

---

## CARTOGRAPHIE ET MATHÉMATIQUES

---

Michel BOURGUET  
Irem de Lille

*L'article qui suit est une reprise d'un article publié par l'Irem de Lille, en 1989, dans Géométrie v, enrichie par la lecture d'un ouvrage allemand (de l'Est), consacré au même sujet.*

*Ce travail procède à la fois d'une recherche historique et d'une préoccupation pluridisciplinaire, et vise simultanément à éclaircir les origines de certaines questions et à fournir des exemples d'activités originales pour le lycée.*

*Je n'ai pas essayé (ni même imaginé) de m'appuyer sur ce travail pour bâtir un enseignement complet de la géométrie : ce serait incompatible avec les découpages actuels des programmes.*

*Cependant,*

*— Certaines activités, comme les transferts de cartes, sont réalisables dès le collège.*

*— J'ai donné à des classes de 1ère E et T.E. des problèmes issus de cette étude.*

*— J'ai donné presque toutes les questions d'analyse en colle de Math. Sup.*

*— Je suis prêt à bâtir un module pour une classe de terminale sur ce sujet, si, un jour, il y a des modules...*

*A chacun, donc, de s'inspirer de ce travail pour illustrer son cours de géométrie, ou pour créer des activités adaptées à un public donné.*

## I — Présentation du problème

Depuis que l'on sait que la Terre est ronde, les géographes demandent aux géomètres (mais quelle était la différence entre un géographe et un géomètre au temps d'Erasthostène ?), de leur fournir un bon moyen de représenter la terre, *sphérique*, sur une carte, *plane*.

Après de longs tâtonnements, que je ne raconte pas ici, il est apparu clairement qu'il était vain de chercher une bonne correspondance entre une sphère et un plan, mais on avait trouvé, entre temps, de nombreux procédés qui permettent de représenter de grands morceaux de sphère, avec une représentation, sinon exacte, du moins utilisable pour les activités humaines, à savoir : reconnaître son territoire, le distinguer de celui du voisin, voyager, ... et faire la guerre.

La plupart des procédés employés sont aujourd'hui dans le domaine public ; les bonnes cartes de la terre ne manquent pas et les photographies de satellite complètent le tableau.

Il me semble cependant bon de revenir sur les grandes solutions géométriques du problème de la cartographie, et ce pour plusieurs raisons :

— parce que les cartes, aujourd'hui très répandues, restent cependant pour beaucoup des objets mystérieux, un peu magiques ;

— parce que les professeurs de géographie de nos établissements scolaires sont parfois mal à l'aise pour lever ce mystère ;

— parce que la question de la cartographie a été un moteur important de la recherche en géométrie, de l'Antiquité jusqu'à notre siècle ;

— parce que les solutions présentées dans cet article fournissent des exemples de problèmes de géométrie dans l'espace non triviaux, et cependant abordables pour nos élèves.

## II — Un peu de vocabulaire et quelques conventions

La terre est assimilée à une sphère, et les cartes sont des plans, ou des morceaux de plans, éventuellement infinis. Certains procédés sont cependant applicables aux ellipsoïdes, en conservant les mêmes propriétés.

Dans un premier temps, on s'occupe des procédés de mise en relation de la sphère terrestre avec un plan tangent. Ensuite, il est nécessaire de réduire la carte, et éventuellement d'en retenir seulement une partie (voir l'annexe "Echelle d'une carte").

Tous les procédés de mise en correspondance sphère-plan sont appelés ici projections, usage conforme à la pratique des géographes, et distinct de la notion mathématique de projection. L'enseignant aura intérêt à être attentif à ce détail, qui peut être le point de départ d'une réflexion avec les élèves sur la spécialisation du vocabulaire mathématique, et son éloignement progressif du vocabulaire courant.

Certaines projections ont une définition géométrique élémentaire, d'autres font appel à une définition analytique, qui utilise alors des fonctions transcendentes ; ceci n'exclut pas qu'on en donne ensuite des constructions approchées par la géométrie élémentaire. Historiquement, d'ailleurs, ces procédés analytiques

ont d'abord été étudiés par le biais d'approximations finies.

Les projections seront étudiées en fonction de leurs propriétés pratiques. voici la grille d'étude qu'on appliquera à chaque projection :

— Etudier l'allure du réseau des méridiens et des parallèles sur la carte ; en effet, on apprécie beaucoup que ce réseau soit facile à tracer.

