INTRODUCTION A LA NOTION DE FONCTION EN SECONDE DE LYCEE

Groupe "Lycée"
Irem de Clermond-Fd

Il s'agit dans ce texte de présenter une activité servant d'introduction à la notion de fonction en classe de seconde et de dégager des éléments de réflexion, des points de repères pour la construction d'activités introductrices à une notion. Malgré le caractère "affirmatif" de certaines énonciations, ce texte est à prendre comme une contribution au débat actuel sur l'opportunité de telles activités et sur la question centrale, selon nous, du sens que les élèves peuvent donner aux objets mathématiques enseignés.

I — Introduction

Il est de bon ton aujourd'hui, de débuter un chapitre, une leçon nouvelle par une ou des activités pour motiver l'introduction des objets mathématiques qui vont apparaître dans cette leçon ; on a souvent l'impression, par exemple en parcourant les manuels, que les auteurs cèdent plus parfois à une mode, à un rite permettant d'afficher leur modernité, qu'à une réelle exigence didactique. En d'autres termes, n'importe quelle activité présentant une parenté plus ou moins proche avec les contenus à enseigner ne convient pas nécessairement. Or, il a paru important au groupe[1] que nous formions, de travailler ces activités introductrices, d'apprendre à les construire, car plus ou moins clairement, nous sentions bien que se jouait là une partie (mais une partie seulement) de la construction du sens que les élèves accorderaient aux objets mathématiques de la leçon.

Nous avons choisi de travailler à propos de la notion de fonction en classe de seconde ; il s'agit là d'une notion importante dans le second cycle, qui trouve véritablement son statut officiel d'objet mathématique dans cette classe, même si elle a déjà été utilisée comme outil ou de façon particulière dans les classes de premier cycle (cf., par exemple, les fonctions affines en classe de troisième).

Nous nous sommes inspirés, méthodologiquement, du modèle "dialectique outil/objet et jeux de cadres" de R. Douady (cf. bibliographie) : ce modèle nous a été

(1) Groupe composé pour le travail relaté dans ce texte de : Chazal J., Gourgaud H., Lacour M., Lopitaux M., Noirfalise R., Pinol C., Pinoy J., Roddier J.A, Thiriet D.

utile car il nous a fourni des points de repères. En faisant des analyses *a priori*, sur diverses situations que les différents membres du groupe pouvaient apporter, nous avons en fait passé beaucoup de temps à éliminer nombre de situations nous paraissant insatisfaisantes ; nous n'arrivions pas à les programmer de manière à ce qu'elles puissent faire émerger, de façon dynamique dans la classe, la notion de fonction. Nous avons enfin retenu une situation qui nous semblait convenir ; nous l'avons essayée en classe, une première fois ; les résultats n'ont pas été ce que nous escomptions, ce qui nous a obligés à retravailler notre copie. En jouant sur les façons de présenter le problème, nous sommes arrivés à un résultat effectif avec des élèves, plus satisfaisant.

Le résultat obtenu est certes modeste ; il nous rend indulgent à l'égard des auteurs de manuels car leur tâche, réalisée souvent dans la précipitation engendrée par les conditions de changements de programmes, nous apparaît difficile. Cependant, construire une activité introductrice à une notion peut ne pas relever de la seule intuition ou du bon sens, c'est quelque chose qui peut s'apprendre et faire partie des "compétences spécifiques" d'un enseignant. Ce texte est le témoignage d'un tel apprentissage ; nous débuterons en donnant quelques points de repères méthodologiques empruntés essentiellement à R. Douady : l'intérêt de ces repères a émergé progressivement pour nous au cours de notre travail. Nous poursuivrons en présentant et en commentant l'activité retenue pour introduire la notion de fonction. En annexe, on trouvera, en guise de contre-exemple, la description brève d'une activité qui ne convient pas. Pour illustrer notre propos sur les jeux de cadres nous présentons aussi un extrait d'un vieux recueil d'exercices de géométrie avec l'exemple d'une étude de fonction traitée uniquement de façon géométrique.

II — Points de repères méthodologiques

II.1. *Construction du sens et re-contextualisation*

La notion moderne de fonction, caractérisée par la définition en usage aujourd'hui (une fonction est une relation), a mis longtemps à émerger et des auteurs comme Descartes, Leibniz, Euler, d'Alembert et bien d'autres ont développé des conceptions marquées par leurs contextes d'usages. La lecture de textes historiques (cf. bibliographie) fait apparaître que la notion de fonction est apparue, tout d'abord comme outil en usage dans des contextes spécifiques, avant que d'émerger de ses utilisations, pour en être séparée dans un processus "d'objectivation" : c'est le passage du statut d'outil à celui d'objet qui se marque en particulier par diverses tentatives de définition. L'objet s'autonomise alors des domaines qui lui ont donné naissance (dans un mouvement que R. Douady nomme décontextualisation).

