REPERES - IREM. n°10 - janvier 1993

CHYPRE : UN LOGICIEL D'AIDE AU RAISONNEMENT

Philippe BERNAT
Irem de Lorraine et Centre
de Recherche en Informatique de Nancy

In this paper, we study the difference between reasoning and proving. This difference is fundamental although these two kinds of activities are often confused in our pedagogical practice. We present Chypre, an Intelligent Interactive System, which is used in this way in geometry courses.

I — Introduction

L'un des objectifs de l'enseignement des mathématiques et plus particulièrement de la géométrie au collège et au lycée est l'apprentissage du raisonnement. Nous disposons de peu d'outils pour évaluer cet apprentissage. Les pratiques courantes exigent une résolution complète d'un problème restituée sous la forme d'une démonstration.

Or il convient de distinguer très nettement *raisonnement* et *démonstration*. Le raisonnement est une activité intellectuelle correspondant à un mécanisme complexe, la démonstration est une mise en forme logico-déductive du résultat du raisonnement.

L'informatique qui permet une certaine souplesse dans bien des domaines peut-elle nous aider dans le suivi du raisonnement d'un apprenant ou d'un expert, et donc dans la compréhension des mécanismes mentaux associés ?

Des recherches en Intelligence Artificielle ont permis la naissance de plusieurs systèmes d'E.I.A.O.[1] dans le domaine de la géométrie.

(1) Enseignement Intelligemment Assisté par l'Ordinateur, ou plus récemment : Environnement Interactif d'Apprentissage par l'Ordinateur.

II — Les tuteurs intelligents

Un tuteur intelligent en géométrie prend en charge un élève dans la résolution d'un problème. Il lui permet de s'entraîner et corrige immédiatement ses erreurs. Les tuteurs proposent différents modes de raisonnement :

— un raisonnement dit en chaînage avant,

— un raisonnement en chaînage arrière,

— un raisonnement mixte (avant et arrière).

Le raisonnement en chaînage avant consiste à partir des hypothèses puis, en appliquant à ces hypothèses différents théorèmes, on modifie l'état des connaissances jusqu'au but recherché. Ce raisonnement correspond en réalité à la rédaction de la démonstration et est rarement appliqué tel quel. André ANTIBI [Ant88] a montré dans sa thèse les difficultés liées à un tel raisonnement. Il propose de raisonner à partir du but. C'est ce qu'on appelle le chaînage arrière. Un expert humain mélange souvent ces deux types de raisonnement (chaînage mixte).

La plupart des tutoriels existants utilisent ces différentes techniques de raisonnement. Le lecteur intéressé pourra en retrouver la description dans [Cup90] ainsi que [And85], [Gui91], [Nic89], [Py90], [Gio90].

Ces tutoriels permettent une certaine autonomie de l'élève. Ils ont en commun une méthode de *démonstration à un pas* qui peut vite devenir lassante. L'élève est obligé de fournir le théorème qu'il veut appliquer et d'indiquer exactement ses prémisses (ou sa conclusion dans le cas d'un chaînage arrière) ce qui peut empêcher l'élève de mener à bien un plan plus général.

III — Qu'est-ce qu'un raisonnement ?

III.1. *Comment raisonne un expert humain ?*

Le raisonnement dépend de chaque domaine. On ne raisonne pas de la même façon pour résoudre un problème d'économie ménagère personnel que pour un problème de géométrie.

On a depuis longtemps (depuis l'Antiquité) relevé différents types de raisonnement :

— raisonnement déductif,

— raisonnement inductif,

— raisonnement analogique (on peut à ce propos citer les travaux en cours sur le tutoriel Archimède [Chou90]),

— raisonnement plausible "à la Polya" ([Pol54]),

et peut-être d'autres ...

Je suis personnellement convaincu que le raisonnement mathématique n'est pas linéaire. On peut raisonner en partant du "milieu"(2). Il faut éviter la parcellisation de la démonstration. Le suivi pas à pas d'une démonstration cache la vision globale [Sol86].

Démontrer c'est :

— se convaincre (cette activité du mathématicien donne des productions très éloignées des canons exigés par un enseignant)

— convaincre quelqu'un d'autre (mais qui ? Sûrement pas l'enseignant qui connaît la solution mieux que l'élève).

(2) Pour s'orienter dans un paysage montagneux, vaut-il mieux partir d'une vallée pour aboutir à une autre vallée en naviguant à l'aveuglette ou repérer les pics les plus évidents et construire son chemin en se repérant sur ces montagnes ?

Il convient de distinguer et de séparer nettement deux activités fondamentalement différentes ([Hou90] et [Ren88]) :

— la résolution du problème, c'est-à-dire la recherche d'une solution, grâce à un raisonnement personnel difficile à expliquer,

— la démonstration, c'est-à-dire la rédaction de cette solution sous une forme acceptable.

Bien des élèves ont "compris" un problème mais commettent dans la rédaction des erreurs de logique qui sont impitoyablement sanctionnées.

Une aide trop dirigiste (indication du pas suivant de la démonstration ou découpage trop fin du problème à résoudre à l'aide de questions intermédiaires) provoque un sentiment d'insatisfaction. Pour amener l'élève à "aimer" démontrer ou raisonner, il est nécessaire qu'il réussisse à mener jusqu'au bout, et seul, une démonstration complète en étant sûr de la validité du raisonnement.

Il faut essayer de privilégier l'*activité de recherche* de la solution par rapport à l'activité de rédaction de la démonstration.

III.2. *Un raisonnement en géométrie fondé sur les configurations de base*

L'une des premières activités préparant au raisonnement en géométrie est la recherche de configurations de base dans une figure. Les élèves sont entraînés à ce type d'activité dès l'école primaire (voir par exemple le cahier d'évaluation de mathématiques à l'entrée en Sixième).

La première tâche consiste à tracer la figure puis à l'analyser. Dans les débuts de l'apprentissage du raisonnement on peut se contenter de savoir extraire les configurations de base [Egr88]. Raisonner à partir des configurations de base permet de se dégager du niveau de détail et de s'attacher davantage à la recherche du plan de résolution.

Koedinger et J.R. Anderson [Koe90] ont observé un expert(3) dans une activité de résolution de problèmes. Cette observation les a conduit à mettre en avant le rôle primordial des schémas de base (perceptual chunks) pour la réalisation d'un résolveur. Le domaine traité est celui des cas d'égalités des triangles.

Un schéma de base contient la figure qui lui est associée (whole statement), les conséquences (part-statements) ainsi que les conditions nécessaires pour obtenir cette configuration. Le résolveur recherche dans une première étape tous les schémas puis établit des liens entre eux. Nous retrouverons ce principe dans le système Chypre [Ber91] que nous étudierons plus loin.

Il est assez évident que le raisonnement en géométrie est favorisé par la présence d'une figure qui permet une saisie globale du problème et aide à la création d'images mentales [Ber88].

III.3. *Raisonnement d'un expert et démonstration d'un élève*

III.3.1. Exemple : Comparons sur un exemple (encadré 1) le raisonnement pratiqué par un expert(4) et la démonstration demandée à un élève. Cet exemple est la transposition d'un protocole verbal observé par Koedinger à l'Université de Pittsburgh [Koe90].

(3) Un enseignant de géométrie dans une high-school.

(4) Un enseignant quelconque du secondaire qui pourrait être l'auteur lui-même.

