
DES APPORTS DE LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES A L'ENSEIGNEMENT

Régine DOUADY
Irem de Paris VII

La classe est un lieu de vie où se nouent des relations complexes entre le maître et les élèves dont l'enjeu est la communication d'un certain savoir, ici mathématique. A ce propos, de nombreuses questions se posent.

Que veut dire faire des mathématiques, savoir des maths ? Comment en apprend-on ? y a-t-il plusieurs manières d'en apprendre ? Quelles sont les fonctions respectives du maître et de l'élève ? Quelles sont les contraintes auxquelles le maître est soumis et les espaces de liberté dont il dispose pour remplir correctement sa fonction ? Comment gérer ces espaces de liberté ? Quel type de relation élève-savoir le maître peut-il prévoir et favoriser ? Quel est le rôle du langage et en particulier de la nominalisation dans l'évolution de la relation élève-savoir ? Comment organiser et conduire l'enseignement d'un certain contenu mathématique dont les effets observés (ce que savent les élèves) soient aussi proches que possible des effets attendus ? Comment analyser et interpréter les éventuels décalages ? Au cours de la classe, les élèves ont l'occasion d'exprimer leur relation aux mathématiques de différentes manières : quelle signification donner à leurs erreurs, à leurs ques-

tions, à leurs propositions, à leurs silences... ? Comment le maître peut-il en tenir compte dans ses décisions ?

Dans la suite, quelques-unes de ces questions sont examinées.

La première partie est consacrée à des réflexions d'ordre épistémologique sur l'activité des mathématiciens, qui peuvent trouver écho dans le travail du maître et des élèves en classe. Cette activité nécessite des modalités d'expression écrite ou orale, imagée, graphique ou symbolique pour être rendue visible, pour être le support d'échanges, pour engendrer du nouveau communicable. Toutefois, le rôle du langage dans la production scientifique et en particulier celui de la *nomination* n'est pas étudié explicitement dans ce texte [C.Laborde 1982, G.Vergnaud 1990].

La deuxième partie est consacrée à différents statuts du savoir dans la relation enseignement/apprentissage, la troisième à la présentation d'un exemple, la quatrième et la cinquième à la description de la dialectique outil-objet et des jeux de cadres illustrée par des exemples de réalisations didactiques.

1. Activité du mathématicien

1.1 Outil et objet

Dans leurs recherches, les mathématiciens sont confrontés à des problèmes que personne n'a encore su résoudre. Une part importante de leur activité consiste à poser des questions, forger des conjectures et résoudre des problèmes. Pour ce faire, ils investissent, dans la situation particulière qu'ils étudient, leurs connaissances mathématiques. Certaines, institutionnelles et partagées par la communauté mathématique, sont appelées par l'énoncé même du problème (tel espace est-il connexe ? telle fonction est-elle continue ?). Nous disons que les mathématiciens mobilisent, dans la situation, des objets (espace topologique, connexité, fonction continue) auxquels le contexte apporte une signification précise. Le traitement de ces objets (par exemple, l'utilisation du théorème selon lequel l'image par une application continue d'un espace connexe est connexe) peut conférer à certains d'entre eux un statut d'outil. D'autres connaissances liées aux objets en jeu, aux questions posées et à la recherche de jalons intermédiaires relèvent plutôt de choix méthodologiques et de pratiques personnelles. Celles-ci intègrent maintenant de façon familière le dialogue avec les ordinateurs compte tenu de leur puissance de calcul (ce qui permet de renouer avantageusement avec la tradition des calculs gigantesques des siècles précédents) et de leur capacité à produire des images (ce qui enrichit le champ des problèmes et des conjectures). L'étude d'une question, laquelle peut prendre plusieurs années en relation ou en relais avec d'autres questions, amène les mathématiciens à réexaminer les conditions de vali-

dité d'un théorème, affaiblir des hypothèses et en évaluer les conséquences. Cela les amène aussi, et de façon tout à fait familière, à confronter et exploiter différents points de vue sur une question, à mettre en relation des problèmes différents, à interpréter un même problème dans des domaines différents... Au cours de leur travail, les mathématiciens tissent des réseaux de relations entre différents concepts d'un même cadre ou de cadres distincts. Les changements de cadres conduisent à des questionnements nouveaux, à des formulations nouvelles de questions anciennes. Ce faisant, ils créent des notions et des méthodes, nous disons des *outils*, qui répondent à leurs besoins du moment.

A titre d'exemple, intéressons nous un instant à l'élaboration des nombres complexes. Ils sont nés dans le contexte de la résolution des équations polynomiales du troisième degré, à une époque où étaient connus les nombres positifs et les négatifs. Le problème posé était le suivant : comment expliquer que pour résoudre certaines équations à coefficients numériques positifs ou négatifs ayant trois racines numériques positives ou négatives, on ait besoin de calculer avec des racines carrées de nombres négatifs. Quel sens donner à ces racines qui ne pouvaient être des nombres, puisque le carré d'un nombre positif ou négatif est positif ? Pendant un temps, des algorithmes de calcul portant sur ces racines, légitimés par la validité des résultats ont permis de traiter de telles équations. Cela se passait au seizième siècle. Il a fallu attendre la fin du dix-huitième siècle (Wessel 1798) et même le début du dix-neuvième avec les travaux de Gauss et plus tard de Cauchy pour que les nombres complexes soient mathématiquement construits et acquièrent un statut

d'objet. Nous allons expliquer ce que nous entendons par *objet*.

Les mathématiciens considèrent comme important et significatif dans leur travail d'évaluer la portée des outils qu'ils ont modifiés ou créés et de les transmettre à la communauté scientifique. Ce souci les conduit à chercher des formulations qui s'affranchissent le plus possible des caractéristiques particulières de la situation de production, des formulations qui facilitent la reprise, la modification, la transformation des nouveaux éléments, par d'autres chercheurs, dans d'autres contextes.

Les outils ainsi traités, relativement décontextualisés et dépersonnalisés, s'intègrent dès lors au corps des connaissances déjà constituées et peuvent en modifier l'architecture, telle l'exponentielle complexe dans ses rapports avec le calcul trigonométrique. Les nouvelles connaissances ont un statut d'*objet*.

Il arrive que des chercheurs créent directement des objets pour mettre de l'ordre dans les pensées, pour généraliser ou pour unifier des problèmes différents déjà résolus avec les moyens du (ou des) domaine(s) dont ils relèvent, telle l'algèbre linéaire, pour mieux organiser une branche des mathématiques ou pour les besoins de l'exposition.

Ainsi, nous disons qu'un concept est **outil** lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. *Un outil est engagé par quelqu'un, dans un contexte problématique, à un moment donné.*

Un même outil peut être *adapté* à plusieurs problèmes, plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème.

Un outil peut être *implicite* s'il correspond à un concept en cours d'élaboration, et cela peut durer plusieurs années. Il peut se manifester sous différentes formes : à travers des affirmations non justifiées ou des actions qui résultent de convictions intimes non formulées, à travers la mise en œuvre de techniques et de pratiques familières portant sur des éléments décrits mais non encore mathématiquement construits. C'est le cas des nombres complexes, mentionné plus haut, pendant un long moment.

Un outil peut être *explicite* s'il correspond à la mise en œuvre intentionnelle d'un objet pour résoudre un problème.

La *dimension outil* est constitutive du *sens d'un concept*. Dans la constitution du sens interviennent les relations développées dans le contexte avec d'autres concepts relevant du même domaine ou d'autres domaines.

Par **objet**, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir des mathématiciens, à un moment donné, reconnu socialement. L'objet est mathématiquement défini, indépendamment de ses usages. Le statut d'objet permet la capitalisation du savoir et donc l'extension du corps des connaissances. Il permet aussi le réinvestissement dans de nouveaux contextes éventuellement très éloignés du contexte d'origine.

Ainsi, un schéma classique de la production scientifique est "outil-objet -outil".

Un autre levier intervient dans la production scientifique, ce sont les *changements de cadres*. Nous allons expliquer ce que nous entendons par là.

1.2. Cadres et changement de cadres

Si l'on s'intéresse à l'évolution des mathématiques dans l'histoire passée, récente ou dans l'actualité, on constate qu'une part importante du travail des mathématiciens est consacrée à interpréter les problèmes qu'ils se proposent de résoudre, à changer de point de vue (par exemple, pour une équation différentielle, à adopter un point de vue qualitatif ou un point de vue algébrique), à les formuler autrement, à les transporter d'un cadre dans un autre, au moins partiellement, à confronter des problèmes posés dans des cadres différents mais dont la traduction dans un même cadre conduit à poser de nouvelles questions et suggère le recours à des outils autres que ceux initialement sollicités. Ainsi, les racines carrées de nombres négatifs qui ne pouvaient avoir de sens dans le cadre numérique, ont reçu un droit à l'existence par transfert dans le cadre géométrique (cf. le plan d'Argand et le plan de Gauss, lesquels font référence à des structures géométriques différentes).

Dans le paragraphe ci-dessus, le mot "cadre" a été pris au sens usuel qu'il a quand les mathématiciens, au cours de leurs échanges verbaux à propos d'une question, font référence au cadre algébrique, au cadre arithmétique, au cadre géométrique... pour préciser l'environnement dans lequel ils entendent situer leur réflexion et faire porter leur effort. Réflexion et effort se traduisent souvent par des changements de cadres.

Compte tenu de la puissance des changements de cadres dans la réflexion mathématique et dans l'avancée du savoir d'une part et de leur absence apparente en tant que tels dans les situations scolaires

d'enseignement et d'apprentissage, je me suis proposée de transporter cette pratique dans le champ de la didactique des mathématiques et de la constituer en élément théorique avec un double objectif : outil d'analyse des faits d'enseignement et d'apprentissage tels qu'on peut les observer, outil d'élaboration d'ingénierie didactique. Je donnerai des exemples dans un article ultérieur (Repères, n°8).