Cependant, pour les créateurs ou plus prosaïquement pour les utilisateurs, ce qui fait qu'un objet a du sens, ce sont les utilisations effectives, explicites ou souvent implicites, qu'ils ont pu en faire. Le sens s'enracinerait donc dans une histoire de la relation sujet-objet, temporelle et se vivant dans des "sites" représentés par des situations-problèmes. Mais l'histoire de la relation sujet-objet, dans un site finalisé comme l'est un problème, ne saurait être anodine : il convient que l'objet O présente un intérêt pour faire progresser le problème posé vers une solution. Il y aurait donc, s'instaurant dans l'histoire de O et S la situation-problème, une relation du type "O a de l'intérêt pour S" ; cet intérêt peut être de l'ordre de l'utilité ou mieux encore de l'ordre de la nécessité (un objet peut être en concurrence avec d'autres qui peuvent empêcher son émergence : en revanche si O est nécessaire cela signifie qu'il va l'emporter sur les autres objets candidats à la progression de la solution). C'est cet intérêt et sa nature qui nous semblent donc fonder le sens qu'un sujet va accorder à un objet.

Cette manière de penser nous conduit à faire une remarque sur le scénario classique "exposé des définitions et propriétés suivi d'exercices". L'élève peut fort bien dans le jeu des exercices proposés, trouver que l'objet O présenté dans le cours a de l'intérêt pour telle ou telle situation : il va construire du sens mathématique car il sera dans une logique relationnelle décrite cidessus qui est bien une logique mathématique (G. Brousseau utilise le terme de situation a-didactique pour caractériser ce type de situation). Mais un risque encouru dans le scénario classique est que la relation d'intérêt entre objet et situation, qui n'est pas symétrique, s'inverse : c'est la situation qui devient intéressante pour l'objet — la situation aux yeux d'un élève est présentée pour justifier l'existence de l'objet. Les situations peuvent alors apparaître comme des "prétextes didactiques" liés au fait que l'objet est au programme et qu'il convient scolairement de le faire vivre : l'existence de O est donnée *a priori* et ne répond plus comme dans sa genèse historique à un caractère d'utilité ou de nécessité. L'élève risque alors d'être dans une relation prescrite par l'obligation scolaire et non plus dans une relation engendrée par la nécessité du fonctionnement du savoir.

Ces quelques remarques forgées dans l'action et reflets de souvenirs diffus de diverses lectures, nous conduisent à identifier un premier repère pour le choix d'une activité introductrice S_i à une notion donnée O : *il convient que O ait de l'intérêt pour S_i : de plus cet intérêt doit être tel que des propriétés de O ou une technicité liée à O apparaissent comme nécessaires pour permettre à l'élève de progresser vers une solution de S_i*. Ce critère, et en particulier l'aspect nécessaire de l'objet est loin d'être satisfait par n'importe quelle situation où l'on peut évoquer la notion de fonction :

— l'objet "fonction" peut être en concurrence avec d'autres : dès lors il se peut que les élèves fassent avancer le problème sans référer à la notion envisagée. S_i n'introduit donc pas nécessairement l'objet O.

— la situation n'est pas vraiment problématique : les élèves peuvent atteindre la solution avec des outils conceptuels qu'ils ont déja bien en main.

On le verra par la suite, ce critère ne peut se concrétiser que dans l'examen de la dynamique de la situation, c'est-à-dire dans l'étude des *trajectoires* que peuvent suivre les élèves pour évoluer vers la solution.

On pourrait penser pour trouver une situation *ad hoc* qu'il suffirait de reproduire l'histoire, mais de fait les problématiques qui ont donné naissance à des objets aujourd'hui enseignés semblent bien hors de portée ou trop étrangères aux élèves ; dès lors, il s'agit bien pour l'enseignant d'opérer, comme le dit R. Douady, une recontextualisation pour ses élèves, c'est-à-dire de trouver une ou plusieurs situations qui vont faire émerger l'objet. C'est peut-être l'un des tributs à payer à la construction du sens (mais ce n'est sûrement pas le seul).

II.2. *Les jeux de cadres*

II.2.1. *"Un cadre est constitué d'objets d'un même domaine, de relations entre ces objets"* dit R. Douady. C'est ainsi que l'on peut parler classiquement de cadres géométriques, numériques, algébriques : un cadre apparaît comme un **système de connaissances locales** (évolutives avec le temps selon le sujet considéré). Les jeux de cadres sont alors des dynamiques engendrées par des homomorphismes entre ces différents cadres. On peut reprendre un exemple donné par R. Douady, considérons le problème suivant :

"existe-t-il un carré d'aire 2 cm^2 ? "

Ce problème peut être résolu par un élève de l'école élémentaire :

"Pour un carré de côté 1 cm l'aire est 1 cm^2, pour un carré de côté 2 cm l'aire est 4 cm^2. Quand le côté passe de 1 cm à 2 cm il y a bien un moment où l'aire sera 2 cm^2."

La correspondance (jeu) entre le cadre géométrique — ici avec les objets "carré, longueur, surface" — et le cadre numérique avec la relation d'ordre sur les nombres, permet d'affirmer l'existence d'un carré d'aire 2 cm^2, et éventuellement en conséquence dans le cadre numérique, l'existence d'un nombre dont le carré est égal à 2 : c'est ici une existence géométrique qui, par homomorphisme entre cadres, implique une existence numérique.