— Etudier la projection des grands cercles de la sphère. En effet, ces cercles sont les plus courts chemins (géodésiques) à la surface de la terre. Il est donc agréable de les trouver sans trop de peine sur les cartes.

— *Deux propriétés d'invariance :*

Une projection est dite *équivalente* si elle conserve les aires.

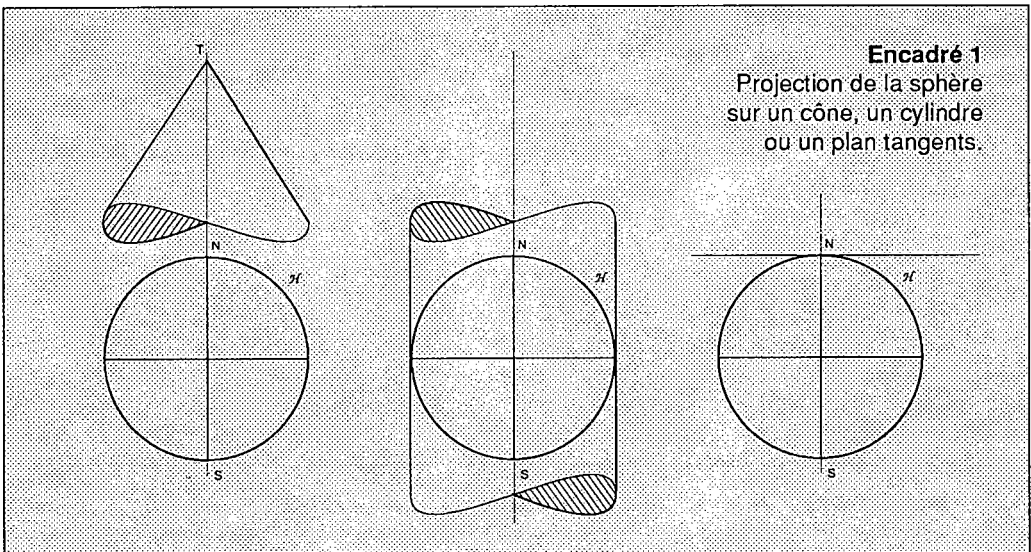
Une projection est dite *conforme* si elle conserve les angles locaux (angles des tangentes à deux courbes sécantes, au point d'intersection).

### III — Les procédés généraux des projections géométriques

On classe les projections géométriques en projections *polaires* (ou *azimutales*), *coniques* ou *cylindriques*, suivant qu'on projette la sphère sur un plan, un cône ou un cylindre tangents (le cône et le cylindre étant ensuite "fendu" et "déroulé").

Dans les trois cas de figure, l'ensemble sphère-support de projection possède un axe de révolution.

En se plaçant dans des plans qui contiennent cet axe, on ramène le problème à un problème plan : *mettre en correspondance un cercle et une droite tangente*. Ce type de restriction, lorsque l'axe de révolution de la figure est l'axe des pôles, garantit que méridiens et parallèles sont représentés par des droites et des cercles concentriques.



**Encadré 1**  
Projection de la sphère sur un cône, un cylindre ou un plan tangents.

**CARTOGRAPHIE ET  
MATHÉMATIQUES**

Quatre procédés sont alors retenus pour "projeter" un cercle sur une droite :

Soit un cercle de centre  $O$ ,  $\Delta$  une droite tangente au cercle en un point  $P$  ; et soit  $Q$  le point du cercle diamétralement opposé à  $P$ . A tout point  $M$  du cercle, on peut associer sur la droite  $\Delta$  :

- $M_1$  projection orthogonale de  $M$  sur  $\Delta$ ,
- $M_2$  défini par :  $PM = PM_2$ ,
- $M_3$  défini par :  $Q, M, M_3$  sont alignés,
- $M_4$  défini par :  $O, M, M_4$  sont alignés.

Ces définitions donnent lieu à une série de questions ou de démonstrations à faire, dans le cadre cercle-droite, puis sphère-plan :

— Préciser l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de chaque procédé.