J'ai ainsi proposé, dans un premier temps, de préciser les notions de cadre, de changement de cadres et d'expliquer une partie de leur influence dans la production scientifique de la façon suivante : "un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outil, des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée. Par ailleurs la familiarité, l'expérience peuvent conduire à des conflits entre ce qu'on attend et ce qui se produit effectivement et par suite à renouveler les images ou à les faire évoluer. Le **changement de cadres** est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation. L'objectif est, pour le chercheur, de se forger des convictions débouchant sur des conjectures et de poser des jalons permettant d'en organiser des plans de démonstration. Un plan n'est pas toujours bon du

premier coup. Il arrive souvent que des contre-exemples, mettant en évidence des obstructions, amènent à déplacer les jalons, voire à rejeter la conjecture de départ. Quoi qu'il en soit, les traductions d'un cadre dans un autre aboutissent souvent à des résultats non connus, à des techniques nouvelles, à la création d'objets mathématiques nouveaux, en somme à l'enrichissement du cadre original et des cadres auxiliaires de travail." (1987 Douady)

En fait, la référence naïve aux images mentales est seulement l'indice que le chercheur fait partie de la définition du cadre et qu'un transfert en didactique de cette notion demande d'y inclure l'acteur : maître, élève ou chercheur. Cela conduit à envisager la notion de *cadre* selon au moins trois dimensions : une dimension mathématique, une dimension socio-culturelle, une dimension individuelle chacune indexée par le temps. On peut parler ainsi d'*états d'un cadre*, dans un environnement donné, pour quelqu'un, à un moment donné. Les trois dimensions concernent la description des états à un moment donné, ces états évoluant avec le temps.

On peut parler de la *dynamique* d'un cadre, de son évolution temporelle pour quelqu'un, et considérer comme état limite l'état mathématique du cadre dans l'édifice savant à un moment donné. Les échelles de temps dans l'évolution savante et dans l'évolution scolaire sont suffisamment différentes pour qu'on puisse considérer, en général, la référence savante comme stable pendant la durée d'une scolarité.

Dans sa *dimension mathématique*, un cadre est constitué d'objets d'un même domaine et de différents niveaux de com-

plexité, de relations entre les objets et leurs diverses formulations, lesquelles font intervenir des codes symboliques variés.

Par exemple, le cadre numérique est constitué des nombres, des opérations sur les nombres, de la relation d'ordre usuelle, mais aussi des couples de nombres, des fonctions numériques avec toutes les propriétés nécessaires au calcul... Bien d'autres objets font partie de ce cadre, mais il est difficile d'en faire une liste exhaustive, car cette liste a un caractère culturel, scolaire comme extra-scolaire. C'est là qu'intervient la *dimension socio-culturelle*.

Nous supposons que des interlocuteurs de cultures différentes mais comportant des éléments communs plongés dans un même milieu pourront communiquer grâce à leur bagage commun et enrichir les échanges de leurs diversités.

Prenons l'exemple du calcul mental dans le cadre numérique. A l'extérieur de l'école, les enfants d'une même classe peuvent être très diversement sollicités sur le sujet. A l'école, selon les classes, le calcul mental peut faire partie ou non des habitudes. Les pratiques peuvent différer selon les fonctions que lui attribue l'enseignant : fonction d'apprentissage par exemple par la mise en œuvre de propriétés des nombres, ordre et opérations comme outils implicites suivie, fonction de familiarisation par exemple par la mise en œuvre de répertoires dont on veut favoriser la mémorisation. Le cadre numérique n'a pas les mêmes caractéristiques pour tous, à un moment donné.

La *dimension individuelle* intervient dans le fait que la constitution d'une culture est certes le fruit d'une éducation socia-

le, et l'école y prend sa part. Mais c'est plutôt le fruit d'une interaction entre l'individu et l'environnement social. Il en résulte que dans une société, et nous englobons la société scolaire, les individus tout en disposant d'un large champ de références communes, se construisent des représentations personnelles des expériences vécues, y compris des expériences cognitives. Ceci conduit à un enrichissement diversifié du cadre dans toutes ses dimensions, à une diversité dans les modalités de mise en œuvre selon les individus.

Reprenons l'exemple du cadre numérique : les différents acteurs d'une classe de 6ème que sont le professeur et les élèves n'ont pas à disposition le même champ de nombres pour travailler. Pour chacun des élèves, ce champ évolue et le cadre numérique suit l'évolution de chacun. Cependant, professeur et élèves ont en commun un certain bagage qui leur permet l'échange. Toutefois, et pour le travail de l'enseignant et pour l'analyse didactique des faits observés, on a besoin de connaître les états du système classe et en particulier l'état des cadres de chacun à différents moments pour en étudier la dynamique et tenter quelques prévisions.

Par ailleurs, un problème riche et source d'interrogation pour celui qui cherche à le résoudre peut être formulé dans un cadre. Son étude va en général mobiliser d'autres cadres et mettre en relation des concepts relevant de cadres différents. La dimension individuelle du chercheur va intervenir dans son analyse des données, dans celle des questions et dans la problématique à mettre en œuvre pour le résoudre. Un chercheur peut être amené à changer de cadre en cours d'étude. Des chercheurs différents peuvent aborder un

même problème par des voies différentes, se situer dans des cadres différents. La communication peut provoquer des interactions entre cadres.

La notion de *changement de cadres* est ici importante. En classe, dans les moments où les élèves ont à chercher un problème, comme en recherche mathématique, c'est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème. L'intérêt réside dans une nouvelle approche des difficultés rencontrées et dans la mise en œuvre d'outils et de techniques qui n'avaient pas de raison d'être impliqués dans la première approche. Un changement de cadres peut être producteur de nouvelles connaissances chaque fois qu'il crée un déséquilibre entre ce que l'auteur attend et ce qui se produit effectivement et qu'il y a *recherche d'explication*. La dimension scientifique intervient à travers les objets mobilisés qui d'une part entretiennent des relations dans le problème et d'autre part relèvent de cadres différents.

Prenons pour exemple un problème qui mobilise deux inconnues liées par deux relations de la forme :

$$ax + by = u \quad \text{et} \quad cx + dy = v ,$$

où a, b, u, c, d, v sont des données, x et y les inconnues, la question étant de déterminer si possible x et y de façon que les deux relations soient satisfaites. Il existe dans le cadre algébrique des méthodes de résolution : substitution ou combinaison linéaire. Supposons que le problème soit proposé à une classe dont les élèves (ou une bonne partie d'entre eux) ne disposent pas de ces connaissances, mais en revanche aient une certaine familiarité sur le registre numérique avec quelques fonctions (linéaires, affines en particulier, mais pas

DES APPORTS DE LA DIDACTIQUE DES
MATHÉMATIQUES À L'ENSEIGNEMENT

seulement celles là), sachent en observer une représentation graphique en coordonnées cartésiennes obtenue soit point par point sur papier, soit à la calculatrice graphique. Alors, le transfert du problème dans le cadre des fonctions et le recours à l'outil graphique dans le cadre de la représentation permettent d'autres approches de la question posée – s'intéresser aux couples (x,y) pour lesquels $ax+by=u$ et $cx+dy=v$. L'une d'elles consiste à privilégier la fonction qui à x fait correspondre y tel que $ax+by=u$, reporter graphiquement ces couples sur un plan muni d'un repère orthonormé. Il n'est pas évident que cette fonction soit reconnue comme une fonction affine, mais elle peut l'être après une conjecture issue du traitement graphique et un contrôle en cherchant à exprimer algébriquement y en fonction de x . La recherche peut se poursuivre en calculant, pour chaque couple (x,y) repéré, la valeur de l'expression $cx+dy$ et en cernant la zone où cette valeur est proche de v , de plus en plus proche de v . Elle peut se poursuivre aussi en faisant une étude numérique et graphique de la fonction qui à x fait correspondre y tel que $cx+dy=v$ et d'une confrontation des deux graphiques : un point commun aux deux graphiques a pour coordonnées un couple (x,y) satisfaisant les deux relations. Les deux graphiques ont-ils un point commun ? plusieurs points communs ? aucun point commun ? Chacun des cas est-il réalisable ? de quoi cela dépend-il ? Géométriquement, à partir du moment où il est acquis que les représentations graphiques sont des droites, les cas sont faciles à décrire : les droites se coupent ou non, si elles sont parallèles, elles sont distinctes ou confondues. Quelle est la traduction algébrique de ces différents cas ? quel est le rôle des coefficients a, b, c, d ?

Etant donné un problème ou plus largement une situation posant problème, nous appelons *fenêtre conceptuelle* l'ensemble des objets, des outils et des relations mobilisés par quelqu'un, à un moment donné, pour analyser l'énoncé du problème ou de la situation, ou pour développer une stratégie de résolution, quels que soient les cadres dont ils relèvent. Les questions soulevées au cours de l'étude et les traitements apportés peuvent amener le chercheur (maître ou élève) à déplacer son intérêt sur d'autres relations, d'autres questions et faire évoluer la fenêtre. À chaque étape du questionnement et de l'étude, plusieurs cadres entrent en relation, mais pour chacun d'eux seulement une partie est concernée et cette partie évolue et change au cours du travail. Cette évolution reflète celle du rapport du chercheur au problème et aux stratégies de résolution. Ainsi, pour un même individu, les fenêtres peuvent changer rapidement. D'où l'intérêt pour préparer, observer et analyser les séquences, de pouvoir décrire dans la mesure du possible et désigner la partie active des cadres en jeu pour chaque élève ou groupe d'élèves à chacune des étapes que l'analyse aura retenue comme intéressante. Notons que, là encore, pour un élève, les échelles de temps concernant l'évolution d'un cadre mathématique lors de l'étude d'une situation problématique et tout au long de la scolarité sont suffisamment différentes pour qu'on puisse considérer, en général, la référence scolaire comme stable pendant la durée du travail sur le problème proposé.

Ainsi, en mathématiques, une fenêtre conceptuelle est un fragment de mathématiques attaché à un problème et à quelqu'un qui le cherche, ou attaché à une stratégie de résolution choisie et éventuel-

lement mise en œuvre par le chercheur, indexé par le temps. Un cadre est une partie d'une branche des mathématiques, indexée par le temps. Les deux notions de cadre et de fenêtre conceptuelle sont complémentaires.