II.2.2. Intérêt méthodologique des jeux de cadres. La notion de fonction fait jouer sur la scène officielle du savoir plusieurs cadres :

"Une fonction n'est ni un tableau de valeurs, ni une représentation graphique, ni une suite de touches de calculette, ni une formule, c'est tout cela à la fois" (texte de la Coprem : 1987). On voit apparaître dans cette formule différents cadres qui vont fonctionner avec la notion de fonction :

— le cadre des tableaux numériques avec leurs lois implicites de construction. Les élèves sont familiers avec ceux-ci : ils en ont manipulé durant leur scolarité en primaire et au collège.

— le cadre algébrique avec sa cohorte de "formules" et de règles de calcul.

— le cadre graphique avec les représentations graphiques dans des repères : les élèves ne sont pas sans avoir manipulé déjà de telles représentations.

— les calculettes, leurs modes d'utilisation et leurs possibilités de programmation.

Un autre cadre non mentionné par la Coprem, intime avec l'étude des fonctions, est celui des tableaux de variations. Enfin, ajoutons que les problèmes donnant naissance à une étude de fonction se formulent souvent dans d'autres cadres spécifiques : économique, physique, géométrique, etc.

On voit donc un premier intérêt de la notion de cadres : elle permet de repérer des *"systèmes de connaissances locales"* et un des buts de l'enseignement va être, non seulement de faire fonctionner ces différents systèmes de façon isolée, mais surtout de faire que s'établissent les correspondances adéquates.

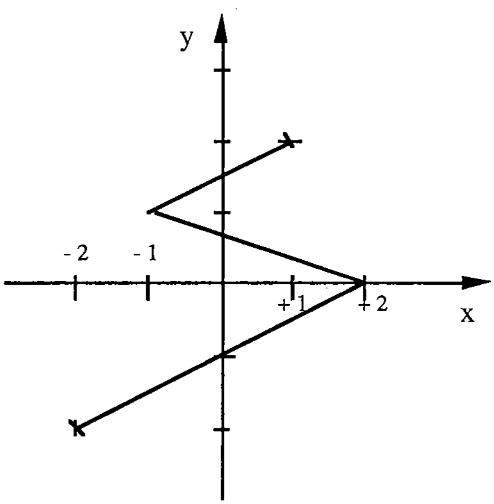
On peut illustrer, en négatif, ce dernier point par un fait didactique, anecdotique certes, mais significatif, rencontré par l'un d'entre nous dans une classe de 1ère d'adaptation.

Des élèves avaient dressé un tableau de valeurs de la manière suivante :

x	-2	+2	-1	+1
y	-2	0	1	2

et on leur demandait d'esquisser le graphe de la fonction correspondante dans un repère.

Voici ce que quelques élèves en difficulté en mathématiques ont produit :



La conduite de ces élèves peut s'expliquer par la mobilisation d'un homomorphisme inadéquat entre "tableau de valeurs" et "graphe", consistant à respecter dans le tracé du graphe, l'ordre d'écriture dans le tableau des valeurs de x et de y.

Cet exemple en négatif montre qu'un enseignement de la notion de fonction, avec ses cadres multiples doit s'accompagner d'apprentissage de jeux adéquats entre ces cadres ; ceci peut être présent tout au long de l'enseignement sur les fonctions ; examinons plus spécifiquement l'intérêt des jeux de cadres pour une activité introductive.

II.2.3. Jeux de cadres dans une activité introductive :

(C_1) *"Les élèves comprennent l'énoncé, c'est-à-dire que celui-ci leur évoque un domaine familier qu'ils savent reconnaître..."*

(C_2) *"Les élèves ne peuvent pas résoudre complétement le problème avec le familier"*

(C_3) *"Le problème peut se formuler dans deux cadres au moins"*

Ce sont là trois conditions énoncées par R. Douady (cf. 1991) devant être vérifiées par un problème de nature à créer une situation d'apprentissage.

On peut ainsi satisfaire la condition (C_1) en choisissant un problème dans un cadre familier aux élèves : c'est ce que nous avons fait en sélectionnant un problème formulé dans un cadre géométrique ne faisant intervenir que des connaissances familières aux élèves à l'entrée en seconde.

La condition (C_2) peut être satisfaite si les éléments du cadre familier ne permettent pas de résoudre le problème et si l'avancée vers la solution nécessite un changement de cadre (C_3) : on peut penser ici en particulier au passage du cadre géométrique au cadre algébrique. Le problème que nous avons posé implique une formulation algébrique qui apparaît comme une **nécessité** ! Les autres cadres, tableau de valeurs, représentations graphiques peuvent apparaître comme des cadres "**utiles**" (mais pas nécessaires) pour la progression vers la solution.

Satisfaire (C_3), par le biais de l'énoncé du problème, peut donc être une façon de satisfaire (C_2).

Remarque : ces dernières conditions ne sont pas nécessairement satisfaites par une étude de fonction formulée dans un cadre géométrique. On trouvera en annexe n° 3 un emprunt à un vieux manuel de géométrie, où un tel problème est entièrement résolu dans un cadre géométrique (sans nécessairement recourir à un cadre algébrique, ni même numérique).