Encadré 1. *un exemple de démonstration*

B_1 *est le milieu de* AC *et de* BI , C_1 *est le milieu de* AB *et de* CJ . *Montrer que* A *est le milieu de* IJ .

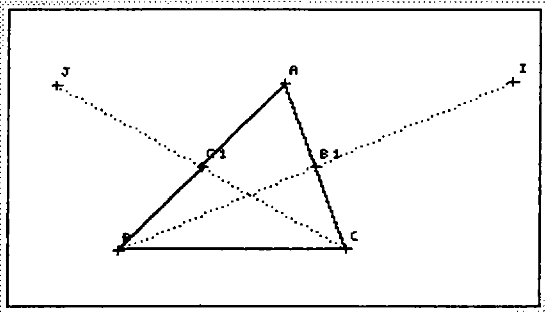


figure 1

Phase de recherche

— ACBJ est un parallélogramme,
— ainsi que ABCI,
— les vecteurs AI et JA sont donc égaux car égaux à BC,
— et c'est prouvé.

Phase d'exécution

— comme nous savons que C_1 est le milieu de ses diagonales, ACBJ est un parallélogramme,
— de même pour ABCI,
— on a donc l'égalité des vecteurs AI et BC d'une part, JA et BC d'autre part,
— donc les vecteurs AI et JA sont égaux,
— d'où A est le milieu de IJ.

L'expert ponctue sa prestation d'indications sur la figure telles des marques d'égalité de segments. Il complète la figure en traçant les côtés manquants des parallélogrammes.

Démonstration généralement exigée

— C_1 est le milieu de [AB] et de [JC] donc (AJBC) est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu,
— dans un parallélogramme les côtés opposés définissent des vecteurs égaux, donc les vecteurs JA et BC sont égaux,
— B_1 est le milieu de [AC] et de [JB] donc (AICB) est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu,
— dans un parallélogramme les côtés opposés définissent des vecteurs égaux, donc les vecteurs AI et BC sont égaux,
— l'égalité étant transitive, on peut dire que les vecteurs JA et AI sont égaux,
— on en déduit que A est le milieu de [IJ] (en vertu du théorème qui dit que .....)

III.3.2. Commentaires

On remarquera tout d'abord la distorsion entre le raisonnement de l'expert et la relative complexité de la démonstration de l'élève (qui a au moins l'avantage d'être parfaitement exacte ici, ce qui n'est malheureusement pas toujours le cas).

Le texte de l'élève ne reflète pas du tout l'activité de recherche et surtout ne met pas en évidence les points importants de la démonstration (et encore, l'exemple est très simple ; un problème un peu plus difficile amène rapidement à des rédactions très confuses).

Le travail de l'expert :

L'expert a relevé le fait que ACBJ est un parallélogramme sans préciser davantage si ce fait a été déduit des hypothèses ou a été simplement observé sur la figure. On peut penser que l'opération mentale associée à cette déclaration comporte deux étapes réalisées pratiquement simultanément :

— *observation de la figure et vision de la configuration du parallélogramme,*

— *application immédiate du théorème permettant de confirmer ce fait, de le prouver à partir des hypothèses.*

L'égalité des vecteurs déduite de la configuration du parallélogramme n'est même pas citée. *C'est un implicite* lié à l'image mentale de la configuration. L'expert possède inconsciemment ce renseignement, il pourra l'exploiter ou non.

L'égalité des vecteurs AI et JA s'accompagne d'une rapide justification liée à ces implicites.

La conclusion pouvant se déduire à cet instant, par application d'un théorème ou d'une définition connus, la phase de recherche peut être considérée comme achevée. Il n'est pas nécessaire d'épiloguer sur des "évidences".

Koedinger a remarqué que les experts testés omettent plus de 50% des pas d'un raisonnement. De plus ils sautent tous le même type de pas.

Pour raisonner aussi efficacement, l'expert dispose d'un savoir-faire acquis par une longue pratique ainsi qu'une bonne connaissance du domaine. La connaissance déclarative s'enseigne assez facilement. Pour pouvoir résoudre des problèmes, l'élève doit non seulement connaître parfaitement définitions et propriétés d'une part, règles ou théorèmes d'autre part, mais surtout il doit savoir les utiliser presque par réflexe. Son effort mental porte donc sur deux pôles : l'apprentissage de la connaissance et sa mise en œuvre. Un apprentissage valable doit décomposer les tâches. Mais on ne retient bien que ce qui nous est nécessaire pour l'aboutissement d'une tâche. C'est-à-dire que, pour retenir les propriétés de telle ou telle configuration, il est indispensable de résoudre des problèmes où ces propriétés interviennent. Comment peut-on sortir de ce cercle vicieux ?

IV — Le logiciel CHYPRE

Ce logiciel est une tentative de réponse au problème qui vient d'être posé. Il est le résultat actuel d'un travail réalisé à l'Irem de Lorraine et au CRIN (Université de Nancy I) [Ber91]. Ce logiciel est implanté sur PC afin de pouvoir être testé dans des classes.

Son objectif est de proposer à l'utilisateur un micro-monde dans lequel il pourra noter ses observations sur une figure, le logiciel se chargeant d'établir les liens entre les différents faits. Nous allons décrire le type de représentation des connaissances puis nous décrirons le logiciel .

IV.1. *Représentation du raisonnement*

Le raisonnement peut être représenté sous la forme d'un réseau comme celui de la figure 2 ci-dessous.

Les faits sont reliés entre eux par l'intermédiaire de théorèmes. Si un fait peut se déduire des ***hypothèses***, il prend la valeur ***prouvé***, sinon il garde le statut de ***conjecture***(5).Le réseau représenté dans la figure 2 est évidemment fictif, nous verrons qu'en réalité le réseau correspondant à un exercice même simple est plus complexe.

IV.2. *Evolution du réseau lors d'un raisonnement*

Devant un problème donné, on commence par noter les hypothèses et éventuellement le but à démontrer (s'il y en a un). Puis on recherche certains faits significatifs (les configurations de base). *Ces faits ne sont pas obligatoirement déduits des hypothèses ou liés au but.*