2. Enseignement-apprentissage

2.1 statuts du savoir dans la relation maître-élèves

L'enseignant, pour sa part, reçoit en général sous forme de programme, une liste d'objets à enseigner, accompagnée de commentaires ou instructions sur des modalités de mise en œuvre. Mais il a la responsabilité de l'organisation précise de la présentation et de la communication aux élèves. Il doit faire des choix et prendre des décisions.

Nous faisons l'hypothèse que tout enseignant a des conceptions sur ce qu'est l'activité mathématique, sur la façon d'apprendre, sur la place des algorithmes dans l'apprentissage, sur la manière de tenir compte de la personnalité des élèves et de leur diversité dans une classe et que ces conceptions influencent en partie ses décisions. Or ces conceptions sont souvent implicites. Un enseignant qui est convaincu de la nécessité, pour les élèves, de connaître les définitions, les méthodes, les théorèmes utiles pour résoudre un certain problème avant de s'y attaquer, hésitera à proposer à ses élèves un problème quand ils ne connaissent pas les moyens adaptés pour le résoudre. S'il pense que l'apprentissage est avant tout une affaire personnelle, il hésitera à faire travailler les élèves en groupes. S'il doit faire travailler ses élèves par problèmes et en groupes, il aura besoin

d'arguments pour se convaincre que ses élèves y vont trouver un intérêt ; il aura besoin de critères pour en évaluer les effets.

Décrivons deux scénarios d'enseignement, tous deux pratiqués, où le statut du savoir dans la relation maître - élèves évolue de façon très différente.

Scénario 1

Le professeur présente des objets d'une manière adaptée au contenu concerné et à ses élèves, ce qui peut l'amener à faire des choix différents pour un même objet. Citons deux modalités extrêmes :

- exposer des définitions, exemples, théorèmes avec démonstrations. Le travail des élèves consiste alors à apprendre le cours et à l'appliquer dans des exercices et problèmes. Dans ce cas, *les élèves ont à leur charge de donner du sens aux objets présentés de façon à en faire des outils disponibles.*

- montrer des prototypes et développer des pratiques d'utilisation. Dans ce cas, les contraintes poussent le maître à privilégier dans le contenu à enseigner les parties algorithmisables et à limiter les domaines d'emploi. Les élèves acquièrent essentiellement des savoir-faire contextualisés peu exportables.

Scénario 2

Le professeur contextualise les objets à enseigner. Il choisit ou adapte ou construit un problème dont l'étude fait appel aux objets en question.

Dans ce cas, les élèves ont à traiter une situation. Les mathématiques qu'ils engagent ont statut d'outil sur le registre implicite ou explicite, selon le cas. Nous

illustrons ci-dessous ces deux registres par un exemple issu d'observations. Pour accroître leur savoir, il leur faudra ensuite avec le concours du professeur engager un processus de décontextualisation et de dépersonnalisation, travail dont l'accomplissement toutefois ne peut être que le fait de l'enseignant.

La trajectoire du statut du savoir est de façon schématique, du côté du professeur objet-outil-objet, du côté de l'élève outil-outil.

En fait, sur le long terme, les deux modalités ci dessus et d'autres intermédiaires peuvent intervenir selon les contenus, pour répondre aux contraintes notamment de temps, et aux réactions des élèves.

Outil implicite, outil explicite, pratique

Considérons le problème suivant :

Existe-t-il un carré d'aire 12cm^2 ?

– la réponse d'un élève de l'école élémentaire : *pour un carré de côté 3cm l'aire est 9cm^2 , pour un carré de côté 4cm l'aire est 16cm^2 , quand le côté passe de 3cm à 4cm il y a bien un moment où l'aire sera 12cm^2*

– la procédure d'approximation par encadrement de plus en plus fin du nombre 12 qui découle de la conviction exprimée.

Nous reconnaissons la relation entre dimension et aire d'un carré comme un *outil explicite*. Toutefois, la continuité de la fonction numérique $x \rightarrow x^2$ sur l'intervalle $[3,4]$, le théorème des valeurs intermédiaires sont nécessaires pour justifier la déclaration de l'élève. Or cet élève ne dispose pas de ces connaissances. Nous disons

que tous ces éléments interviennent comme *outils implicites*. Nous parlons d'*outils explicites* pour les notions qu'un élève met en œuvre intentionnellement, qu'il peut formuler et dont il peut justifier l'emploi.

Nous appelons *pratique* tout usage adapté que fait un élève d'outils exprimés explicitement ou en termes d'actions, reconnus au moins au sein de la classe : ce peut être le cas des représentations graphiques de fonctions attachées à un contexte (mesures de grandeurs ou déplacement d'un mobile ou consommation...), de certaines façons d'étudier leurs variations à des niveaux scolaires où les fonctions ne sont pas des objets d'enseignement.

2.2 Notre position épistémologique

L'expression *avoir des connaissances en mathématiques* revêt pour nous un double caractère opératoire et culturel :

C'est être capable de provoquer le fonctionnement de notions mathématiques dans différentes occasions :

– *pour résoudre des problèmes*, dans le cas où l'énoncé mentionne de s'en servir comme dans le cas où l'énoncé ne fait pas référence à ces notions et où pourtant elles sont nécessaires ou au moins commodes pour résoudre le problème. En particulier, c'est être capable d'en reconnaître la pertinence dans des situations différentes de celles qui ont servi à leur introduction, de les modifier et de les adapter à des situations nouvelles.

– *pour formuler des énoncés, des conjectures, pour poser des questions*. Il peut s'agir de poser des jalons dans la recherche d'une solution, de généraliser un énoncé

pour en saisir les articulations, la portée, les limites, de créer des relations entre situations ou domaines différents...

Cette compétence mathématique permet le travail de modélisation d'une situation en vue de résoudre les questions qui s'y posent, et contribue à construire le sens d'une notion. C'est le statut d'outil qui est principalement concerné.

Toutefois, les formes par lesquelles se manifeste cette compétence sont l'expression d'une certaine culture scientifique. C'est dire que le statut d'objet des mathématiques est tout autant concerné dans la construction des connaissances de quiconque, en particulier des élèves.

2.3 Comment apprend-on ?

Rappelons que, pour nous, un élève a des connaissances en mathématiques s'il est capable d'en provoquer le fonctionnement comme outils explicites dans des problèmes qu'il doit résoudre, qu'il y ait ou non des indicateurs dans la formulation, s'il est capable de les adapter lorsque les conditions habituelles d'emploi ne sont pas exactement satisfaites, pour interpréter les problèmes ou poser des questions à leur propos.

Pour obtenir que les élèves dans leur ensemble acquièrent des connaissances au sens ci-dessus, notre hypothèse est que l'enseignement doit intégrer dans son organisation des moments où *la classe simule une société de chercheurs en activité*. La question est de savoir quelle place tient l'*activité* mathématique dans un processus global d'apprentissage, en quoi consiste un tel processus, quelles sont les conditions d'une réelle activité mathématique pour les

élèves, compatibles avec les contraintes imposées au professeur, quels sont les obstacles à une telle activité.

Nous retenons que, dans les années 60-90 les choix pédagogiques se sont déplacés entre deux tendances extrêmes : utiliser la méthode "j'apprends, j'applique" où peu de responsabilité est confiée aux élèves, et leur proposer des activités en comptant essentiellement sur l'action pour être source d'apprentissage. Du point de vue mathématique, les problèmes mettent rarement en œuvre les caractères essentiels des notions, ceux qui en justifient scientifiquement l'emploi, et cela, même en pédagogie active ou en pédagogie par objectifs. Par exemple, il est rare qu'à l'école primaire les nombres décimaux servent à désigner de manière approchée, d'aussi près qu'on veut, une mesure qu'on ne sait pas désigner de manière exacte par un nombre. On peut objecter que ce point de vue n'a pas sa place à l'école primaire. Notre expérience montre au contraire que ce point de vue est constitutif du sens de la notion, y compris dans une perspective d'usage pratique et qu'il est possible d'organiser l'enseignement de façon que les élèves d'une classe dans leur ensemble intègrent la connaissance des nombres décimaux avec toute leur richesse d'outil et quelques propriétés institutionnalisées. Par ailleurs, les concepts sont en général présentés dans un cadre, et les applications demandées n'en sortent pas. On pratique la séparation des cadres. En remettant en cause ces choix implicites, c'est en fait toute la signification de l'apprentissage qui va se trouver modifiée.

Pour construire un enseignement différent, restituant leur sens aux outils que les élèves mettent en œuvre, tout en assurant une présentation institutionnelle aux objets correspondants, nous avons besoin de

caractériser une autre organisation de l'enseignement. Celle-ci est fondée sur trois points : *la dialectique outil-objet, la dialectique ancien-nouveau, les jeux de cadres*, lesquels s'enclenchent à partir de *problèmes* répondant à plusieurs conditions.

2.4 Conditions sur les problèmes

Enonçons des *conditions générales* sur des problèmes de nature à créer une situation d'apprentissage. Les exemples de problèmes présentés plus haut répondent à ces conditions.

L'énoncé comporte des données et des questions.

1) *Les élèves comprennent l'énoncé* c'est à dire que l'énoncé leur évoque un domaine familier, qu'ils savent reconnaître si une proposition de réponse a du sens par rapport au problème et qu'ils *peuvent* grâce à leurs connaissances et habitudes, *engager une procédure de résolution*. Ils peuvent *mobiliser du connu*.

2) *Les élèves ne peuvent pas résoudre complètement le problème*. Ils rencontrent *des limites débouchant sur une recherche*. Pour résoudre plus de questions, ils doivent modifier quelque chose. Ils peuvent adapter leurs méthodes pour étendre le domaine de validité. Mais ce n'est pas forcément économique du point de vue mathématique, et parfois ce n'est pas possible du tout.

Changement de cadres ou de point de vue pour élaborer de nouveaux moyens (outils, méthodes, pratiques...) Ils peuvent alors essayer de formuler autrement le problème de manière à rendre possible le recours à des notions auxquelles ils n'avaient pas pensé plus tôt et qui pourtant

sont adaptées à la nouvelle interprétation du problème. Le travail est alors, pour les élèves, de traduire dans la première formulation les informations nouvelles. Il revient ensuite au maître de leur donner un statut de nouvelle connaissance.