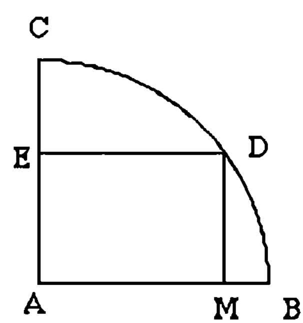
Enfin, signalons un autre intérêt des jeux de cadres ; *celui du contrôle* par l'élève de son activité : un cadre, le cadre familier par exemple, peut servir d'instance de contrôle aux calculs, ou aux diverses opérations effectuées dans un cadre symbolique : on pourrait dire qu'ainsi fonctionne *"le sens de ce que l'on fait"*. Ceci nous semble être particulièrement vérifié quand les calculs s'exécutent dans le cadre algébrique : le jeu, par le biais d'un homomorphisme "mental" avec un autre cadre, instaure un contrôle qui donne du sens aux calculs, du moins à certaines étapes de ceux-ci.

III — Une activité introductrice à la notion de fonction en classe de seconde

Rappelons-le, une bonne part de notre travail a surtout consisté à examiner diverses situations-problèmes et à les éliminer comme non satisfaisantes. Il n'est pas question, ici, de faire une chronique de ce travail fastidieux, parfois décourageant, mais simplement de présenter le fruit de notre labeur qui paraîtra bien modeste si on élimine ce que nous avons appris en le faisant.

III.1. *Le problème retenu*

Un quart de cercle de rayon 6 cm : ABC. Un point M se déplace sur AB . On construit un rectangle AMDE comme l'indique la figure et on se propose d'étudier les variations de l'aire de ce rectangle, en se demandant en particulier si cette aire a une valeur maximale pour une position de M .



Une analyse, *a priori* sommaire, nous a fait penser que ce problème pourrait être intéressant.

En conformité avec les programmes de seconde, ce problème peut permettre :

— de passer d'un cadre géométrique qui, pour l'élève, donne du sens au problème, à un cadre algébrique (formulation algébrique de l'aire en fonction de la variable AM = x) : il convient que les élèves connaissent l'aire d'un rectangle et surtout, ici, qu'ils pensent à Pythagore.

— l'usage d'une représentation graphique élaborée à partir de la donnée de quelques points.

— de faire apparaître l'idée de variation d'une fonction sur son intervalle de définition : il ne s'agit pas d'une étude rigoureuse, mais simplement d'amener des conjectures et de faire avancer l'idée d'étude de la variation.

— de rechercher le maximum d'une fonction avec des méthodes d'approximation.

— d'user de tableaux de valeurs : les élèves ne sont pas étrangers à ces tableaux, ils font partie d'un domaine qui leur est familier.

— de montrer l'intérêt (au sens de "utilité") d'un tableau de variations.

On le voit, dans cette analyse *a priori*, les différents cadres évoqués ci-dessus pouvaient être mis en œuvre dans cette activité.

Il reste à construire précisément l'activité concrète qui va être proposée aux élèves pour que certaines propriétés, ou techniques, liées à la notion de fonction apparaissent comme des "nécessités" ou des "utilités". Cette partie du travail est apparue comme *"délicate"* à mettre en œuvre, mais c'est la dynamique de l'activité, les "rencontres cognitives qu'elle impose" qui, véritablement, fondent l'intérêt ou non de la situation.

III.2. *Faire du problème une activité*

Dans une première ébauche d'un texte que nous avons effectivement soumis aux élèves d'une classe, nous avions, après présentation du problème, construit une série de questions comme cela peut se faire assez habituellement (cf. Annexe 1.B). La première question invitait les élèves à calculer l'aire pour différentes valeurs de AM et à compléter un tableau qui leur était donné :

AM								
aire								

Cette première question posée d'emblée a fait que les élèves ne sont pas véritablement entrés dans le problème géométrique : ils se sont précipités dans les calculs nécessaires pour compléter le tableau. Ce n'était pas satisfaisant.

Il est ainsi apparu qu'il était inopportun de donner d'emblée aux élèves un texte avec des sous-questions qui, certes avaient comme rôle d'introduire divers cadres, mais qui ne permettaient pas de faire apparaître des éléments du savoir comme nécessaires ou utiles.

C'est ainsi que l'un d'entre nous, avec beaucoup plus de satisfactions, a simplement distribué une feuille avec l'énoncé du problème (cf. annexe 1) et a ensuite géré sa classe pendant une heure et demie de TD, en différentes *phases*, le passage d'une phase à une autre se légitimant par la nécessité ou l'utilité de faire apparaître un nouvel outil. Cette gestion s'est faite en alternant travaux individuels, ou en petits groupes avec des mises en commun.

Phase 1 : Phase de conjectures.

Après la distribution de l'énoncé, le travail des élèves a consisté à construire les figures et à formuler des conjectures.

La mise en commun des essais de réponses (cette mise en commun est un élément important du dispositif de l'activité) a conduit à la formulation des conjectures suivantes :

— quel que soit M, l'aire reste la même : si une dimension augmente, l'autre diminue,

— est-ce que l'aire varie ?

— si M est au milieu de AB, l'aire est maximum,

— plus M se rapproche de A ou de B, plus l'aire diminue.