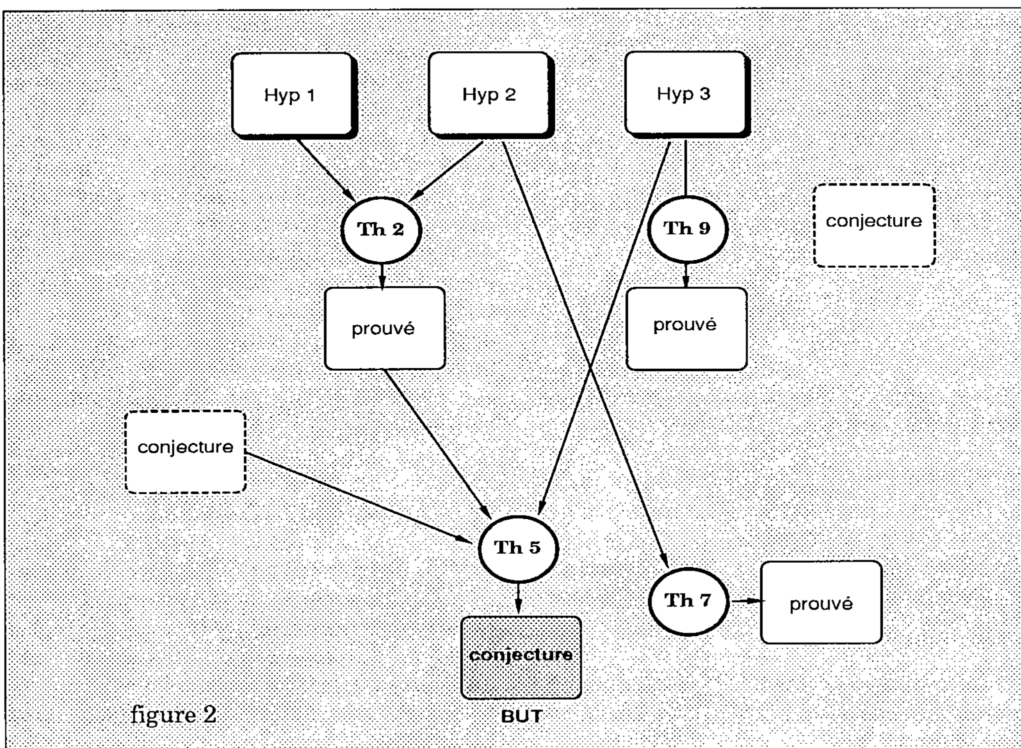


figure 2

(5) Ces trois mots sont à l'origine de l'acronyme CHyPre (Conjecture, HYpothèse, PREuve)

Lorsque nous rajouterons un nouveau fait, il sera relié au reste du réseau comme conclusion d'un ou plusieurs théorèmes. Ce nouveau fait permet éventuellement de déduire d'autres faits plus anciens. Il convient donc d'examiner, si on le juge nécessaire, d'anciens faits afin de revoir leur validité (*je viens de prouver telle chose, donc maintenant je sais que tel autre fait est prouvé*).

La figure 2a de l'encadré 2 représente l'espace-problème à un instant donné. Nous ne nous considérerons que quatre faits utiles. Le réseau total est suggéré par des ballons dans les figures en question.

Rajoutons le fait : "*ABCD est un parallélogramme*". Le système a créé successivement (et en cascade) les implicites liés à ce fait, puis il a cherché tous les théorèmes qui permettent de déduire ce fait de faits existants.

Ce type de construction simule assez bien le raisonnement d'un expert qui crée, consciemment ou inconsciemment, les différents liens évoqués ci-dessus quasi simultanément. Bien entendu, ces informations sont stockées dans la mémoire à long terme de l'expert, celui-ci étant capable de les extraire si nécessaire.

Chypre peut donc pallier les défaillances de la mémoire d'un utilisateur moins habile.

IV.3. *Le rôle de la figure*

Le domaine de la géométrie permet de faire des conjectures très probables par simple observation de la figure. Le rôle du système consiste à vérifier la validité d'une conjecture et de signaler si cette validité est douteuse.

Cependant le système ne doit pas être contraignant. Il se peut en effet que l'utilisateur tienne à conserver une conjecture non valide graphiquement pour plusieurs raisons :

— La vérification graphique se faisant avec un certain seuil de précision n'est pas absolument fiable, surtout dans des cas limites.

— On peut raisonner juste avec une figure que l'on sait fausse car sa construction est elle-même un problème.

— On veut faire un raisonnement par l'absurde.

IV.4. *Les implicites*

Les configurations de base correspondent à un concept. Leur nom est associé à une image mentale particulière de ce concept et à certaines propriétés caractéristiques implicites.

Ainsi la configuration du parallélogramme induit les implicites :

— Les côtés opposés sont parallèles,

— Les côtés opposés ont même longueur.

Un choix didactique s'impose quant à ces implicites.

Ainsi le fait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu n'étant pas associé à l'image générique d'un parallélogramme, il ne s'agira pas là d'un implicite. Lorsque nous voudrons utiliser cette propriété, il nous faudra l'exprimer explicitement. (cf. figure 3 ci-après)

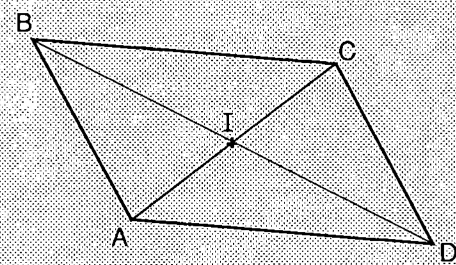
La déclaration des implicites n'est pas à la charge de l'utilisateur. Le système crée tous les implicites nécessaires. Si un impli-

Encadré 2. un exemple de réseau logique.

Considérons la figure ci-contre et supposons que les éléments dont on dispose (à partir du contexte) induise les deux propriétés :

AD // BC et AB // CD .

Nous voulons établir que *les diagonales se coupent en leur milieu.*



Nous ajouterons donc deux assertions au réseau logique de la figure 2a ci-dessous : la première (I milieu de AC) est *établie* (par hypothèse), la seconde (I milieu de BD) constituera la conclusion cherchée *si elle se trouve établie.*

Au départ le réseau est dans l'état de la figure 2a.