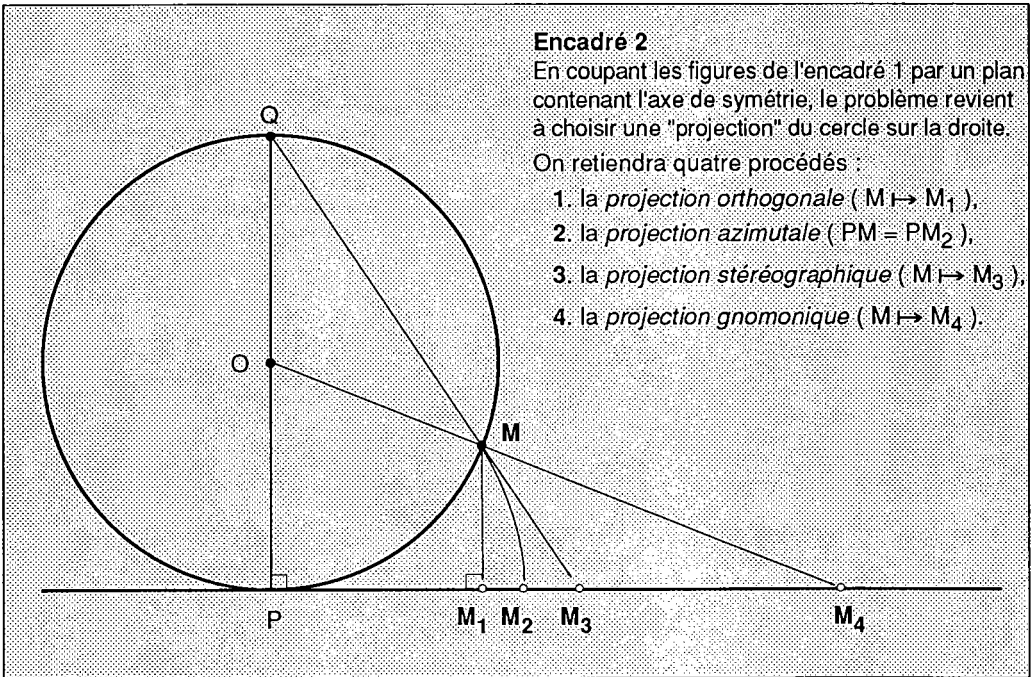
— Rechercher pour quelles restrictions de l'ensemble de départ le procédé est *bijectif* (une bonne carte doit découler d'un procédé *bijectif*!).

— Montrer que les points  $M_1, M_2, M_3, M_4$  se succèdent dans cet ordre à partir de  $P$  sur  $\Delta$ .

— Exprimer les longueurs  $PM_1, PM_2,$

$PM_3, PM_4$  en fonction de l'angle  $\widehat{POM}$  et du rayon du cercle, puis passer à une écriture analytique des projections.

— Calculer et comparer les dérivées de ces formules, pour étudier ensuite les propriétés analytiques des projections.



**Encadré 2**

En coupant les figures de l'encadré 1 par un plan contenant l'axe de symétrie, le problème revient à choisir une "projection" du cercle sur la droite.

On retiendra quatre procédés :

1. la *projection orthogonale* ( $M \mapsto M_1$ ),
2. la *projection azimutale* ( $PM = PM_2$ ),
3. la *projection stéréographique* ( $M \mapsto M_3$ ),
4. la *projection gnomonique* ( $M \mapsto M_4$ ).