3) *Le problème peut se formuler dans au moins deux cadres différents* -géométrique et numérique par exemple, ou graphique ou physique... (pour rendre possible par changements de cadres le développement de conjectures et de convictions débouchant sur des notions nouvelles).

4) *Les connaissances visées par l'apprentissage* (contenu ou méthode) *sont des outils adaptés au problème* (ainsi, les élèves en essayant de résoudre le problème sont confrontés indirectement ou implicitement puis explicitement à ce que le maître veut qu'ils apprennent).

L'activité mathématique, telle qu'elle est envisagée ci-dessus, présente un intérêt multiple du point de vue de la relation enseignement-apprentissage.

— Il est possible aux élèves *d'aborder des questions complexes* sans que le professeur ne se sente obligé de les découper en toutes petites questions et donc de dépouiller le problème de ce qui lui donne du sens.

— Elle permet d'introduire une *dimension collective* dans l'apprentissage et par contre-coup dans la gestion de la classe.

Différentes organisations sont possibles et remplissent des fonctions différentes : travail en groupe, communication émetteur-récepteur, travail individuel, bilan collectif. Le travail en groupe est particulièrement adapté à l'étude de questions

assez complexes, où plusieurs possibilités d'attaque se présentent et où il faut choisir et peut-être combiner. La structure en groupes permet aux élèves de confronter différents points de vue et d'échanger des arguments, de faire interagir différents cadres (géométrique, algébrique, fonctions...) et exploiter ce qu'on sait dans l'un pour avancer dans la connaissance de l'autre, de mettre en relation des notions apprises séparément. L'avantage est, déjà au sein du groupe ou sinon en bilan collectif, de pouvoir contrôler les résultats en cherchant les cohérences, de s'interroger sur les conditions et limites de validité des notions utilisées. Ce peut être sur initiative des élèves ou incitation de l'enseignant.

2.5 Découpage du savoir

Nous proposons une organisation du savoir en *fenêtres conceptuelles* qui se recouvrent partiellement et à partir de problèmes adéquats une gestion dialectique des points de vue outil et objet d'un concept. Chaque fenêtre est complexe; elle est constituée par le savoir mobilisé dans une situation donnée. Elle comprend des aspects de plusieurs concepts, se situant éventuellement dans des cadres différents et dont le réseau des relations dans des problèmes contribue au sens de chacun. C'est le cas de la fenêtre constituée d'un certain ensemble de surfaces planes, de l'aire comme grandeur, et des nombres (cf. ci-dessous une proposition de processus d'apprentissage au niveau fin d'école primaire et début de collège). Une autre est constituée de nombres, de rectangles, de grandeurs (dimensions, périmètre et aire des rectangles), de variables et fonctions (pour étudier par exemple la variation de l'aire

de rectangles de périmètre fixé), de représentations graphiques (à la fois comme représentation symbolique de données et comme ensemble de points dont l'étude géométrique est source de conjectures). Les fenêtres sont délimitées par les problèmes posés et les stratégies attendues en relation avec les objectifs d'apprentissage visés. Il est clair que pour un même concept, par exemple "aire de surface plane", les choix didactiques et donc les fenêtres conceptuelles ne peuvent être les mêmes en début de collège ou en début d'université. La réunion de ces fenêtres recouvre au sens large (i.e déborde) le programme d'une période scolaire fixée; le dépassement intervient essentiellement lors de la mise en œuvre d'outils implicites ou pratiques (R. Douady 1984) qui contribuent à la constitution du sens des notions mathématiques choisies pour être enseignées.

3. Un exemple : les nombres décimaux

Les nombres servent principalement à évaluer et comparer des collections d'objets, à désigner des mesures, des rapports entre mesures et à calculer sur ces mesures. En calculant, il est possible de prévoir des résultats de mesures qu'on ne veut pas ou qu'on ne peut pas faire.

Les nombres servent aussi à désigner des fonctions et par suite à calculer sur les fonctions en calculant sur des nombres.

Ainsi, les nombres sont des objets mathématiques qui modélisent aussi bien des objets *externes* que des objets *internes* aux mathématiques.

3.1 Les nombres, modèle de grandeurs mesurables

Les nombres entiers sont définis pour rendre compte de propriétés communes à certaines collections d'objets. L'ordre et les opérations dans l'ensemble \mathbf{N} des entiers sont introduits pour rendre compte de manipulations sur les collections d'objets. En fait, \mathbf{N} est un modèle trop riche : en effet, des nombres tels que 10^{200} vraisemblablement plus grand que le nombre de particules de l'univers ne peuvent pas intervenir pour compter des objets physiques (mais peuvent être nécessaires pour compter des possibilités). Toutefois, on serait gêné pour raisonner si la somme ou le produit de deux nombres entiers n'était pas un entier. Les nombres entiers sont adaptés à la mesure de quantités *discrètes*.

Les nombres décimaux

Les grandeurs physiques comme les longueurs, aires, volumes, durées, vitesses, pressions... sont *continues* (ce terme est historique, la notion mathématique qui lui correspondrait aujourd'hui est celle de connexité). Elles ont toutes les mêmes propriétés : on peut additionner deux éléments de même nature. Deux tels éléments sont toujours comparables et il existe un élément dont l'addition au plus petit des deux fournit un élément égal au grand. De plus, entre deux éléments distincts, on peut toujours en trouver un troisième qui s'intercale entre les deux, on peut alors ainsi de suite en trouver une infinité. On dit que l'ordre est *dense*. En particulier, pour tout élément v non nul, on peut trouver des éléments distincts de v et plus petits.

A toute grandeur continue correspond le même modèle mathématique : l'ensemble \mathbf{R}^+ des nombres réels positifs.

Plus précisément, mesurer une grandeur, par exemple une longueur l , c'est choisir comme unité un élément de même nature non nul, ici une longueur u , et déterminer un nombre t tel que $l = tu$. Alors t est la mesure de l avec u pour unité. Il est clair que, quelle que soit l'unité u choisie, dès lors qu'elle est fixée, les nombres entiers vont permettre de mesurer certains éléments mais pas tous, en particulier pas les éléments plus petits que u . Il est nécessaire d'étendre l'ensemble des entiers si on veut mesurer tous les éléments avec la même unité.

L'ensemble \mathbf{R}^+ des nombres réels positifs répond à la question. Les nombres décimaux, sous-ensemble constitué des solutions des équations de la forme $10^n x = p$, où p et n sont des entiers, permettent d'approcher d'aussi près qu'on veut n'importe quel nombre réel. La somme, la différence, le produit de deux nombres décimaux sont décimaux. Les nombres rationnels, solutions des équations de la forme $q.x = p$, où p et q sont des entiers, ont aussi ces propriétés, notamment d'approcher d'aussi près qu'on veut n'importe quel nombre réel. De plus, le quotient de deux rationnels est rationnel, ce qui n'est pas toujours le cas du quotient de deux décimaux : $3/8$ est décimal mais $3/7$ ne l'est pas. Toutefois, on peut toujours approcher d'aussi près qu'on veut le quotient de deux décimaux, et compte tenu de notre système de numération en base dix, les calculs et comparaisons sont beaucoup plus faciles avec les nombres décimaux.

3.2 Les nombres, modèle des fonctions linéaires

Désigner une fonction linéaire

Pour connaître une fonction, il faut connaître les couples $(x, f(x))$ pour toutes les valeurs possibles de la variable x . Pour certaines fonctions on peut faire une grande économie. C'est le cas des fonctions linéaires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} où, grâce à la propriété $f(x) = x.f(1)$ pour tout x , la donnée d'un seul couple $(a, f(a))$ permet de connaître tous les autres. En particulier, si on connaît $(1, f(1))$ on connaît tous les autres. On peut ainsi désigner la fonction linéaire f par le nombre $f(1)$.

Calculer sur les fonctions linéaires

On vérifie que la somme $f + g$ et la composée "f suivi de g" de deux fonctions linéaires sont des fonctions linéaires. Si f et g sont désignées par $f(1)$ et $g(1)$, alors $f + g$ est désignée par la somme $f(1) + g(1)$ et "f suivi de g" par le produit $g(1)f(1)$. Ainsi le calcul numérique facilite énormément le traitement de fonctions par ailleurs très familières.

3.3 Rapport entre sens et algorithme

D'après l'analyse présentée plus haut, un enseignement du numérique qui prend en compte le sens des nombres doit accorder une place importante à des mesures de grandeurs et à l'étude de relations entre grandeurs et nombres. Au cours de ces études, les nombres en jeu ont un statut d'*outil*.

Il doit aussi réserver une place aux relations entre nombres et fonctions, aux relations entre calculs sur les fonctions linéaires et calculs sur les nombres. Les nombres pour cela ont besoin d'être dépouillés de leur signification "mesures" et recevoir un statut autonome d'*objet* du cadre numérique. Ce statut est aussi nécessaire pour raisonner dans ce cadre.

L'organisation de relais outil/objet conduit à des **algorithmes** de calculs qui peuvent se dérouler formellement, mais dont les effets peuvent aussi être contrôlés en revenant au sens des relations à l'origine de ces algorithmes.

Pendant très longtemps (disons première moitié du vingtième siècle), à l'école élémentaire, on a fait du *calcul* et non des mathématiques. On apprenait à calculer, c'est à dire à *mémoriser des techniques opératoires*. On apprenait à les utiliser pour résoudre des exercices et des problèmes bien étiquetés. Le contexte de base était celui de grandeurs mesurées avec des unités du système métrique.

On peut comprendre ces pratiques comme une réponse didactique à une certaine situation sociale. Les besoins culturels prioritaires en savoir-faire de base étaient suffisamment stables et limités pour pouvoir être décrits en terme de connaissances à posséder, tels des objets matériels. Cette conception permettait de doter tous les petits écoliers d'un bagage culturel commun, constitué d'un certain nombre de certitudes.