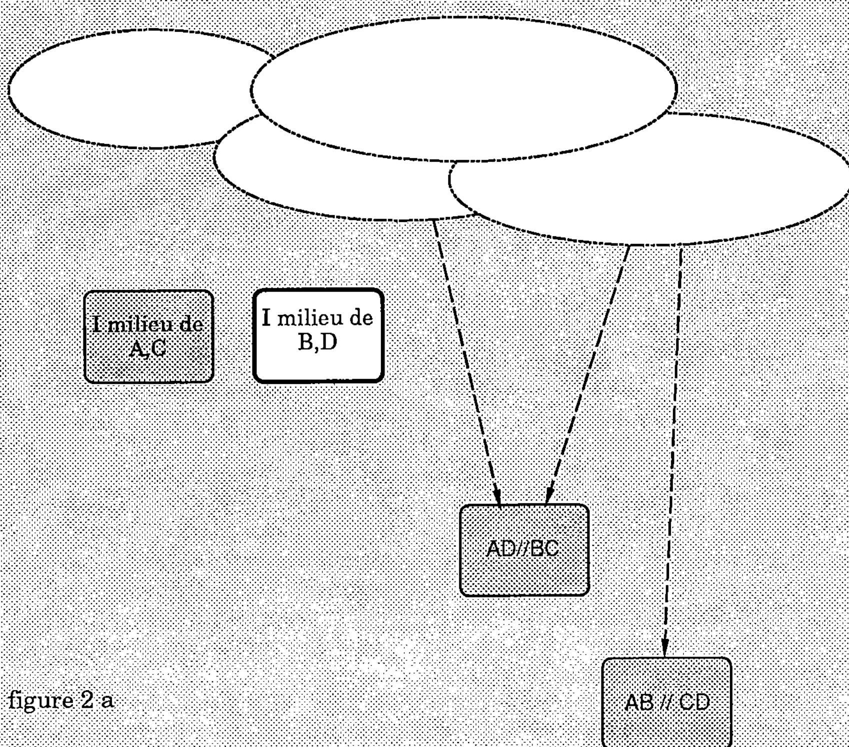


figure 2 a

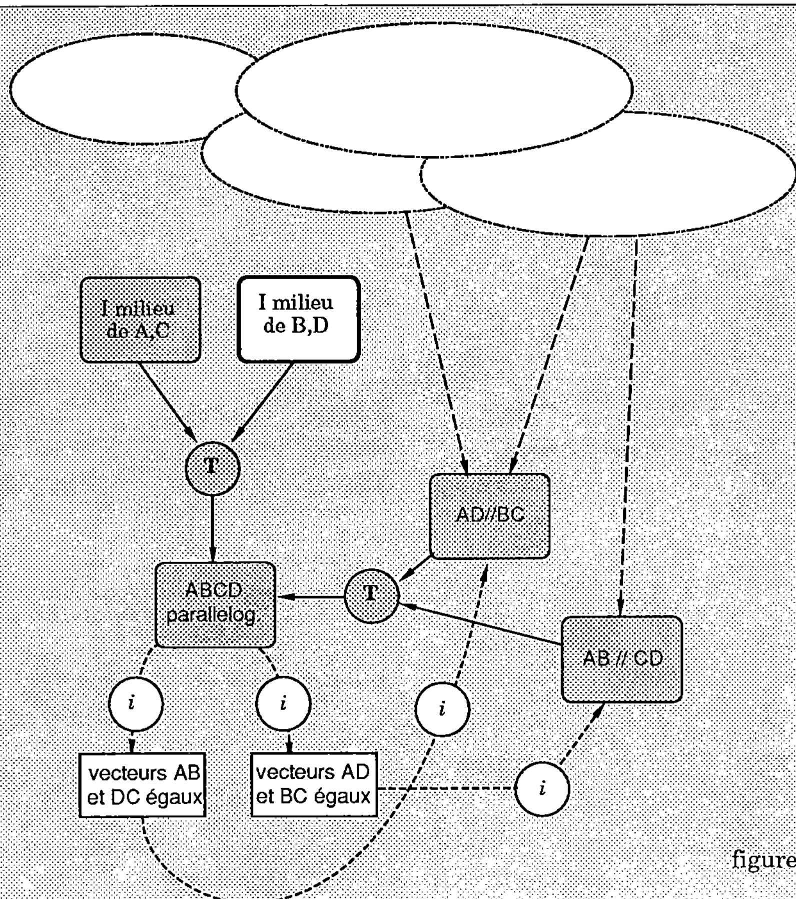


figure 2 b

Ajoutons (par exemple) l'assertion "ABCD est un parallélogramme" au réseau.

L'ordinateur prend automatiquement en compte deux types d'éléments logiques (fournis par la mémoire) :

— des assertions qui se déduisent implicitement de celle que l'on vient d'ajouter (elles sont indexées par "i"),

— des enchaînements permettant de savoir si la nouvelle assertion peut être déduite des autres (ils relèvent de *théorèmes* et sont marqués "T").

A cet instant, le réseau logique est dans l'état de la figure 2b. On notera que le système choisi ici ne contient pas (à titre d'implicite) la propriété des diagonales. La propriété cherchée n'est donc pas encore démontrée ...

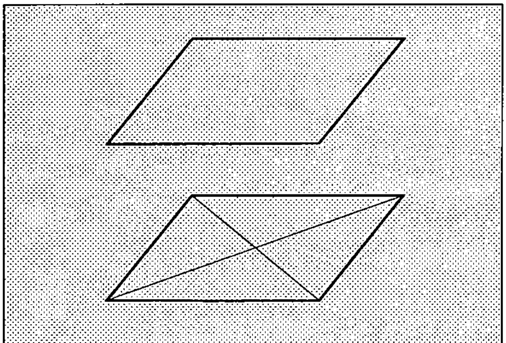


figure 3

cite a lui-même des implicites ceux-ci sont également créés.

IV.5. *Les droites*

Le problème des droites est un problème souvent éludé. Pour Geometry Tutor, la figure fournie avec un exercice fait partie des hypothèses. Les points qui apparaissent alignés sur la figure sont donc alignés par hypothèse. Evidemment il est hors de question de traiter des exercices qui consistent à prouver un alignement de points.

Il est en effet assez difficile de distinguer le statut véritable de quatre points qui apparaissent alignés sur une figure. L'alignement de trois de ces points peut être *prouvé*, alors que l'alignement de trois autres peut encore en être à l'état de *conjecture*. Ce dernier alignement ne sera peut-être jamais prouvé.

Dans un raisonnement déductif à partir des hypothèses, il suffit de compléter les droites par de nouveaux points au fur et à mesure de l'avancement de la démonstration, ce qui correspond au schéma suivant :

a) A , B et C sont alignés,

b) on prouve que B , C et D sont alignés,

c) on réunit ces deux faits en un seul : A , B , C et D sont alignés et on peut oublier les points a) et b).

Cette inférence est plus délicate dans le cas de Chypre. On peut être en présence de trois faits :

1) A , B et C sont alignés,

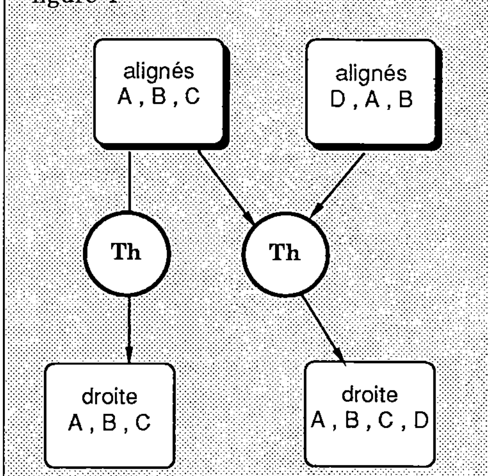
2) B , C et D sont alignés,

3) A , B , C et D sont alignés.

Le troisième fait se déduit bien sûr des deux précédents, mais il n'est pas question d'oublier les faits 1 et 2. En effet, si le fait 2 est une conjecture, on ne peut pas perdre le fait 1 qui est peut-être à la base du raisonnement aboutissant à la conclusion désirée alors que le chemin esquissé par les faits 2 et 3 conduit en réalité à une impasse.

La représentation du domaine dans Chypre permet de contourner cette difficul-

figure 4



té sans contrainte pour l'utilisateur. L'utilisateur peut déclarer uniquement l'alignement de trois points par un fait intitulé **alignés** qui prend pour paramètres les trois points. Le système gère lui-même d'autre faits appelés **droites** qui prennent en paramètre une liste de points. Lors de la déclaration d'un fait de type **alignés**, le système crée des implicites à partir de ce fait et d'autres faits de type **droite** (fig. 4).

Les faits de type **droite** n'apparaissent à l'utilisateur que dans le cas de parcours du réseau en vue d'une démonstration.

Les droites permettent de traiter efficacement bien des implicites. Il est en effet assez naturel de définir AB parallèle à CD et, sachant que C, D, I et J sont sur une même droite, d'en déduire, *sans aucun intermédiaire*, le parallélisme de AB et IJ.

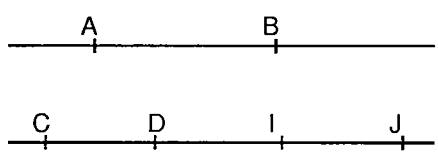


figure 5

IV.6. *Les fonctionnalités de Chypre*

L'écran est divisé en trois parties :

Un bandeau supérieur comprenant le menu principal ou des instructions pour l'utilisateur.

La fenêtre des figures

La fenêtre des faits

IV.6.1. Construction d'une figure

Le module de construction de figures permet la création et la modification de toutes les figures de géométrie plane habituellement constructibles à la règle et au compas. L'accès aux différentes procédures de constructions se fait à l'aide de menus déroulants. Les paramètres (droites, points, cercles,...) d'une procédure sont simplement désignés à l'aide d'un curseur. Nous retrouverons cette fonctionnalité dans la suite.