Remarque : *il convient de laisser assez de temps pour que les élèves puissent formuler effectivement des conjectures et qu'éventuellement ils commencent à faire quelques mesures, s'apercevant ainsi que l'aire varie, d'où l'intérêt d'étudier ses variations.*

Phase 2

Les diverses conjectures sont énoncées ; toutes ne peuvent être vraies. C'est là qu'apparaît pour les élèves la nécessité d'étudier les variations de l'aire pour trancher entre les diverses conjectures. Il est alors intéressant de tracer quelques rectangles et surtout de calculer les aires correspondantes. C'est à ce moment-là que l'enseignant propose de dresser un tableau de valeurs :

"Pour différentes valeurs de la distance AM, calculer l'aire du rectangle AMDE. Présenter les résultats dans un tableau et conclure. (Ranger les valeurs de AM dans l'ordre croissant)".

Le tableau proposé comporte 8 colonnes pour obliger les élèves à prendre des valeurs non entières pour la distance AM.

Là aussi, le professeur suscite une mise en commun qui fait apparaître des résultats comme le suivant : " Si AM = 4 ; on obtient pour l'aire 18,4 ; 18 ; 17,2. "

Les élèves ont procédé, sûrement influencés par ce qui a été fait dans la première phase, par mesures des côtés des rectangles, ce qui explique ces imprécisions.

Les élèves expriment leur insatisfaction devant de tels résultats. Apparaît, comme une obligation pour lever les imprécisions dues aux mesures, la nécessité d'exprimer l'aire du rectangle au moyen d'une formule. (On voit ici, implicitement certes, fonctionner comme une nécessité la définition moderne d'une fonction et la recherche d'une expression algébrique). La formulation algébrique est ainsi une alternative à une procédure familière mais rendue insatisfaisante par la situation.

Phase 3

Le professeur propose de déterminer l'aire du rectangle en fonction de AM, de poser AM = x, et d'appeler l'aire trouvée : f (x). Les élèves arrivent à trouver, sans trop de peine, l'expression de f (x). L'utilisation du théorème de Pythagore n'est pas le fait de tous les élèves, mais l'idée de son emploi circule vite dans la classe.

Le professeur demande alors de refaire le tableau de valeurs, et pour "visualiser" les résultats, demande de représenter dans un repère du plan les points ayant comme abscisse la distance AM et comme ordonnée l'aire du rectangle.

Dans cette phase, l'usage de la programmation avec les calculettes apparaît "naturellement" : les élèves trouvent en effet long et fastidieux de calculer f (x) pour diverses valeur de x.

Programmer un petit programme, bien que *"coûteux en temps"*, apparaît ainsi comme une solution technique *"économe en temps"*. Il vaut mieux perdre un peu de temps à programmer que de répéter plusieurs fois le même calcul.

Le travail réalisé dans cette phase fait avancer le problème de façon significative :

— l'aire croît pour x variant de 0 à un nombre réel compris entre 4 et 5, puis décroît jusqu'à 6.

— les remarques sur les variations de l'aire se confirment sur le graphique, on obtient une courbe.

— le maximum de l'aire est entre 4 et 5. Ceci est déterminé à partir du tableau.

— un autre tableau faisant varier x de 4 à 5 par pas de 0,1 est rapidement dressé (sur proposition de l'enseignant) et permet d'affiner le résultat : le maximum est atteint pour x compris entre 4,2 et 4,3.

La réalisation des calculs pour remplir ce tableau donne des indications sur l'allure de la représentation graphique : joindre les points obtenus avec le tableau précédent par des segments, ne convient pas.

Cependant, les élèves acceptent difficilement l'idée de ne pas trouver *"la valeur exacte"*. Ils ont l'impression que le problème n'est pas achevé.

Mais l'heure et demie du TD s'achève, et avec elle, ce que nous avions prévu comme activité introductive.

On peut, bien sûr, réutiliser ce problème dans la suite du cours sur les fonctions, demander par exemple, pour quelles valeurs de AM, l'aire est égale à 5, supérieure à 7... on peut donner une solution géométrique exacte au problème.

Nous nous sommes demandés (et nous n'avons pas vraiment de réponse à cette question) à quel moment il convenait d'institutionnaliser les parties de cours que l'activité faisait apparaître : progressivement, au fil du déroulement de l'activité ou seulement en synthèse sous forme de cours ou encore sous forme de pointage rapide avec un renvoi à un cours final ?

III.3. *Repérage dans la dynamique de l'activité des "points" intéressants*

Il convient, en guise de bilan, de repérer dans l'histoire de la relation entretenue pendant 1 h 30, entre les élèves et le problème, les points de passage constitutifs d'un apprentissage.

III.3.1. La formulation de conjectures contradictoires fait apparaître *la nécessité* d'étudier la fonction qui à AM associe l'aire du rectangle.

III.3.2. Les imprécisions de calculs opérés à partir de mesure font apparaître *la nécessité* de rechercher une formulation de type algébrique[2] pour représenter la fonction. L'expression algébrique sous forme de formule marque bien symboliquement :

— que x connu, alors on peut connaître y précisément,

— à un x donné, correspond une seule valeur de y.

III.3.3. La programmation n'est pas une nécessité, mais un outil *"économe de temps"*, ce qui fonde son intérêt, dans une situation où il y a réitération de calculs semblables.