## IV — Quelques projections géométriques classiques

### A. Projections polaires

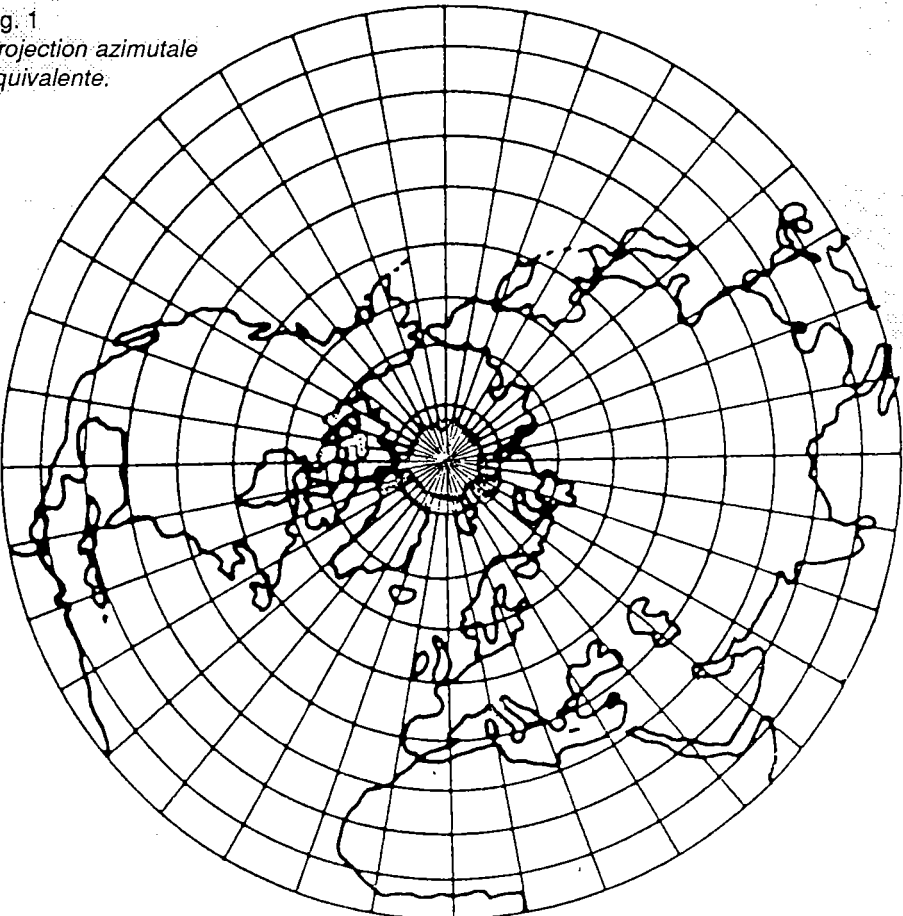
Dans ce cas, les quatre procédés décrits au §3 sont utilisés couramment en cartographie :

**Procédé n°1** : Projection orthogonale, qui donne d'excellentes représentations polaires,

et qui, couplée avec le même procédé cylindrique, permet la détermination des distances sur la sphère. Sur cette projection, tous les parallèles sont en vraie grandeur.

**Procédé n°2** : Cette projection est équivalente (c'est-à-dire qu'elle conserve les surfaces). Pratiquement elle est acceptable pour représenter un hémisphère (voir fig. 1).

Fig. 1  
Projection azimutale  
équivalente.



---

 CARTOGRAPHIE ET  
 MATHÉMATIQUES
 

---

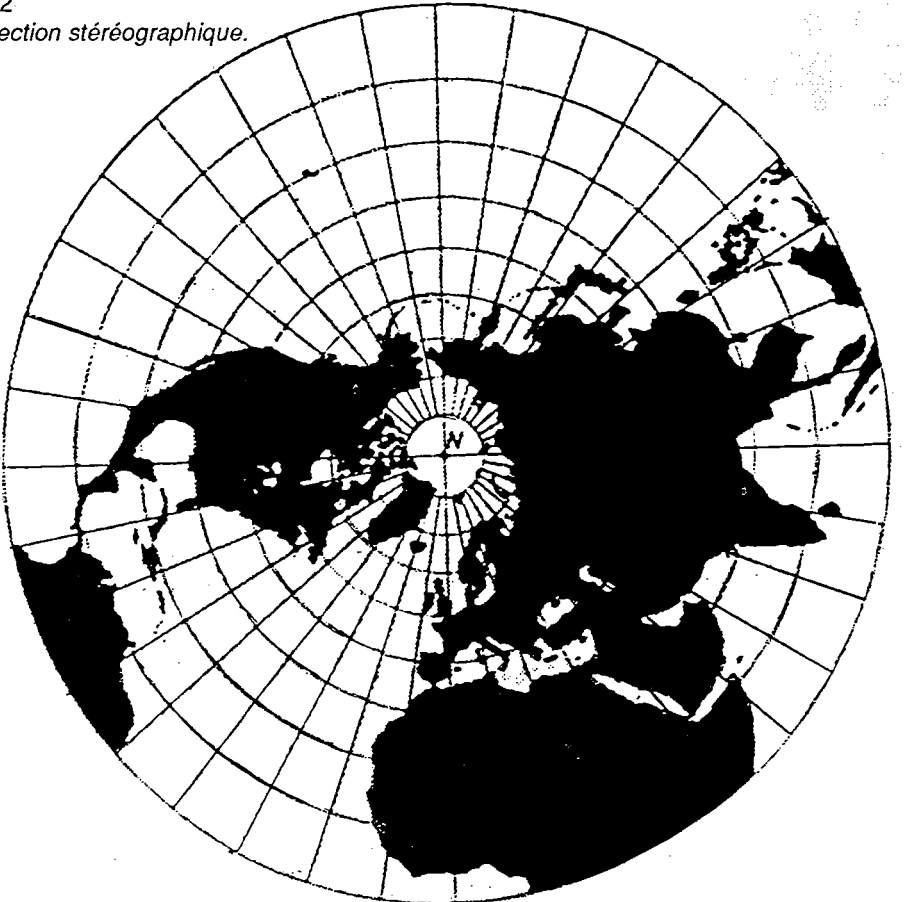
**Procédé n°3 :** C'est le grand classique des projections polaires, la projection stéréographique, restriction d'une inversion de l'espace (voir les figures 2 et 3). Cette transformation a deux propriétés essentielles :