Une figure peut facilement être modifiée en saisissant l'un des points de base de la construction et en le déplaçant. On pourra ainsi faire constater la généricité d'une situation (par exemple la concourance des trois médianes d'un triangle indépendamment de l'instance du triangle construit) ou au contraire étudier quelques cas particuliers.

Le module de construction géométrique offre d'autre part une fonctionnalité originale : la possibilité de recopier sur différentes "feuilles" parfaitement superposables des parties significatives de la figure. Par simple appui sur une touche de fonction F1 à F9, on fait apparaître telle ou telle feuille.

Cette technique s'apparente à l'utilisation de transparents. Ce module est dérivé du logiciel **Calques Géométriques** [Ber90].

Sur la figure 6 de la page suivante, on peut constater qu'on a recopié sur la feuille 2 certains éléments constituant la figure de la feuille 1.

On a ainsi rendu plus visible une configuration connue. Extraire d'une figure relativement complexe des éléments lisibles constitue le premier pas dans le processus de raisonnement.

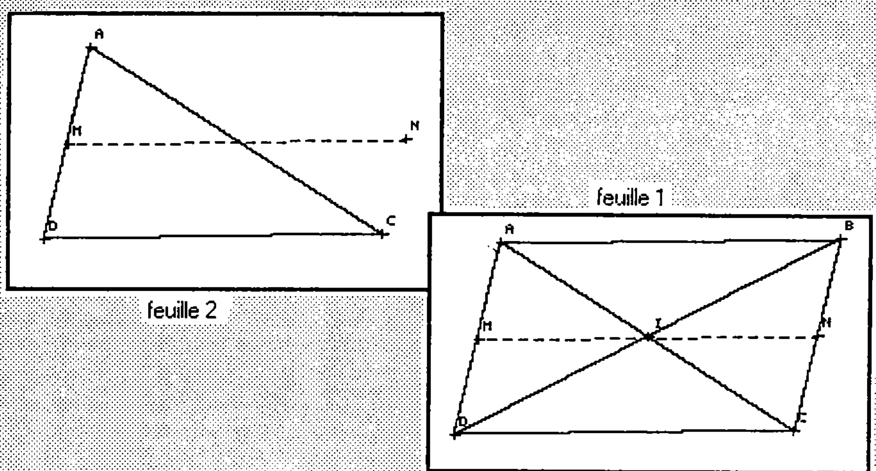


figure 6

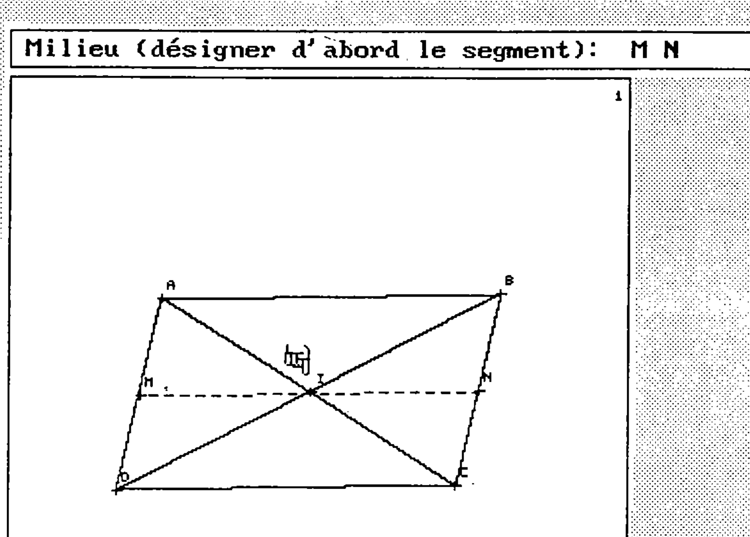


figure 7

IV.6.2. Déclaration de faits

Les commandes de la partie **Résolution** du système sont également accessibles par menu déroulant. Les faits sont choisis en tant qu'hypothèse ou en tant que conjecture parmi les items suivants :

— parallélogramme,

— vecteurs égaux,

— parallèles,

— milieu,

— alignés,

— triangle des milieux (configuration du).

Chaque item correspond à une configuration de base que l'on doit désigner sur la figure considérée.

Savoir déclarer correctement les hypothèses d'un problème est un exercice qui ne manque pas d'intérêt. Le langage minimal utilisé permet bien souvent de clarifier une situation.

Ainsi l'énoncé : *Les droites (AC) et (BD) se coupent en I,*
doit être remplacé par les hypothèses suivantes :

— *A , C et I sont alignés,*

— *B , D et I sont alignés.*

Les faits déclarés s'ajoutent dans la fenêtre des faits. Leur valeur (hypothèse, conjecture ou prouvé) s'affiche. La valeur *prouvé* se déduit automatiquement.

On observera sur la figure 8 le résultat de l'ajout d'une hypothèse : *J est le milieu de AD* et d'une conjecture : *I,J milieux de*

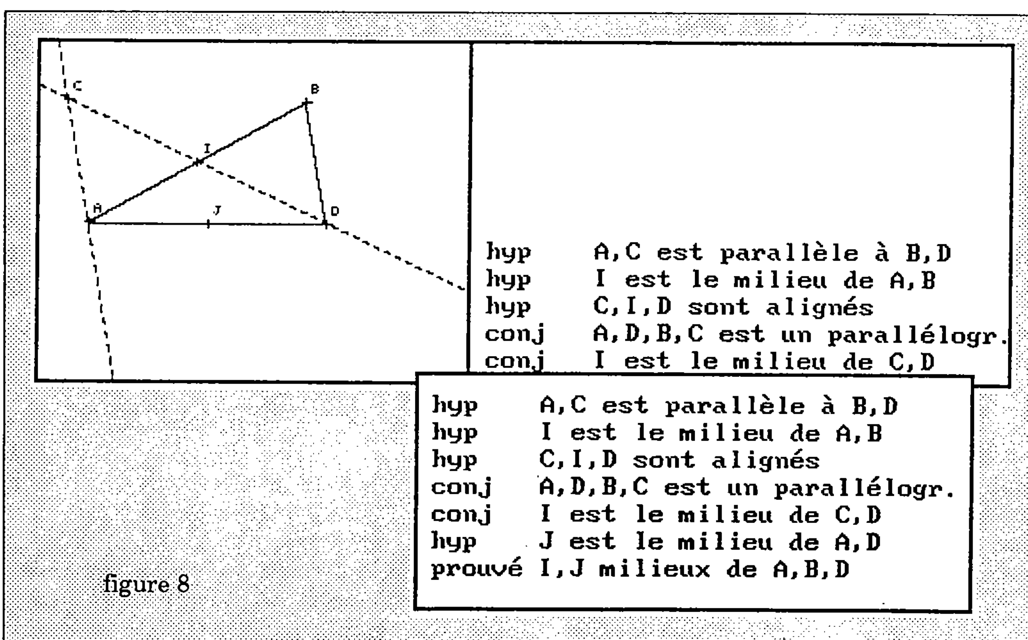


figure 8

A,B,D [6]; ce dernier fait prend automatiquement la valeur **prouvé** car il peut se déduire de deux des hypothèses.

Les implicites d'un fait sont automatiquement créés lors de la déclaration de ce fait. Ces implicites ne sont pas affichés en permanence, mais peuvent être visualisés sur simple demande de l'utilisateur. On trouvera en annexe la liste des théorèmes et des implicites se rattachant à chaque type de fait.