III.3.4. Les tableaux, la représentation graphique sont *"utiles"* pour représenter les résultats, visualiser les variations : ils per-

(2) Certes, nous pouvons créer un obstacle conceptuel en liant ainsi la notion de fonction à une formule mais il nous a semblé que nous ne prenions pas un grand risque en référence aux usages dominants dans un cours d'analyse.

mettent de répondre aux questions sur la variation.

III.3.5. La trajectoire de résolution du problème, conduit à une solution par approximations successives, ce qui laisse les élèves insatisfaits. La notion de *"solution approchée"*, comme étant bien une réponse d'ordre mathématique est à retravailler avec les élèves.

IV — Conclusion

On peut débattre sur l'opportunité d'activités pour introduire une leçon, mais il nous semble que ce débat n'est qu'un corollaire d'un autre plus important, celui qui porte sur le sens que les élèves vont attribuer aux objets mathématiques enseignés. Cette question du sens ne saurait se limiter aux activités d'introduction, elle est bien sûr présente à tout moment.

Cependant, il nous est apparu, dans cet exercice auquel nous nous sommes livrés, qu'il importait de faire vivre un objet mathématique, du moins quelques-unes de ses caractéristiques, dans une situation problématique, avant même que de le nommer ou le montrer officiellement : celui-ci, alors, n'est pas *"parachuté"*, mais s'introduit comme un élément conceptuel nécessaire, ou tout du moins utile pour faire avancer vers la solution d'un problème : le sens commence à s'édifier dans la relation entretenue par l'élève avec l'objet et la situation-problème.

Retenons aussi qu'on ne saurait caractériser une activité uniquement par l'énoncé brut du problème qui la fonde, mais qu'il convient d'examiner comment va s'organiser la dynamique de l'activité dans la classe : à ce titre, un texte de consignes n'est pas nécessairement le plus adéquat, et il peut, au contraire, être plus pertinent de cacher pendant un certain temps des pistes possibles, le temps que les élèves fassent un bout de chemin significatif dans les voies de résolution du problème, ce qui redonne toute sa place à l'enseignant dans la délicate mission de la gestion de la classe.

Enfin, précisons qu'il serait utopique de tout attendre d'une séquence d'introduction, nécessairement limitée dans le temps : le travail de construction du sens d'un concept est à incrire dans le temps de l'ensemble des activités (cours et exercices compris !) mettant les élèves en contact avec celui-ci.

BIBLIOGRAPHIE :

Sur l'historique de la notion de fonction

[1] YOUSCHKEVITCH A. P. : le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXème siècle : in *Fragments d'Histoire des mathématiques* - brochure APMEP - n° 41 (1981)

[2] INGRAO B. : *La notion de fonction à travers l'histoire* - Bulletin Irem de Clermont-Fd - n° 43-44 (1991)

[3] Groupe d'Histoire des Mathématiques de l'Irem de Dijon : *"Vous avez dit fonction ?"* - Feuille de Vigne - n° Spécial - Irem de Dijon.

Sur les aspects méthodologiques

[4] COPREM - Document 1987

[5] DOUADY R. : *Jeux de cadres et dialectique outil-objet* - in R.D.M. - Vol. 7/2 (1986)

[6] DOUADY R. : *Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement* Bulletin Irem de Clermont-Fd - n° 43-44 (1991)

[7] GUZMAN-RETAMEL I. : Registres mis en jeu par la notion de fonction - in Annales de didactique et de sciences cognitives - Vol. 2 (1989) - Irem de Strasbourg.

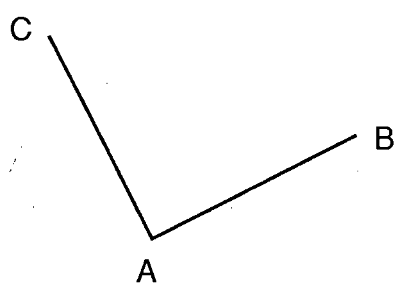
ANNEXE 1.A

Texte définitif distribué aux élèves au début de la séance de T.D.

Soit la figure suivante :

AB = AC = 6
CAB = 90°

M est un point qui se déplace sur le segment [AB]



On construit un rectangle AMDE avec M ∈ [AB] ,

D appartient à l'arc de cercle BC de centre A , de rayon 6 cm,

E ∈ [AC] .

1°) Faire la figure.

2°) Etudier les variations de l'aire du rectangle AMDE en fonction de la position du point M sur [AB] .

3°) Y a-t-il une position de ce point M pour laquelle l'aire du rectangle AMDE est maximum ?

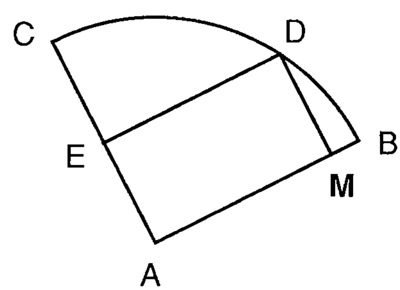
ANNEXE 1.B

Voici, ci-dessous, la première version du texte distribué aux élèves. La visibilité immédiate de la première question a fait que, d'emblée, les élèves se sont engagés dans des calculs, sans vraiment s'approprier le problème dans le cadre géométrique.

AB = AC = 6 ;
D appartient à l'arc de cercle BC ,
M est un point du segment [AB] qui se déplace de A à B .