L'enseignement ne prenait pas en compte explicitement (mais le voulait-il, le pouvait-il ?) des éléments très importants pour développer une culture mathématique. Citons le travail de coordination d'éléments appris séparément, l'étude de relations entre différentes notions à travers lesquelles les unes et les autres prennent leur sens. Cela se rencontrait seulement à l'occasion de petits problèmes.

Des objectifs généraux tels que préparer les futurs citoyens à s'adapter à des situations imprévues, établir sous leur contrôle des interactions entre domaines différents et, en pleine responsabilité tirer parti des connaissances acquises dans un domaine pour en traiter un autre, contrôler l'information reçue, n'étaient pas proposés.

Très schématiquement, on peut dire que la préoccupation dominante des différents responsables de l'enseignement était : déterminer un savoir de base à transmettre, le découper et le façonner en unités élémentaires que les élèves peuvent mémoriser et que le maître peut évaluer. Pour cela, certaines conditions doivent autant que possible être respectées :

- chaque unité doit trouver son sens en elle-même ou se raccrocher facilement aux unités antérieures.

- chaque leçon doit apporter son lot de nouveauté repérable et donner lieu à un travail de la part de l'élève que le maître peut facilement contrôler.

Avec une telle conception de la relation enseignement-apprentissage, les parties algorithmisables du savoir sont privilégiées à tel point que le risque est grand de

voir les contenus enseignés se réduire à ces parties sous leur forme la plus aisément communicable et évaluable : des règles, au détriment de ce qui fait leur raison d'être : les concepts sous-jacents. On peut prévoir comme conséquence une tendance des élèves à appliquer ces règles sans contrôle sur le domaine de validité. Ceci peut créer des obstacles à leur reprise ou leur évolution par extension du domaine d'emploi par exemple. Nous illustrons ce point ci-dessous.

3.4 Des erreurs d'élèves dans le traitement des nombres décimaux

Les maîtres se heurtent régulièrement à des difficultés. Malgré leurs efforts, certaines erreurs persistent : des élèves affirment qu'entre 3,4 et 3,5 il n'y a pas de nombre mais que, entre 3,40 et 3,50 il y en a neuf, que $3,14 > 3,5$ parce que $14 > 5$, que la multiplication "ça grandit" (vrai pour les entiers) ou encore que multiplier par 0,3 c'est diviser par 3, que la moitié de 1,414 c'est 0,77... A travers toutes ces erreurs bien connues, on mesure dans les déclarations des élèves toute la prégnance des entiers, de leur familiarité avec le calcul sur des nombres entiers et du statut d'écriture des décimaux qui permet de rabattre le calcul les concernant sur celui des entiers.

Une interprétation

Les choix d'enseignement faits pour les décimaux entrent en conflit avec un enrichissement du cadre numérique qui conduit à un modèle mathématique des grandeurs continues, c'est-à-dire, un modèle qui décrit les différents éléments constituant une grandeur, les opérations qu'on fait sur

ces éléments et les propriétés associées, un modèle qui permette la prévision.

Un tel enrichissement passe par des interactions entre le cadre des grandeurs et celui des nombres. Il s'inscrit dans une conception de l'apprentissage centrée sur le sens des notions à enseigner et sur la mise en place d'algorithmes comme réponse économique à des problèmes dont on contrôle le sens.

3.5 Des domaines d'emploi des nombres décimaux

La question est de construire ou sélectionner des problèmes aussi simples que possibles mais où les phénomènes qui donnent leur signification aux nombres décimaux se produisent. Ici, nous prendrons en compte le phénomène d'approximation.

Mais les nombres décimaux interviennent dans plusieurs registres, social, culturel, scientifique, et y fonctionnent différemment.

Dans le contexte social (prix, poids, distances...), les nombres qui désignent les mesures ont un statut ambigu :

– d'une part, ce sont autant que possible des entiers, quitte à tronquer voire arrondir la mesure si l'entier le plus proche (ou la dizaine) est acceptable, ou sinon des couples d'entiers qui s'écrivent avec une virgule. On sait bien que, oralement, l'expression 1 kg 350 n'a pas le même sens que l'expression 1kg 35 alors que $1,350 = 1,35$,

– d'autre part, le fait de tronquer ou d'arrondir est un indice qu'il ne s'agit pas de nombres entiers avec leurs propriétés

d'entier, pair ou impair par exemple, mais de valeurs approchées dont on s'accorde la liberté de choisir la précision, c'est-à-dire plutôt de nombres réels.

C'est dans ce contexte qu'apparaissent en général à l'école primaire les nombres décimaux et leur rabattement sur des règles de calculs et de comparaison, elles non ambiguës. L'idée d'approximation n'est pas celle qui guide le travail.

Dans le contexte scientifique au contraire, les notions de précision, erreur, réduction de l'incertitude sont primordiales. Mais les nombres de la forme $p/2$, $p/4$, $p/8$, $p/2^n$... mesurant des partages successifs en 2 ont les mêmes qualités que les décimaux pour approcher n'importe quelle mesure. C'est pour être cohérent avec notre système de numération, lequel est en base dix, que nous nous servons des nombres de la forme $p/10$, $p/100$, $p/1000$... Cette cohérence permet de mener les calculs bien plus simplement.

Ainsi, tous les registres sont importants pour donner du sens aux nombres décimaux et en permettre le contrôle.

Nous avons rappelé plus haut des erreurs persistantes des élèves. Ces erreurs s'inscrivent dans une extension abusive des règles de calcul et comparaison valables sur les entiers, ou de lois de comportements des nombres qu'ils se sont forgés à l'usage.

L'introduction des décimaux pour résoudre des problèmes d'approximation amène les élèves à développer une conception différente. En particulier, des rapports fonctionnels s'établissent entre nombres entiers, fractions, fractions décimales, nombres décimaux, entre

ordre et opérations : addition comme multiplication.

L'extension du champ numérique se pose à l'occasion de problèmes de mesures où les entiers ne suffisent plus. Pour répondre à de tels problèmes et si on ne connaît pas d'autres nombres que les entiers, on est conduit à rendre la taille de l'unité de mesure choisie comme responsable de cette insuffisance. Une façon de s'en sortir est de changer l'unité contre une plus petite. Dans cette optique, selon la situation, les nouveaux choix adaptés sont les "demis", les "demis de demis"...plutôt que les dixièmes, centièmes, millièmes... qui trouvent leur justification dans notre système de numération et dans l'économie technique qu'ils apportent de ce fait.

Pour donner aux dixièmes, etc. du sens et aussi un statut de nombres, les élèves ont besoin d'apprendre à travailler, par étapes, dans des contextes variés, avec des fractions dont le sens est, dans un premier temps, lié au contexte. Ce contexte peut être géométrique, numérique, algébrique, graphique, vie courante... Le travail de mise en relation de ces différents domaines contribue à l'enrichissement de chacun d'eux et participe à la décontextualisation nécessaire pour que les mesures prennent statut de nombre.

Est-ce à dire que les élèves doivent tout savoir sur les fractions avant d'aborder l'étude particulière des fractions décimales ?

Comme outil contextualisé, une connaissance partielle chargée de sens peut être très pertinente et donner lieu à une étude plus développée des fractions décimales qui, dans une dialectique outil/objet, débouchera sur des nombres décimaux

aptes à répondre à toutes sortes de situations (cf. Nombres décimaux, brochure Irem, Paris 7).

4. Dialectique Outil-Objet

Etant donné un problème vérifiant les conditions exposées plus haut, nous proposons une organisation de l'enseignement en plusieurs phases. Nous lui avons donné le nom de *dialectique outil-objet*. Nous la décrivons ci-dessous en reprenant les conditions sur les problèmes et en l'illustrant d'exemples qui ont été réalisés dans plusieurs classes de l'école élémentaire ou de 6ème des collèges.

Ancien : première condition sur le problème, l'énoncé a du sens pour tous les élèves, ceux-ci peuvent mobiliser des objets connus de savoir comme outils explicites pour engager une procédure de résolution ou résoudre effectivement une partie du problème.

Exemple de problème posé à des élèves de fin d'école primaire et début du collège :
"vous travaillez en situation de communication. Chaque émetteur dessine un triangle et envoie un message (écrit sans dessin) pour que le récepteur dessine un triangle superposable".

Tous les élèves savent dessiner des triangles et mesurer des longueurs de segments. Ils savent tous contrôler par superposition en transparence si deux triangles coïncident. L'énoncé a du sens pour tous et ils peuvent démarrer.

Travailler en situation de communication, cela veut dire que chaque élève est

émetteur vers un autre et récepteur d'un autre. Lorsqu'un message n'est pas compris par le récepteur celui-ci pose des questions par écrit. L'enseignant est facteur.

Recherche : *deuxième condition*, compte tenu des connaissances des élèves, le problème a peu de chance d'être entièrement résolu soit parce que sa stratégie est très coûteuse (en nombre d'opération, en risque d'erreurs, en incertitude sur le résultat), soit parce qu'elle ne fonctionne plus. *L'objet d'enseignement est l'outil adapté* pour résoudre le problème.

troisième condition, le problème mobilise au moins deux cadres ou deux points de vue différents.