— la représentation est *conforme*, c'est-à-dire qu'elle conserve les angles,

— tous les cercles de la sphère deviennent des cercles de la carte (sauf les cercles passant par le pôle, qui sont transformés en droites).

Cette projection, connue dans l'Antiquité, est une des raisons de l'importance des études consacrées aux *inversions*. On retrouve ici, un exemple de problème de

Fig. 2  
 Projection stéréographique.



mathématiques appliquées qui devient un moteur de la recherche plus théorique.

**Procédé n°4 :** C'est la projection gnomonique (cf. figure de l'encadré 3). Cette projection ne peut représenter qu'un hémisphère (et encore, sur une carte infinie !).

Elle déforme considérablement

toutes les figures,... mais les géodésiques de la sphère deviennent les géodésiques de la carte.

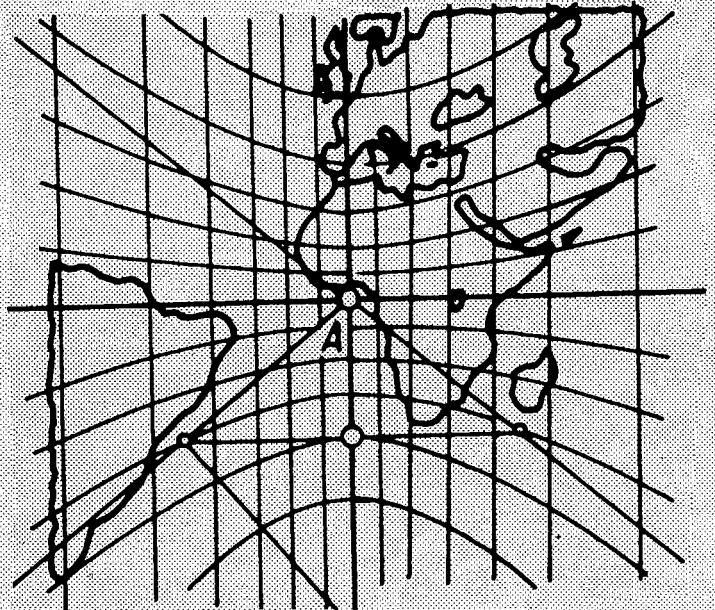
Par ailleurs, ce procédé s'avère irremplaçable en ce qui concerne les diverses techniques de fabrication des *globes terrestres* ou des maquettes (*voir à ce sujet l'encadré 3 pages suivantes*).

Fig. 3  
*Projection stéréographique  
centrée sur l'équateur.*



**Encadré 3. De la sphère terrestre à ses représentations.**

La *projection gnomonique* (procédé n°4) déforme considérablement toutes les figures. Cette projection ne peut d'ailleurs représenter qu'un hémisphère ... sur une carte infinie !



*Projection  
gnomonique  
centrée sur  
l'équateur.*

Ce procédé s'avère cependant irremplaçable en ce qui concerne la fabrication des *globes terrestres*.

Depuis le XVI<sup>ème</sup> siècle en effet, on cherche à fabriquer des globes terrestres. Pour cela, on réalise une approximation de la sphère par un *polyèdre circonscrit*, ou par une figure plus hybride.