IV.6.3. Parcours du réseau

La constitution du réseau correspond à une activité de raisonnement. La démonstration correspond en général à la recherche dans le réseau ainsi constitué d'un chemin entre les hypothèses et le but que l'on s'est fixé. L'item intitulé **Démonstration** permet un cheminement dans le réseau. L'utilisateur sélectionne un fait. Si ce fait est la conclusion d'un théorème, le logiciel affiche les prémisses que l'on pourra éventuellement sélectionner. On peut ainsi faire un parcours en profondeur, la remontée se faisant ensuite par appui sur la touche <ESC>. Le parcours en largeur est également possible par appui sur la flèche droite.

L'item **Déduction** permet le suivi de la propagation de la valeur prouvé depuis les hypothèses. Il permet ainsi la simulation d'un raisonnement hypothético-déductif classique.

On n'obtient pas une démonstration puisque ce cheminement "prouve" également des faits inutiles pour le but fixé. A l'utilisateur de faire le tri. Un sortie imprimante est possible.

Voici un exemple très très simple :

Le but est le fait *A,I,C,B est un parallélogramme*. Le lecteur retrouvera sans peine les hypothèses. L'utilisateur a sélectionné un but qu'il s'est fixé et par appui sur une touche il fait apparaître à l'écran les déductions successives. La sortie imprimante qui suit correspond également à cette suite de déductions. Un trait horizontal sépare les différentes déductions ; il signifie un changement d'écran.

prouvé B,C,A,J est un parallélogramme
se déduit de :
hyp C1 est le milieu de A,B
hyp C1 est le milieu de J,C

---

prouvé vecteurs B,J et C,A égaux
se déduit de :
prouvé B,C,A,J est un parallélogramme

---

prouvé B,J est parallèle à C,A
se déduit de
prouvé vecteurs B,J et C,A égaux

---

prouvé vecteurs B,C et J,A égaux
se déduit de :
prouvé B,C,A,J est un parallélogramme

---

prouvé B,C est parallèle à J,A
se déduit de
prouvé vecteurs B,C et J,A égaux

---

prouvé A,I,C,B est un parallélogramme
se déduit de
hyp B1 est le milieu de A,C
hyp B1 est le milieu de B,I

Seule la dernière déduction nous intéresse. Un lecteur attentif n'aura pas manqué de remarquer que cette situation cor-

(6) qui est une abréviation du fait que la configuration formée du triangle ABD et du segment IJ est une configuration dite du "triangle des milieux"

respond à celle de l'encadré 1 la page 28. Le but atteint est un but intermédiaire. Le but final aurait fait surgir un plus grand nombre de faits inutiles tels que : les vecteurs AB1 et B1C sont égaux. Mais lors de tout raisonnement ne fait-on pas apparaître implicitement des déductions inutiles pour la démonstration finale ?

IV.6.4. Changement de valeur d'un fait

Les théorèmes proposés sont en nombre limité. La classe d'exercices résolubles est fonction de ces théorèmes. Cette limitation n'est pas propre au logiciel, tout enseignant sait parfaitement qu'il ne peut pas proposer à ses élèves n'importe quel exercice.

Une problématique est posée par une construction donnée. Suivant la formulation du problème, l'exercice est résoluble ou non. C'est-à-dire qu'une même figure correspond à plusieurs problèmes que l'on peut qualifier de congruents.

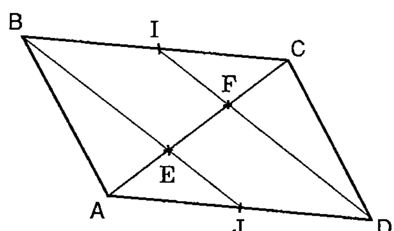


figure 9

La figure 9 peut correspondre à différents énoncés :

Enoncé 1 :

1 — ABCD est un parallélogramme,
2 — E et F sont situés sur AC tels que AE = EF = FC , (7)
3 — Montrer que I et J sont les milieux de BC et AD .

(7) Il faudra évidemment traduire ces faits en utilisant uniquement les modèles proposés par Chypre.

Enoncé 2 :

a — ABCD est un parallélogramme,
b — I et J sont les milieux de BC et AD ,
c — Montrer que AE = EF = FC .

On admet volontiers que ces énoncés sont congruents. On peut passer du résultat de l'énoncé 1 à la solution de l'énoncé 2 en utilisant l'unicité du milieu d'un segment, argument qui n'est pas facile à expliciter.

De manière plus pratique, lorsque l'on s'aperçoit de la difficulté de résoudre le problème à partir du premier énoncé, il suffit de changer la valeur de quelques faits (les hypothèses 2 sont à transformer en conjecture et la conjecture 3 en hypothèse). La topologie du réseau précédemment constitué ne dépendant pas de la valeur des faits n'est pas modifiée. Les valeurs de tous les faits sont par contre recalculées en fonction du changement.

Une autre application intéressante de cette fonctionnalité peut être la recherche du nombre minimum d'hypothèses nécessaires pour un but donné. Ainsi dans les faits suivants :

— *ABCD est un parallélogramme,*
— *les vecteurs AB et DC sont égaux,*
— *I est le milieu de AB,*
— *C, D et I sont alignés,*
— *I est le milieu de CD , etc.*

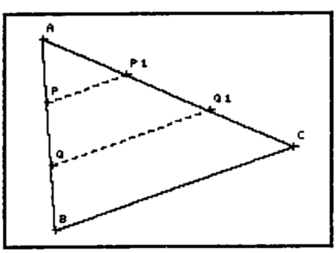
quelles sont les hypothèses suffisantes pour que l'ensemble des faits soit prouvé ? On trouvera plusieurs solutions : {1}, {2}, {3,5}, etc.

IV.6.5. Pour des exercices ouverts

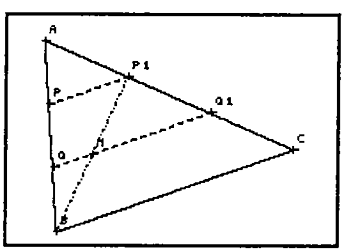
On ne manquera pas de remarquer que le but de l'exercice n'est pas nécessairement fourni dès le début du raisonnement. On peut très bien "explorer" une figure sans but précis, à seule fin de relever un maximum de résultats "intéressants". Cette démarche est peu usuelle en France. On la pratique davantage outre Atlantique [Cha90].

IV.6.6. Possibilité de rajouter des points

Il est souvent nécessaire de compléter une figure à l'aide de points supplémentaires. Ceci revient à définir de nouvelles hypothèses. Chypre se prête très bien à ce jeu. En combinant cette possibilité avec l'usage de feuilles, on peut ainsi fournir des indications à l'élève.



feuille 1



feuille 2

figure 10

Pour résoudre un exercice correspondant à la figure apparaissant dans la feuille 1 (fig. 10), figure préparée par un enseignant, l'élève trouvera une indication sur la feuille 2 (il lui suffira d'appuyer sur F2). Le segment et le point supplémentaires devront être traduits dans le langage de Chypre :

— *hypothèse : B, P1, M sont alignés*

— *hypothèse : Q,Q1,M sont alignés.*

V — Expérimentation et bilan

V.1. *Des enseignants*

Pour l'instant Chypre a été testé principalement par des enseignants et très peu par de jeunes élèves(8).

Les enseignants remarquent l'adéquation de Chypre avec leur pratique du raisonnement et soulignent l'aspect non directif. Les exercices proposés (voir annexe), bien que simples, nécessitent une certaine réflexion pour être menés à bien. En particulier, il convient de bien analyser le problème pour ne pas oublier certains faits.