Ici, le travail de l'émetteur peut se situer dans un cadre non mathématique, celui du dessin, de la perception et de la reconnaissance de forme. Il s'agit de dessiner et décrire. La consigne n'exige rien de plus. Le travail du récepteur se situe dans le cadre géométrique. Sa tâche est de construire un triangle répondant à des conditions données. Selon le contenu des messages, la tâche sera plus ou moins difficile. L'émetteur peut avoir envoyé des informations suffisantes, par exemple les mesures des 3 côtés. Le récepteur peut les exploiter convenablement, ici en utilisant un compas. On attend peu cette construction. On attend plutôt un triangle obtenu en dessinant un premier segment puis, par approximation avec la règle graduée, en plaçant un point à distance imposée de 2 autres, sans avoir fait nécessairement la relation avec l'usage du compas, connu par ailleurs mais dans des circonstances différentes (dessins de frises ou autres). L'émetteur peut avoir envoyé des indications insuffisantes, par exemple la mesure d'un

côté (horizontal en général), ce qui fixe 2 sommets comme extrémités du segment dont on connaît la longueur, et une indication d'altitude pour le 3ème sommet. Le récepteur peut ne pas y arriver et demander des indications supplémentaires qui exigent de la part de l'émetteur une description de son triangle sur un autre registre que lors de son premier message, celui de la géométrie : par exemple que veut dire "en haut, à 3 cm tu marques un point". Le récepteur peut fournir un triangle respectant le message et cependant non superposable, puisqu'il manque une donnée. L'attention est alors portée sur ce qui différencie les 2 triangles et qui peut s'exprimer en termes de longueur ou d'angle. Le problème est porté dans le cadre géométrique. Le récepteur peut aussi en fournir un superposable si l'émetteur a dessiné un triangle isocèle et si le récepteur a placé le 3ème sommet sur la verticale passant par le milieu du côté convenablement dessiné. Du point de vue mathématique, la situation du binôme n'a pas beaucoup avancé. (Mais le binôme n'est pas seul. La confrontation avec d'autres travaux, la production de contrexemples permettront un débat qui pourra faire avancer le binôme. C'est l'objet de la phase suivante).

On reconnaît là une phase d'action. Elle peut donner lieu à la formulation de conjectures. Elle permet en tout cas de mettre en œuvre *implicitement des outils nouveaux*. Leur nouveauté réside soit dans l'extension ou le changement de domaine de validité, ici c'est le cas du compas pour sélectionner des points, du cercle comme ensemble de points, soit dans leur nature même, c'est le cas de la notion d'angle, de projection orthogonale d'un point sur une droite. Schématiquement, nous parlons dans cette étape de *nouveau implicite*.

Dans la théorie des situations de G.Brousseau, cette phase de recherche est une *situation a-didactique*. Ces situations qui sont les premières que G.Brousseau a étudiées et catégorisées en situations d'action, de formulation et de validation interviennent de façon significative dans la relation enseignement-apprentissage mais ne peuvent supporter à elles seules la responsabilité du processus d'apprentissage. C'est le constat de G.Brousseau qui après avoir donné la priorité à l'étude des situations quasi-isolées où le maître est en retrait, a réintroduit le maître en force dans les processus de dévolution et d'institutionnalisation (Brousseau 1987).

Explicitation-Institutionnalisation locale : confrontation des productions et justification des déclarations. La dépersonnalisation est engagée, mais non nécessairement la décontextualisation. En revanche, celle-ci peut être engagée lors de changement de cadre. En tout cas, certains éléments dans l'étape précédente ont joué un rôle important. Ils sont formulés soit en termes d'objets, soit en termes de pratiques avec leurs conditions d'emploi du moment. Dans l'exemple ci-dessus, il s'agit à partir de dessins particuliers d'examiner à quoi est dû qu'un dessin soit bien reproduit ou non et d'énoncer des conditions garantissant la bonne reproductibilité, quel que soit le dessin de départ : par exemple, la mesure des 3 côtés, ou la mesure d'un côté et la hauteur à laquelle se trouve le 3ème sommet par rapport à ce côté et la position sur ce côté du point à l'aplomb duquel il faut placer ce sommet. Sans cette dernière indication, on peut obtenir beaucoup de triangles respectant les autres indications en faisant varier les angles à la base. D'où une autre façon de sélectionner le triangle en indiquant : la mesure d'un côté et la mesu-

re d'un des angles s'appuyant sur ce côté et la hauteur à laquelle se trouve le 3ème sommet. C'est l'occasion d'instituer la pratique du rapporteur pour mesurer des angles. Les élèves de la classe dans leur ensemble se mettent d'accord sur ces points. Mais chacun n'est pas concerné de la même façon par ces différents points de vue. Il faut homogénéiser les savoirs et se mettre d'accord sur ce qui va être la connaissance de la classe et à laquelle tous pourront se référer. C'est une des fonctions de la phase qui suit.

Institutionnalisation : parmi les connaissances explicitées dans la phase précédente le maître en sélectionne certaines qu'il va décontextualiser et qu'il demande de retenir. Il s'agit de savoirs et savoir-faire de la culture mathématique, susceptibles de réemploi au sein de la classe ou à l'extérieur, avec les conventions et habitudes culturellement et socialement reconnues. Ce faisant, le maître leur donne un statut d'*objet*. Nous parlons de *nouveau explicite*, destiné à jouer plus tard le rôle d'ancien. Ici, l'usage du *compas* pour dessiner des segments de longueur imposée, la *signification* du cercle comme ensemble de points à une distance fixée d'un point marqué. Un *théorème* : un triangle est connu, à une isométrie près, dès qu'on connaît la mesure des 3 côtés. Ce peut être aussi la notion de hauteur d'un triangle issue d'un sommet, relative à un côté.

En donnant un statut d'objet à des connaissances qui jusque-là n'ont été que des outils, le maître constitue au sein de la classe une référence commune et permet à chacun de jalonner son savoir et par là-même d'en assurer la progression. Par ailleurs, la structuration personnelle, de première importance en mathématiques

pour qu'il y ait effectivement savoir, a été bien engagée dans le processus développé jusque-là. Toutefois, pour l'assurer, chaque élève a encore besoin de mettre à l'épreuve éventuellement dans des essais renouvelés, tout seul, les connaissances qu'il croit avoir acquises et faire le point sur ce qu'il sait. C'est la fonction des phases qui suivent.

Familiarisation : l'enseignant propose aux élèves divers exercices réclamant comme *outil explicite* ce qui a été institutionnalisé. Par exemple, dans la situation précédente, il fournit plusieurs triplets de nombres et demande de construire des triangles dont les côtés ont pour mesures les 3 nombres d'un triplet. Il fixe la longueur de deux côtés d'un triangle et demande de choisir librement la longueur du 3ème côté. La question est d'étudier la relation numérique entre la mesure de l'angle déterminé par les côtés de longueur fixée et la mesure de la hauteur relative à l'un de ces côtés. Les mesures sont effectives, obtenues à l'aide du rapporteur et du double décimètre.

Réinvestissement dans une situation nouvelle : le nouvel objet va prendre place comme "ancien" pour un nouveau cycle de la dialectique outil-objet. Continuons avec notre exemple :

a) on tire 3 nombres au hasard a, b, c compris entre 0 et 20. On voudrait construire un triangle dont les côtés aient pour mesures les trois nombres a, b, c . Est-ce toujours possible ? Si oui, proposer une construction du triangle. Sinon, proposer un triplet auquel il n'est pas possible d'associer un triangle.

b) (à proposer dans une 2ème étape, à des élèves du collège) Trouver une méthode

permettant de prévoir pour n'importe quel triplet de nombres si oui ou non on peut lui associer un triangle.

Illustrons la dialectique outil-objet à partir des problèmes suivants posés en préalable à la multiplication des nombres décimaux en fin d'école primaire – problèmes 1 et 2 – ou en début de collège pour tester la disponibilité de ces mêmes nombres comme outils-problème 3 :

Problème 1

L'objectif d'apprentissage est l'*extension à des nombres fractionnaires de la multiplication des entiers*, l'algorithme de multiplication de deux fractions intervenant comme moyen économique de réaliser l'opération.

On s'intéresse aux rectangles de périmètre P fixé, 34cm ou 36cm par exemple. Calculer l'aire de plusieurs d'entre eux. On ordonne les rectangles suivant l'aire de la plus petite à la plus grande. L'aire peut-elle prendre des valeurs aussi grandes qu'on veut ou bien y a-t-il une plus grande valeur possible ? Pour $P=34\text{cm}$, il y a un rectangle d'aire 70cm^2 , un d'aire 72cm^2 , y en a-t-il d'aire comprise entre 70cm^2 et 72cm^2 ?

Un tel problème dans lequel le paramètre P est une variable didactique pour l'enseignant, est intéressant pour les élèves qui, du point de vue numérique, ont une certaine connaissance des entiers (avec opérations et ordre) et aussi de quelques fractions ($1/2, 1/4, \dots$ les multiples entiers de ces fractions comme addition itérée, $1/2$ désignant le nombre a tel que $a+a=2 \times a=1$, de même $1/4$ désignant le nombre a tel que $4 \times a=1 \dots$), mais ne connaissent ni les déci-

maux ni la multiplication de deux fractions, savent calculer l'aire de rectangles qui ont des dimensions entières, qui ont une conception géométrique de l'aire de n'importe quel rectangle, mais qui ne savent pas comment déterminer numériquement l'aire dans les cas où les dimensions ne sont pas entières.

Problème 2

L'objectif d'apprentissage est l'introduction des nombres décimaux comme fractions décimales privilégiées, pour des commodités de calcul.

a) *Partition : coloriage d'un quadrillage gradué en 3 couleurs.*

Un point de coordonnées (a,b) représente un rectangle R de dimensions a cm et b cm. Le problème est de comparer la mesure A(R) de son aire à un nombre choisi k. Plus précisément, la règle est la suivante, pour k = 24 :

- si $A(R) < 24$ on colorie le point correspondant en bleu,*
- si $A(R) > 24$ on colorie en rouge,*
- si $A(R) = 24$ on colorie en noir.*

b) *Parmi les rectangles d'aire 24 cm² chercher un carré, ou à défaut des carrés d'aire proche, de plus en plus proche de 24 cm²*

Variante : chercher des rectangles d'aire 24 cm² de plus en plus proches d'un carré.

Ce problème est intéressant pour des élèves qui ont une connaissance partielle des fractions, en particulier qui ne connaissent pas les algorithmes généraux de calcul sur les fractions, mais qui savent exploiter les particularités de la numération s'ils ont le choix des nombres sur lesquels opérer.

Analyse a priori de la partie b) le problème a une formulation numérique : *étant donné un nombre n, trouver un nombre a tel que $a \times a = n$.* (Ci-dessus $n = 24$)

Mathématiquement, comme n est entier : ou a est entier, ou a n'est pas rationnel. Selon le choix de n, on sera dans l'un ou l'autre cas. Si n est grand, très grand, il peut être long de savoir dans quel cas on est. Il peut y avoir un travail important dans les entiers. Si n est plus petit que 100 par exemple, on sait très vite dans quel cas on se trouve. Si a n'est pas entier, la difficulté à répondre à la question est la même, quel que soit le choix de n non carré.

