens, c'est-à-dire que l'association des deux permet à la fois de convaincre et d'éclairer.

IV — Conclusion

Dans le cas que nous venons de voir, c'est-à-dire lorsque l'on a affaire à des épreuves répétées, l'arbre probabilisé présente donc un intérêt bien plus grand que celui de simple illustration de la situation, tant en ce qui concerne l'accès aux notions, auxquelles il contribue à donner du sens, que pour la résolution des problèmes, où il se révèle un outil performant. Il faut pourtant prendre garde à ce qu'il n'en vienne pas à se substituer aux notions elles-mêmes. Le danger d'un glissement métacognitif, quoique réel, est cependant moindre ici que — pour prendre un exemple actuel — dans le cas des tableaux de proportionnalité, où la mise en œuvre de la notion cède parfois la place à des savoir-faire relatifs à l'outil graphique. En effet, toutes les situations probabilistes, tant s'en faut, ne se prêtent pas, soit à l'utilisation d'un tel graphe, soit même à sa réalisation effective : même en restant dans le cadre de l'enseignement secondaire et en s'en tenant au cas des ensembles finis, on imagine par exemple le travail que demanderait la construction d'un arbre représentant les séquences du jeu de 421 (216 extrémités !). Il n'en reste pas moins qu'il convient d'être vigilant et de travailler particulièrement avec les élèves — et dans les deux sens — l'articulation entre la situation probabiliste et le modèle graphique.

En fin de compte, ces limites "physiques" me semblent au contraire un atout plutôt qu'une gêne, si l'on se place du point de vue didactique. Car ce qui importe surtout, c'est que l'élève reconnaisse le cas échéant qu'il s'agit du même type de situation, et qu'un arbre *pourrait* en rendre compte : c'est bien en effet l'acquisition de l'outil *conceptuel* qui est en jeu, et non celle de l'outil *graphique*. Il est certainement indispensable que les élèves passent par le stade "matériel" de la construction de tels arbres. Mais il est tout aussi indispensable qu'ils apprennent à s'en passer, comme il importe également qu'ils reconnaissent la portée *et les limites* de cet outil, en étant à même de le mettre en concurrence avec d'autres, mieux adaptés à certaines situations (diagrammes ensemblistes, tableaux à double entrée, etc.) : en résumé, il convient de lui donner sa place et de l'utiliser de façon aussi efficace que possible, mais non d'en devenir dépendant.

BIBLIOGRAPHIE

BONTEMPS Guy, et al. (1991) : *Mathématiques, classes de Première S et E* (coll. Fractale). Ed. Bordas, Paris.

COUTY Françoise, DEBORD Jean et FREDON Daniel (1990) : *Probabilités et statistiques pour biologistes* (coll. Flash U). Ed. Armand Colin, Paris.

ENGEL Arthur (1990) : *Les certitudes du hasard.* Adapté de l'allemand par Daniel Reisz. Ed. Aléas, Lyon.

HENRY Annie et Michel (1992) : *L'enseignement des Probabilités dans le programme de Première,* in Repères n° 6, pp. 27-52.

LAPLACE Pierre-Simon (1814) : *Essai philosophique sur les Probabilités.* Rééd. 1986 Ed. Christian Bourgois, Paris.

PARZYSZ Bernard (1990) : *Un outil sous-estimé : l'arbre probabiliste,* in Bulletin de l'APMEP n° 372, pp. 47-52.

PARZYSZ Bernard (1991) : *Representation of space and students' conceptions at high school level,* in Educational Studies in Mathematics n° 22, pp. 575-593.

PORTE Daniel, et al. (1991) : *Mathématiques, classes de Première S et E* (coll. Dimathème). Ed. Didier, Paris.