On veut étudier les variations de l'aire des rectangles AMDE que l'on peut former à partir de chaque point M .

Y a-t-il une position de ce point M pour laquelle l'aire obtenue est plus grande que toutes les autres ?



1) Pour différentes valeurs de la distance AM , calculer l'aire du rectangle et présenter les résultats dans un tableau.

Ranger les différentes valeurs de AM dans l'ordre croissant :

AM								
Aire								

2) Représenter dans un repère du plan les points dont les coordonnées sont les valeurs écrites dans le tableau. (abscisses = AM ; ordonnée = aire).

3) Posons AM = x , l'aire variant en fonction de x sera notée f (x) .
Si on veut utiliser une calculatrice pour affiner et compléter le graphique commencé au 2) par d'autres points, quelle séquence de calcul faudra-t-il effectuer à l'aide d'une calculatrice ? En déduire f (x) =

4) Calculer f (x) pour x = 4 ; x = 4,1 ; x = 4,2 ; ... ; x = 5 et représenter les points de coordonnées (x, f (x)) dans le repère choisi au 2).

5) Donner un encadrement de la valeur de x pour laquelle f (x) est maximale, et construire un tel rectangle pour une valeur de x prise dans cet intervalle.

6) Cette étude vous suggère-t-elle une réponse à la question posée au début ?

Utiliser une méthode géométrique pour justifier une telle réponse.

ANNEXE 2

Exemple d'une situation qui ne convient pas pour introduire la notion de fonction.

On a proposé dans deux classes, l'activité suivante :

On se propose de construire divers rectangles MNOP , ayant tous un périmètre de 40 cm.

Dans un repère orthonormé (A, i, j) (unité 1 cm), on a représenté un de ces rectangles (de longueur 15 cm et de largeur 5 cm) en plaçant O en A , N sur l'axe (A, j) et P sur (A, i) . (Cf. schéma ci-joint).

Sur ce même repère construire, après avoir complété le tableau ci-dessous, d'autres rectangles MNOP .

On désigne par x la longueur de [OP] et par y la longueur de [PM]

x : longueur de [OP]	2	5	7	10	12	15	19
y : longueur de [PM]							

Vérifier que les différents points M sont alignés.

Justifier, à l'aide de connaissances mathématiques vues en troisième que les différents points M sont alignés.

De plus, les élèves recevaient un schéma avec le tracé d'un rectangle dans un repère. *A priori*, cette activité pouvait paraître convenir ; il y a un ancrage apparent sur la notion de fonction affine vue en classe de troisième.

En fait, cette activité ayant été proposée en milieu d'année scolaire, en classe de seconde, les élèves ont surtout pensé à diverses méthodes vectorielles pour vérifier l'alignement de points. Quelques-uns ont pensé au théorème de Thalès ; d'autres ont utilisé un théorème du genre :

" AMB alignés, avec M entre A et B si et seulement si AM + MB = AB "

en le généralisant à plusieurs points.

Notons que des élèves ont bien écrit une relation du type " y + x = 20 ", mais ils n'ont pas reconnu l'expression d'une fonction affine.

En d'autres termes, ce problème formulé ainsi, appelle trop de trajectoires de nature géométrique avec usage d'outils vectoriels. Il ne permet pas de faire apparaître, de façon certaine ou quasi certaine, une trajectoire mobilisant des connaissances afférentes à la notion de fonction.

ANNEXE 3

Voici, ci-dessous, un exemple d'étude de fonction traité uniquement dans un cadre géométrique. Il est extrait d'un vieux manuel d'Exercices de Géométrie écrit par F.I.C, et publié en 1882 chez Mame et Poussielgue.

Exercice.

258. **Problème.** *Étudier les variations de la différence des distances de deux points donnés à un même point d'une droite donnée**.*

1° *Les deux points* A *et* B *sont d'un même côté de* XY.

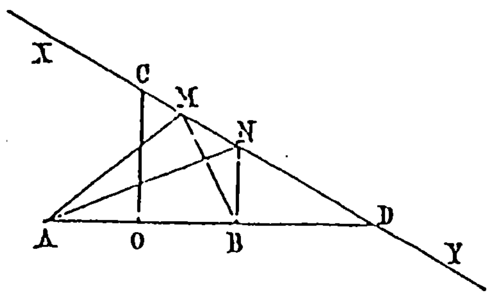


Fig. 152.

Élevons une perpendiculaire OC au milieu de AB, et prolongeons AB jusqu'à la rencontre de XY.

Il y a trois parties à étudier séparément : CD, CX, DY.

(a) *Pour le point* C, *la différence est nulle;* car $AC = BC$.

(b) *De* C *à* D *la différence augmente graduellement* (fig. 152).

Prouvons qu'on a $AM - BM < AN - BN$.

On sait que lorsque deux triangles ont même base et que deux de leurs côtés se coupent, la somme des côtés qui se rencontrent est plus grande que la somme des deux autres (G., n° 178) ;

donc . $$AM + BN < AN + BM$$

---

* Voir n° 302, où le même problème est résolu par la *Méthode algébrique*. Il est d'ailleurs utile de recourir aux *Exercices d'Algèbre*, n° 430.