Pour la première formulation, admettons qu'on ait déterminé deux nombres entiers k et k+1 tels que $k^2 < n$ et $(k+1)^2 > n$. Il s'agit alors, de trouver une suite de nombres compris entre k et k+1 dont les carrés soient de plus en plus proches de n.

Pour la variante, il s'agit de sélectionner parmi les couples de nombres (a,b) tels que $a \times b = n$ une suite de couples dont la différence $b - a$, en supposant $b > a$, est de plus en plus petite.

Dans les deux formes, le point important est de déterminer un algorithme qui permette de sélectionner à partir d'un candidat à la réponse, un candidat "meilleur".

– Une telle recherche rend inévitable la mise en relation de l'ordre et des opérations entre nombres de toutes catégories, entiers et non entiers.

– Les notions de variable et fonction sont implicitement engagées.

– L'intérêt de la référence au contexte géométrique est de suggérer *a priori* que les carrés ou les rectangles qu'on cherche existent, en s'appuyant sur la conviction qu'entre deux longueurs différentes, il s'en intercale autant qu'on veut.

La possibilité de faire varier ces longueurs, et en conséquence les aires correspondantes, crée, chez les élèves, une pression pour générer de nouveaux nombres, de plus en plus nombreux dans un certain intervalle de l'axe gradué. Ces nombres viennent considérablement étendre le domaine numérique déjà connu (et qui peut différer d'un élève à l'autre). De plus, la stratégie développée est exportable à d'autres intervalles.

Notons qu'il s'agit ici de connaissances contextualisées mises en œuvre grâce à l'incitation géométrique et graphique et non d'algorithmes de calcul sur les fractions (pas de réduction au même dénominateur, pas de règles générales d'addition ou de multiplication). Le contrôle est assuré par les interprétations dans les différents cadres concernés.

Notons aussi que la représentation des nombres sur une demi-droite graduée (munie d'un point origine et d'une unité), l'invariance de la distance entre deux points par déplacement, le fait que le nombre attaché à un point désigne la distance de ce point à l'origine sont des éléments clés dans le développement de la connaissance des nombres.

Le problème 2 est l'occasion de sélectionner, parmi les *fractions*, celles qui sont *décimales* comme *outil adapté* pour calculer aisément. En effet, dans une situation d'approximation où l'on a une

certaine liberté pour choisir les nombres intermédiaires, d'autres choix sont possibles et même meilleurs. Les $p/2$, $p/4$, $p/8$... par exemple correspondent à une subdivision en deux de l'intervalle d'incertitude. Il faut bien que les élèves puissent désigner ces points de partage et calculer avec les nombres associés. C'est d'ailleurs la procédure la plus couramment observée. Mais les calculs deviennent vite inextricables. On peut prévoir, et on observe, que le recours aux $1/100$, aux $1/1000$... rend bien service pour faciliter les calculs tout en maintenant le sens de ces calculs au cours du processus d'approximation. Toutefois, facilité de calculs ne veut pas dire écriture commode. En effet, élever au carré un nombre de la forme $n + a/10 + b/100 + c/1000$ mène à une somme de termes allant jusqu'au $1/1000000$. Il est nécessaire de choisir une écriture commode. L'écriture à virgule est *l'écriture sociale et culturelle* de ces nombres.

Dans le problème énoncé plus haut, l'interaction de deux ou trois cadres permet de donner du sens aux solutions et de guider les recherches. Il s'agit ici du cadre géométrique, du cadre numérique, du cadre graphique où l'ordre des nombres est visualisé par la demi-droite graduée. *Le travail d'enrichissement du domaine numérique se fait en interaction avec l'enrichissement de la graduation pour résoudre des problèmes d'origine géométrique.*

Décrivons maintenant le fonctionnement de la dialectique outil-objet (D.O.O).

D.O.O. phase a : "Ancien"

Des concepts mathématiques sont mis en œuvre comme outils explicites pour résoudre au moins partiellement le problème.

DES APPORTS DE LA DIDACTIQUE DES
MATHÉMATIQUES À L'ENSEIGNEMENT

me. Ainsi, les élèves auxquels s'adresse le problème 1 ci-dessus peuvent exhiber des rectangles acceptables dont les dimensions sont entières, cela veut dire en désignant par a et b les mesures des côtés, que $2a+2b=34$, ou encore $a+b=17$, et pour chacun d'eux calculer l'aire puis ordonner les résultats. Dans le problème 2, ils peuvent piquer un point sur le quadrillage, lire les coordonnées a et b , calculer $a \times b$, comparer à 24 puis colorier le point.

D.O.O. phase b : "Recherche nouveau implicite"

Les élèves rencontrent des difficultés pour résoudre complètement le problème. Cela se produit si la stratégie primitive devient très coûteuse (en nombre d'opérations et donc en temps, en risque d'erreur et donc en incertitude sur le résultat, c'est le cas du coloriage du quadrillage s'il y a un très grand nombre de points, disons un millier de points ou plus). Cela se produit si la stratégie ne fonctionne plus et que de nouvelles questions se posent. C'est le cas de la recherche, parmi les rectangles de périmètre fixé, d'un rectangle répondant à une condition supplémentaire : aire comprise dans un intervalle fixé ou prenant une valeur fixée ou prenant une valeur maximale. En se bornant aux rectangles de dimensions entières, pour $P=34\text{cm}$ on trouve que le rectangle de dimensions $8\text{cm}, 9\text{cm}$ est celui qui a la plus grande aire. Mais pour $P=36\text{cm}$, on trouve que c'est le carré de côté 9cm . Le carré de côté $(8+1/2)\text{cm}$ aurait-il une aire plus grande que le rectangle $(8\text{cm}, 9\text{cm})$, comment comparer ces deux aires : géométriquement ? par le calcul ? il faudrait pour cela déterminer l'aire du carré, comment faire ?

Ces nouvelles questions conduisent les élèves à chercher des moyens nouveaux adaptés. Souvent des progrès efficaces proviennent d'un changement de cadres : en effet, cela permet de mettre en œuvre implicitement des outils qui sont nouveaux soit par l'extension du champ d'intervention, soit par leur nature même. Schématiquement, nous parlons dans cette étape de "nouveau implicite". Les changements de point de vue et les jeux de cadres (que nous décrivons plus loin) sont des moyens à la disposition de l'enseignant pour faire avancer la phase de recherche de façon fructueuse. Mais la recherche peut aussi avancer sous la seule responsabilité des élèves.

D.O.O. phase c : "Explicitation et institutionnalisation locale"

Certains éléments ont joué un rôle important dans la phase précédente. Il s'agit ici de convictions ayant fait l'objet de débat et donnant lieu à formulation argumentée : parmi les rectangles qui ont un périmètre fixé, le carré a la plus grande aire. Il s'agit là de "nouveau explicite" susceptible de réemploi et familiarisation.

Dans cette troisième phase, les travaux et propos des élèves, leur validité sont discutés collectivement. Toutefois, même si la collectivité "classe" a résolu le problème, tous n'ont pas réagi à titre individuel de la même manière vis à vis des outils mobilisés. Dans les situations de communication, le savoir diffuse diversement selon les élèves. Officialiser certaines connaissances qui, jusque là, n'ont été que des outils, leur donner un statut d'objet mathématique est une condition d'homogénéisation et de constitution d'un savoir de la classe, et pour chacun une façon de jalonner son

propre savoir et par là d'en assurer la progression. C'est le but de la phase suivante.

D.O.O. phase d : "Institutionnalisation-statut d'objet"

L'enseignant expose ce qui est nouveau et à retenir avec les conventions en usage. C'est le cas de l'écriture à virgule des nombres décimaux, des règles de calcul et de comparaison sur ces nombres, de leur propriété d'approcher avec une précision aussi grande qu'on le souhaite une mesure qu'on ne sait pas exprimer exactement avec les nombres connus. Ainsi, l'enseignant a la charge de donner un statut d'objet aux concepts impliqués comme outil. Ce nouveau à retenir est destiné à fonctionner ultérieurement en tant qu'ancien.

D.O.O. phase e : "Familiarisation-réinvestissement"

L'enseignant demande aux élèves de résoudre des exercices variés qui nécessitent les notions récemment institutionnalisées. Chemin faisant, les élèves développent des habitudes et savoirs-faire, ils intègrent le savoir social en le confrontant à leur savoir particulier. Ces exercices ne mettent en jeu que du connu. Mais les élèves les abordent avec des conceptions qui ont évolué et qui leur permettent d'envisager un champ plus large de problèmes.

Il reste à les mettre à l'épreuve de situations plus complexes où les élèves pourront tester, voire développer leur maîtrise des nouvelles acquisitions.

D.O.O. phase f = a : "Complexification de la tâche ou nouveau problème"

L'enseignant propose aux élèves de résoudre un problème plus complexe :

Problème 3

Chercher un rectangle tel que :

- le demi-périmètre soit égal à 41cm et l'aire 402cm²
- le demi-périmètre soit égal à 39cm et l'aire 402cm²

Les nombres décimaux vont intervenir comme outil technique. La difficulté est de formuler des questions plus précises pertinentes par rapport au problème et dont l'étude se traduira par des calculs sur des nombres décimaux choisis pour leur commodité de calcul. L'outil essentiel ici est la fonction $(a,b) \rightarrow a \times b$ où $a+b=41$, dont l'étude des variations, nécessairement naïve, permet quoi qu'il en soit de situer 402 parmi les valeurs du produit axb et de cerner de mieux en mieux le rectangle cherché. L'échec de cette procédure dans le cas $a+b=39$ incite à chercher des explications dans le cadre géométrique qui est le cadre d'origine du problème et à formuler le problème autrement : l'aire peut-elle être assez grande pour atteindre, voire dépasser 402cm². Les élèves ont déjà rencontré ce problème pour d'autres valeurs numériques. Il devient maintenant objet d'étude dans le cas général. La référence au carré de même périmètre que le rectangle cherché débouche sur une conjecture et une argumentation géométrique qui clôt la question. La connaissance de la classe s'est enrichie d'un théorème.