Les oublis les plus fréquents concernent :

— des hypothèses d'alignement de points. On a tendance à déduire trop de choses de la figure et des faits aussi simples que l'alignement de 3 points lus sur une figure (et dans l'énoncé) ne sont pas traduits en faits pour Chypre (en particulier, des énoncés définissant des intersections de droites doivent se traduire en terme d'alignement : "AB et CD se coupent en I" se traduit par "A, B, I alignés et C, D, I alignés").

— des faits intermédiaires. L'utilisateur est alors obligé de préciser davantage son raisonnement. Cela peut correspondre au schéma : *"ce fait devrait être prouvé à partir de tel autre fait. Il ne l'est pas. Cherchons ce qui manque"*. On décompose ainsi le problème en sous-problèmes.

(8) Chypre a été terminé en octobre 91 et les principaux tests ont surtout été menés pour vérifier son bon fonctionnement.

Le raisonnement tel qu'on le pratique avec Chypre peut se comparer à une enquête policière. On recherche des indices en relevant les plus frappants ou en appliquant certaines heuristiques. On cherche ensuite à relier certains de ces indices entre eux afin de réunir les preuves qui permettront d'arrêter le coupable que l'on soupçonnait.

On peut craindre que des élèves réussissent à "prouver" un but par l'intermédiaire de Chypre en déclarant des faits au hasard. Certains exercices assez simples se prêtent bien à ce type d'exploration. Il conviendrait dans ce cas de les obliger à rédiger une démonstration et ainsi de les contraindre à revoir le raisonnement qui a été bâclé.

V.2. *Des élèves*

Lors d'une première expérimentation en classe, nous avons commis l'erreur de proposer aux élèves (une classe de Seconde "faible") certains des exercices figurant en annexe sans préparation préalable. Très peu d'élèves sont arrivés au bout de leur travail sans une aide du professeur(9). Les élèves n'avaient pas bien compris la "règle du jeu" et il a fallu décomposer le problème par des questions intermédiaires peut-être un peu plus générales que dans un énoncé classique (par exemple : quels sont les parallélogrammes qui apparaissent dans la figure ? peut-on prouver que A est le milieu de [BC] en utilisant une égalité de vecteurs ?).

Or l'un des buts du logiciel est d'amener les élèves à explorer la figure sans leur imposer une démarche prédéfinie.

Des séances de TP plus progressives se sont avérées nécessaires et nous poursuivons en 92-93 l'expérimentation dans ce sens. L'exemple suivant correspond à une séance fictive et a été extrapolé à partir des quelques observations qui ont pu être faites.

Exercice 1.

ABCD et CDEF sont des parallélogrammes.

Faire une figure

Remarque : la construction d'une figure à l'aide du logiciel ne pose pas trop de problèmes.

Déclarer les hypothèses

Quelle conjecture peut-on formuler concernant le quadrilatère ABFE ? Déclarer cette conjecture.

Quel(s) fait(s) intermédiaires nous permettent de prouver cette conjecture ? Déclarer ce(s) fait(s)

Exercice 2.

ABCD et CDEF sont des parallélogrammes. Les points A et F sont confondus.

Déplacer le point F sur la figure de l'exercice précédent.

Exercice 3.

ABCD et CDEA sont des parallélogrammes.

Faire une figure et déclarer les hypothèses.

Quelle conjecture peut-on faire concernant B, A et E ?
Déclarer cette conjecture.

Quels faits intermédiaires nous permettent de prouver cette conjecture ? Déclarer ces faits.

(9) Quelques exercices ont quand même été assez facilement "résolus" (comme l'exercice 1 figurant en annexe)

La construction soignée d'une figure et sa manipulation aident énormément à la compréhension de celle-ci. Le but de l'exercice 2 est d'amener l'élève à comprendre l'analogie entre l'exercice 3 et l'exercice 1.

Les élèves doivent travailler en binôme afin de favoriser une discussion constructive. Ils auront à leur disposition la liste des théorèmes connus du système. Les théorèmes doivent être présentés sous une forme "heuristique" privilégiant la recherche de configurations de base :

Pour montrer que I est le milieu de [AB] chercher un parallélogramme AMBN et vérifier que C est le milieu de [MN].

Il peut être intéressant de proposer un autre type d'activité : l'extraction puis la rédaction de la démonstration à partir du réseau. On utilisera pour ce faire la sortie imprimante du réseau déductif tel celui présenté page 11.

V.3. *Perspectives*

Chypre contient actuellement un nombre limité de théorèmes. Il conviendra de permettre la création dynamique de nouveaux types et de nouvelles règles. L'utilisateur aura également la possibilité de créer des lemmes en désignant simplement des faits du réseau en tant que prémisses et un autre fait en tant que conclusion. Le lemme ainsi créé pourra être utilisé dans le même exercice ou être sauvegardé pour une utilisation ultérieure. On permettra ainsi certains raccourcis et on évitera des répétitions inutiles.

Un exercice ne peut être considéré comme acquis que si l'élève sait le (ré)expliquer. Une démonstration n'est pas une explication. Il faudra donc offrir à l'élève la possibilité d'expliquer son raisonnement, la machine se chargeant de valider ou non cette explication. Inversement, un élève pourra demander au système des explications sur son propre raisonnement (celui de l'élève lui-même). La machine devra également proposer une aide à l'élève sans pour autant lui fournir la solution (nous avons vu les inconvénients des aides trop dirigistes). Nous entrons ici dans le domaine de la connaissance sur la connaissance (méta-connaissance).

ANNEXE 1

Les théorèmes et les implicites

Parallélogramme

Implicites

– Si ABCD est un parallélogramme, les vecteurs AB et DC d'une part et les vecteurs AD et BC d'autre part sont égaux.

Théorèmes

ABCD est un parallélogramme

– si ses diagonales se coupent en leur milieu

– si les vecteurs AD et BC sont égaux (ou AB et DC)

– si les côtés opposés sont parallèles

Vecteurs égaux

Implicites

– Si les vecteurs AB et CD sont égaux, (AB) et (CD) sont parallèles

Théorèmes

Les vecteurs AB et CD sont égaux si AB est égal à XY et XY est égal à CD

Parallèles

Implicites Pas d'implicites

Théorèmes

(AB) est parallèle à (CD)

– si A,B,X,Y sont alignés, et C,D,Z,T sont alignés , et si (XY) est parallèle à (ZT)

– si AB est parallèle à (XY), (CD) est parallèle à (ZT) et si X,Y,Z,T sont alignés

(De plus les points A,B,X,Y d'une part, C,D,Z,T d'autre part ne doivent pas être alignés, afin de ne pas faire double emploi avec le théorème précédent)

Milieu

Implicites

– Si C est le milieu de [AB] alors A, B et C sont alignés

– Si C est le milieu de [AB] alors le vecteur AC est égal au vecteur CB

Théorèmes

C est le milieu de [AB]

– s'il existe un parallélogramme AXBY tel que C soit sur chacune de ses diagonales

– s'il existe un parallélogramme AXBY tel que C soit le milieu de XY

– si le vecteur AC est égal au vecteur CB

points alignés

Implicites

– Si trois points sont alignés, ajouter à chaque droite contenant deux de ces points le troisième

– Créer une droite contenant ces trois points

Théorèmes

A, B et C sont alignés

– si AB est parallèle à AC

– si A, B et C sont sur une même droite

Triangle des milieux : A, B, C, I, J

Implicites

– I et J sont les milieux de [AB] et [AC] respectivement

– (IJ) est parallèle à (BC)

Théorèmes

On a une configuration du triangle des milieux :

– si I est le milieu de [AB] (resp. J celui de [AC]), si A, C et J (resp. A, B et I) sont alignés et si (IJ) est parallèle à (BC)

– si I est le milieu de [AB] et J le milieu de [AC]

ANNEXE 2

Quelques exercices

Ces exercices nous ont servi à tester la consistance de Chypre. Ils peuvent être proposés tels que à des élèves de lycée ou à des enseignants en stage de formation.