** Cette belle étude est due à M. Régis PIALAT, sorti de l'*École des Mineurs de Saint-Étienne* en 1876 avec le numéro 1.

Mais aux deux membres d'une inégalité, on peut retrancher une même quantité sans changer le sens de l'inégalité;

donc $$AM - BM < AN - BN$$ *C. Q. F D.*

(c) Au point D, on a $AD - BD = AB$.

(d) De D à Y *la différence diminue graduellement* (fig. 153).

Comme précédemment, on prouve que $AM - BM < AN - BN$.

A la limite, quand Y tend vers l'infini, les droites AF, BG deviennent parallèles.

Leur différence $= AH = ab$, projection de AB sur la ligne donnée.

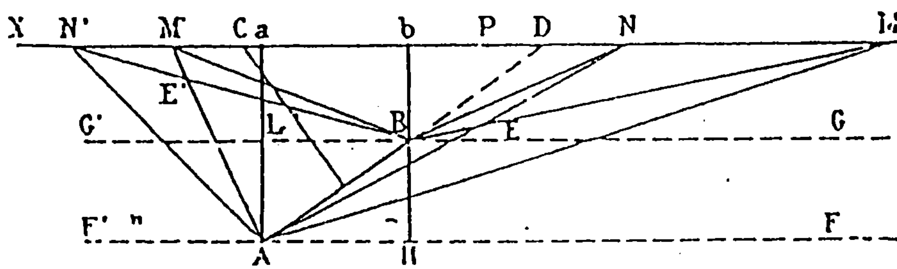


Fig. 153.

(e) De C à X, la distance BM' surpasse AM' (G., n° 42) en prenant BM' — AM' pour différence; on doit dire que la différence augmente lorsqu'on s'éloigne du point C.

En effet, $$BM' + AN' < BN' + AM'$$ (G., n° 152.)

d'où $$BM' - AM' < BN' - AN'$$ *C. Q. F. D.*

A la limite, quand X s'éloigne indéfiniment vers la gauche, les droites BG' et AF' sont parallèles; elles ont aussi *ab* pour différence.

(f) En prenant constamment AM' — BM' pour différence, on doit dire que de C vers X la différence est négative et augmente en valeur absolue jusqu'à égaler *ab*.

259. **Résumé.** De X vers C la différence est négative; sa *valeur absolue*, égale d'abord à *ab*, décroît de plus en plus et devient nulle au point C. A droite de ce point, la différence reste constamment positive et augmente graduellement jusqu'au point D, où elle égale AB. Au delà du point D, la différence toujours positive décroît, et pour Y à l'infini, elle devient égale à *ab*; donc *la différence* part de $-ab$, arrive à zéro, croît jusqu'à AB, puis diminue jusqu'à *ab*.

Remarques. 1° De C à D, la différence passe de zéro à AB; donc il y a un point P pour lequel la différence égale *ab*.

2° En ne tenant compte que de la *valeur absolue* de la différence, on peut dire :

De X à P il y a deux positions et deux seulement, pour lesquell. la différence peut avoir une valeur comprise entre zéro et *ab*.

De P à Y il y a deux positions et deux seulement, pour lesquelles différence peut avoir une valeur comprise entre *ab* et AB.

Donc de X à Y il y a deux positions et deux seulement, pour le quelles la différence a une valeur donnée, lorsque cette valeur e: comprise entre zéro et AB.

Cas particulier. Lorsque XY est parallèle à AB, la projectic $ab = AB$. A partir du point C, soit vers la droite, soit vers la gauch la différence augmente graduellement et varie de zéro à AB.

2° *Les deux points donnés A et B sont de part et d'autre de* XY (fig. 15

On retombe dans le cas précédent, en déterminant le symétrique l du point B, par rapport à la droite donnée XY.

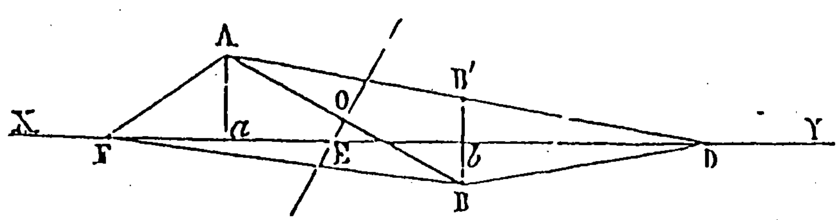


Fig. 154.

Sur la droite donnée, et pour toute différence comprise entre zér et AB', on trouve deux points qui donnent la différence demandée.

(g) Le point D, tel que XY est bissectrice de l'angle ADB, donne l différence maxima AB'.

(h) De D vers Y, la différence diminue de plus en plus et tend devenir égale à la projection *ab* de AB sur XY. Il est évident que AE donne la même projection *ab*.

(i) Au point E, où la perpendiculaire OE, élevée au milieu de AE coupe XY, la différence est nulle.

(j) De D vers E, la différence diminue depuis sa valeur maxima AE jusqu'à zéro.

(k) A partir de E vers X, la différence AF — BF est négative; e ne tenant compte que de la *valeur absolue*, ou de BF — AF, on peu dire qu'au delà du point E, la différence augmente quand le poin s'éloigne de E, et tend à devenir égale à la projection *ab*.