Dès lors, l'objet étudié est susceptible de prendre place comme "ancien" pour un nouveau cycle de la dialectique outil-objet.

Remarques

- 1) Parfois plus d'un cycle $(a, b, c, f=a)$ est nécessaire avant le déroulement complet d'un cycle de la D.O.O.

DES APPORTS DE LA DIDACTIQUE DES
MATHÉMATIQUES À L'ENSEIGNEMENT

2) Il se peut que des habitudes et pratiques familières attendent des années avant de donner lieu à des objets de savoir. C'est le cas des fonctions et des représentations graphiques.

3) L'efficacité réside essentiellement dans le déroulement du processus où plusieurs cycles s'enclenchent les uns les autres et impliquent au moins deux cadres ou deux points de vue. Ceci est possible à condition de respecter des seuils de deux types :

— Il existe une *masse critique* de connaissances anciennes et d'habitudes dans chacun des cadres concernés.

— Il existe un *seuil critique d'interrogation* au dessous duquel la réflexion ne s'enclenche pas.

4) De notre expérience, nous pouvons tirer l'hypothèse suivante : pourvu que "assez" de notions visées par l'apprentissage soient introduites par D.O.O., d'autres peuvent faire l'objet d'un apport direct par l'enseignant (par exemple, à un moment de la scolarité, une certaine pratique des représentations graphiques) ou par la lecture d'un manuel. La répartition tant qualitative que quantitative selon les deux modes est essentiellement de la responsabilité de l'enseignant qui connaît la classe et son histoire.

5. Jeux de cadres

La question se pose de savoir comment le maître va obtenir que dans leur ensemble les élèves progressent en phase de recherche sous le contrôle du savoir et non sous celui du maître (par exemple en posant au bon moment une suite de petites questions qu'il choisit et auxquelles les

élèves peuvent répondre sans maîtriser l'ensemble du processus). C'est à cette difficulté qu'essaient de répondre des jeux interactifs entre différents cadres ou dans un même cadre, entre différentes conceptions. Ainsi, dans la reproduction d'un triangle, l'interaction entre deux conceptions du cercle est productive : une ligne fermée qu'on dessine à l'aide d'un compas et l'ensemble des points tous à la même distance d'un point fixé.

Les *jeux de cadres* sont des changements de cadres provoqués à l'initiative de l'enseignant, à l'occasion de problèmes répondant aux conditions énoncées plus haut, pour faire avancer les phases de recherche et notamment pour élaborer une filiation de questions pertinentes par rapport au problème posé, lequel prend place dans une certaine situation d'apprentissage. Il s'agit du déroulement d'une procédure dans laquelle on peut distinguer trois phases :

1) *transfert et interprétation*

Les élèves sont confrontés à un problème formulé dans un certain cadre. Compte tenu de leurs connaissances, de leurs pratiques et habitudes, l'examen qu'ils font du problème les conduit à traduire tout ou partie dans un autre cadre et à y interpréter certaines questions. Ce faisant, ils mettent en œuvre des correspondances entre cadres différents (entre objets et entre relations).

Reprenons le problème : "chercher un rectangle de demi-périmètre 41cm et d'aire 402 cm^2 ". Ce problème est formulé dans le cadre géométrique. Les élèves cherchent une *surface plane* qui a une forme particulière qu'ils savent dessiner, dont le périmètre et l'aire ont des mesures imposées. Ils traduisent *numériquement* ce problème par la

recherche de deux nombres dont ils connaissent la somme, 41, et le produit 402. Des essais au hasard n'ont aucune chance d'aboutir même s'ils disposent d'une calculette. Il leur faut pouvoir organiser les réponses et se donner les moyens de bien choisir les essais ultérieurs. Pour cela, les élèves savent qu'ils ont intérêt à désigner les nombres cherchés et écrire les relations imposées par les données, c'est une pratique de la classe. Le problème est de trouver une manière de les exploiter de façon à être guidé vers la solution. A ce point du travail, ils doivent chercher non plus une solution exacte, mais des solutions approchées. Ils ont une certaine pratique des relations numériques et ils vont encore changer de cadre pour les étudier. La difficulté ici est qu'ils ont à traiter solidairement deux relations. Les élèves qui progressent sont ceux qui transforment encore le problème en rompant l'analogie de statut des deux relations $a+b=41$ et $a \times b=402$ et en privilégiant la relation additive. Ils obtiennent des couples (a,b) dont la somme $a+b$ est égale à 41 et dont ils espèrent que le produit voudra bien être proche de 402.

2) *Correspondances imparfaites*

Mais les correspondances entre les cadres sont imparfaites soit pour des raisons mathématiques, soit à cause des connaissances insuffisantes des élèves. La situation est source de déséquilibre. Par exemple, dans le problème ci-dessus, quand ils ont réussi à trouver pour le produit deux valeurs qui encadrent 402, ils sont convaincus qu'ils peuvent en choisissant bien les couples resserrer l'intervalle. Les essais tantôt heureux, tantôt malheureux pour encadrer 402 créent des déséquilibres entre leurs convictions et ce qu'ils savent faire. En fait, ils sont en train de manipuler implicitement des fonctions que leurs connaissances mathématiques ne permettent pas de contrôler.

3) *Amélioration des correspondances et progrès de la connaissance*

La communication entre cadres et en particulier la communication avec un cadre auxiliaire de représentation est un facteur de rééquilibrage. Ici leur pratique lorsqu'ils sont face à des problèmes qui comportent des variations de couples de nombres est de changer de cadre, de les représenter graphiquement sur un quadrillage gradué et d'interpréter l'ensemble des points ainsi marqués. Ainsi, pour mieux contrôler la prévision, ils vont représenter les couples (a,b) trouvés sur un quadrillage gradué et écrire à côté du point représentant un couple (a,b) la valeur du produit $a \times b$. Ces points sont alignés et les élèves qui ont choisi cette représentation ne doutent pas que, sur la droite, entre deux points marqués se trouvent d'autres points correspondant à des rectangles de même périmètre. Ils ont récolté une visualisation de la variation du produit en fonction du couple (a,b) et par là même, un moyen de sélectionner de nouveaux couples "meilleurs", ce qu'ils n'avaient pas pu faire de façon sûre sans cette représentation. Mais les élèves qui n'ont pas pris cette initiative et à qui l'enseignant a suggéré de le faire, ont obtenu les mêmes résultats. Toutefois le graphique a des limites de visibilité. En fait, l'amorce est suffisante pour permettre une conjecture : "quand on réduit l'écart entre a et b le produit augmente, quand on augmente l'écart, le produit diminue", d'où une méthode pour améliorer le choix des couples de nombres à sélectionner. Une interprétation géométrique de cet énoncé a permis à certains élèves d'en élaborer une preuve. Ainsi les interactions entre cadres permettent de faire progresser la connaissance dans chacun d'eux.

Pour le maître, les jeux de cadres qu'il peut organiser dépendent des fenêtres conceptuelles disponibles ou susceptibles de développement chez les élèves auxquels il s'adresse.

Conclusion

Les concepts didactiques que j'ai présentés ici ne constituent, bien évidemment, qu'une partie de l'état du champ de la didactique des mathématiques à l'heure actuelle. Ils ont été exposés ici avec une double intention. Il s'agit de mettre à la disposition critique de la communauté des chercheurs, des formateurs et des enseignants exercés à la réflexion didactique, des moyens pour contri-

buer à l'analyse des programmes, à celle de manuels scolaires, à celle de séquences d'enseignement observées (comment est découpé le savoir à enseigner ? qu'est ce qui est proposé dans sa dimension outil et alors quels sont les contextes concernés ? Comment propose-t-on de prendre de la distance par rapport au contexte d'introduction : transfert de contexte, passage par l'objet ? Quels sont les cadres concernés ? Propose-t-on des interactions entre cadres ?...) Il s'agit aussi de fournir des moyens de construire des ingénieries didactiques, c'est-à-dire des ensembles cohérents de séquences qui mettent en scène un objet d'enseignement à des fins d'apprentissage par les élèves avec modalités d'évaluation et de régulation des effets sur les élèves au cours du déroulement.

Bibliographie

Artigue M. (1990) : L'ingénierie didactique, *Recherches en didactique des Mathématiques*, vol.9.3, p.291-308.
Balacheff N. (1982) : Preuve et démonstration..., *Recherches en didactique des Mathématiques*, vol.3.3, p. 261-303.
Bessot A., Eberhard M. (1983) : Une approche didactique des problèmes de la mesure, *Recherches en didactique des Mathématiques*, vol.4.3, p. 293-324 .
Brousseau G.(1980,1981) : Problèmes de l'enseignement des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.1.1 p.11-57, vol.2.1 p.37-127.
Brousseau G.(1987) : Fondements de la didactique *Recherches en didactique des mathématiques* n° 7.2 La pensée sauvage Grenoble.
Chevallard Y.(1990) : *La transposition didactique* La pensée sauvage, Grenoble.
Douady R.(1984) : *Jeux de cadres et Dialectique outil-objet*, Thèse d'état, Université Paris 7.
Douady R, Perrin M.J (1986) : *Nombres décimaux*, brochure IREM Paris 7.

Douady R. (1987) : Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, n° 7.2. La pensée sauvage Grenoble.
Douady R., Perrin-Glorian M.J (1984-1985) Aires de surfaces planes 1ère partie et 2ème partie "Petit x" n° 6 et "Petit x" n° 8 Irem de Grenoble.
Douady R. et Perrin-Glorian M.J (1989) : Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics* 20.4
Laborde C. (1982) : *Langue naturelle et écriture symbolique*, Thèse d'état, Grenoble.
Perret-Clermont A.N (1979) : *La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale*, P. Lang.
Robert A. et Robinet J.(1989) : Les représentations métacognitives des enseignants, *Cahiers de DIDIREM* n° 1 et 4, Irem Prais 7.
Vergnaud G. (1991) : La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.10 / 2.3 p.133-169. La pensée sauvage Grenoble.