1) On donne un triangle ABC.

B1 et C1 sont les milieux respectifs des côtés AC et AB.

Construire I et J tels que C1 soit le milieu de CJ et B1 le milieu de BI.

Montrer que A est le milieu de IJ.

2) A, B, C et D sont quatre points tels que BD // AC. I est le milieu de AB. C, I et D sont alignés.

Prouver que ADBC est un parallélogramme et que I est le milieu de CD.

3) ABED et BCFE sont des parallélogrammes. B est le milieu de AC. I et J sont respectivement les milieux de BE et BC.

Montrer que BD // IJ.

Quels autres faits peut-on trouver ?

4) ABC est un triangle. I est le milieu de AB, J celui de AC, K celui de BC.

CI et BJ se coupent en G.

Montrer que A, G et K sont alignés.

4 bis) ABC est un triangle. I est le milieu de AB, J celui de AC.

CI et BJ se coupent en G. La droite AG coupe BC en K.

Montrer que K est le milieu de BC.

5) Dans un triangle ABC, les points A1, B1, C1 sont respectivement sur les côtés BC, CA et AB.

B1C1 // BC, C1A1 // CA et A1B1 //AB.

Montrer que A1, B1 et C1 sont les milieux de BC, CA et AB.

(remarque : La construction exacte de la figure n'est possible que si l'on a résolu l'exercice. On construira donc une figure approximative. Cet exercice illustre la possibilité de CHyPre de travailler avec des figures fausses).

6) I et J sont les milieux respectifs de AB et AC. K est le milieu de AI et L celui de AJ.

Les droites CI et BJ se coupent en H, IL et KJ se coupent en G.

On veut montrer que A, G et H sont alignés.

Modifier les hypothèses pour obtenir un problème équivalent résoluble.

7) On donne un triangle ABC et D sur la droite BC. I, J et K sont les milieux respectifs de AB, AC et AD.

Montrer que I, J et K sont alignés.

8) ABCD est un quadrilatère quelconque. I, J, K et L sont les milieux de ses côtés.

Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?

9) ABC est un triangle.

P et Q sont sur le segment AB tels que AP = PQ = QB.

P1 et Q1 sont sur AC tels que AP1 = P1Q1 = Q1C.

Montrer que PP1 // QQ1 // BC.

(remarque : Comme dans l'exercice 4, il faudra définir un nouveau point pour résoudre l'exercice. La figure complète se lit, après appel de l'exercice, sur la feuille 2.)

10) Les diagonales d'un parallélogramme ABCD se coupent en I.

M et N sont les milieux des côtés AD et BC.

Montrer que MN est parallèle à AB et que I est le milieu de MN.

Bibliographie

[And85] ANDERSON J.R. - BOYLE, C.F. - YOST, G. The geometry tutor. In Proceedings of the International Joint Conference on Artificial Intelligence-85. Los Angeles, 1985

[Ant88] ANTIBI, A. Etude sur l'enseignement des méthodes de démonstration. Enseignement de la notion de limite : réflexions, propositions. Thèse d'Etat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1988

[Ber88] BERNAT, P. Images mentales en mathématiques. In Bulletin Inter-Irem Images et maths, Irem de Lyon (1988) pp. 51-59

[Ber90] BERNAT, P. Calques Géométriques, un logiciel pour aider à la compréhension des figures de géométrie. In Bulletin EPI 58 (1990) pp. 155-162

[Ber91] BERNAT, P. Calques Géométriques, un logiciel pour expérimenter, démontrer, conjecturer. In Actes de l'Université d'été Informatique et Enseignement de la Géométrie 1990, Irem de Toulouse

[Ber91] BERNAT, P. CHyPre : une modélisation d'un raisonnement non linéaire en géométrie. Rapport de DEA 1991, Centre de Recherches en Informatique de Nancy

[Cha90] CHAZAN, D. Student's Microcomputer Exploration in Geometry. In Mathematics Teacher (1990) pp. 628-635

[Chou90] CHOURAQUI, E. - INGHILTERRA, C. Le raisonnement analogique et l'apprentissage symbolique en géométrie : le cas du tutoriel ARCHIMEDE. In Université d'été Intelligence Artificielle et enseignement de la géométrie, Irem de Toulouse (1990) pp. 73-84

[Cup90] CUPPENS, R. Intelligence Artificielle et Enseignement de la géométrie. In Repères-Irem n°4, Topiques Editions (1991) pp. 53-62

[Egr88] EGRET,M. A - GUIN, D. - KUNTZ, G. - METIVIER, G - VOGEL, N. Réflexions sur l'apprentissage de la démonstration en géométrie de 4e autour d'un logiciel. In L'Ouvert 52, Irem de Strasbourg pp. 32-40

[Gio90] GIORGIUTTI, I - GRAS, R. Le micro-ordinateur outil interactif de révélation, d'analyse et d'apprentissage en géométrie. In Université d'été, Irem de Toulouse (1990) pp.151-168

[Gra88] GRAS, R. Aide logicielle aux problèmes de démonstration géométrique dans l'enseignement secondaire. In Petit X 17, Irem de Grenoble (1988) pp. 65-83

[Gui87] GUIN, D. - ROUSSELOT, F. Aide à la recherche d'une démonstration (Géométrie de 4e). In Université d'Eté Intelligence Artificielle et enseignement des mathématiques, Irem de Toulouse (1987) pp 73-82

[Gui91] GUIN, D. - Groupe I.A. Modélisation de la démonstration géométrique dans Geometry Tutor, Annales des Didactique et de Sciences Cognitives, vol 4, Irem de Strasbourg 1991

[Hou90] HOUDEBINE, J. Démontrer ou ne pas démontrer. In Repères-Irem n°1, Topiques éditions (1990) pp. 5-27

[Koe90] KOEDINGER, K.R. - ANDERSON, J.R. Abstract Planning and Perceptual Chunks : Elements of Expertise in Geometry. In Cognitive Science 14 (1990) pp. 511-550

[Nic89] NICOLAS, P. Construction et vérification de figures géométriques dans le système MENTONIEZH, Thèse de l'Université de Rennes, 1989

[Pol54] POLYA, G. Mathematics and Plausible Reasoning, Princeton University Press, 1954

[Py 90] PY, D. Reconnaissance de plan pour l'aide à la démonstration dans un tuteur intelligent de la géométrie. Thèse de l'Université de Rennes, 1990

[Ren88] Irem de Rennes, FEULVARCH, G. - FONTAINE, M.D. - GIORGIUTTI, I. -JULO, J.- KERBOEUF, M.P. -MOULINET, B. - PISELLA, F. Aides à la résolution de problèmes, 1988

[Sol86] SOLOWAY, E. Learning to program = Learning to construct mechanisms and explanations, Communications of the ACM vol 29 (september 1986) 850-858 et bulletin de liaison n°1 de la commission Inter-Irem Math et IA p.98