La fabrication des globes terrestres suppose une **impression à plat**, et ensuite un **ajustage**, avec éventuellement courbure des pièces assemblées.

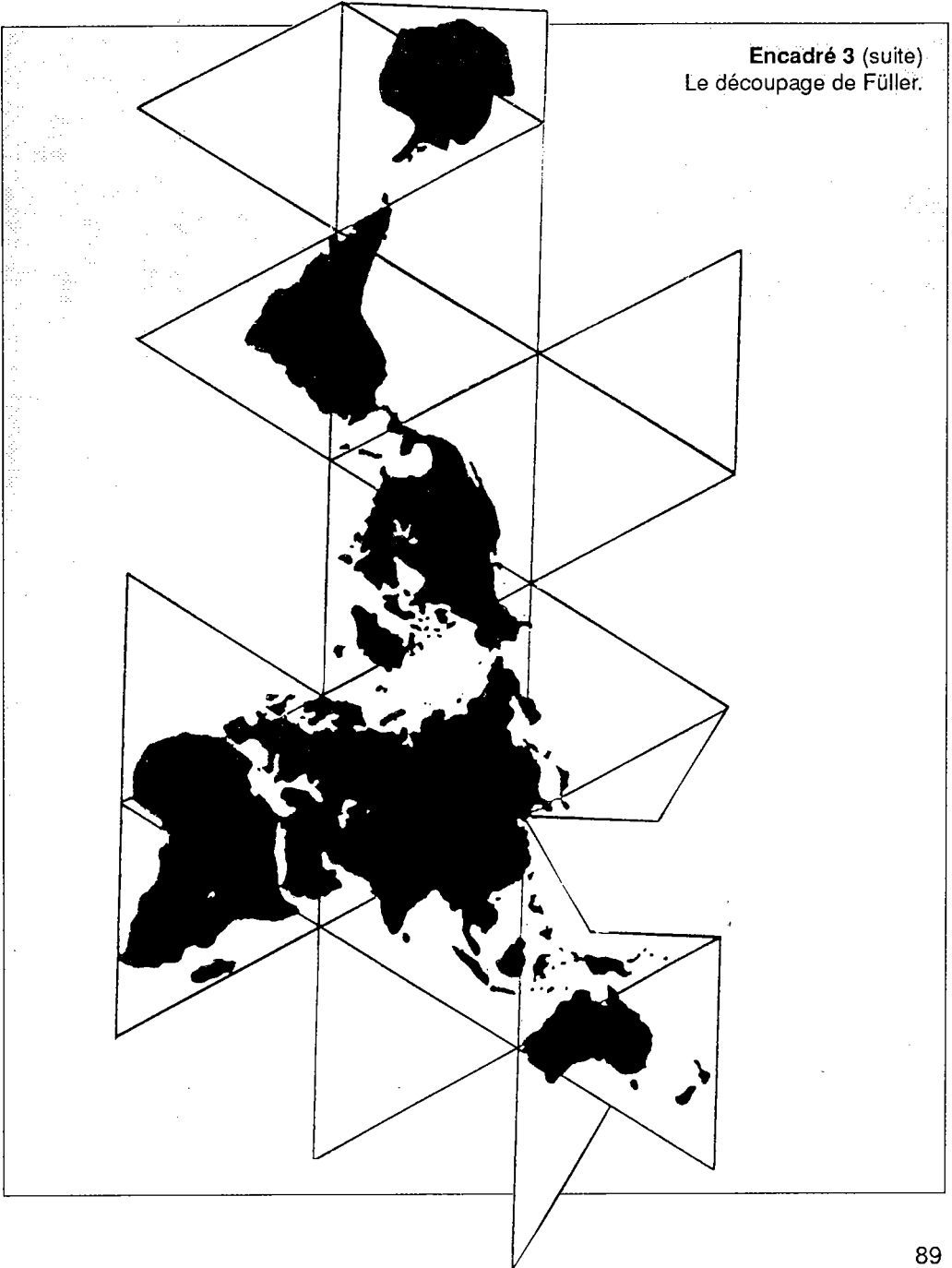
Les assemblages classiques sont :

- les fuseaux, avec une pastille complémentaire sur les pôles,
- le dodécaèdre, l'isocaèdre, et leurs dérivés,
- les couronnes cylindriques et coniques.

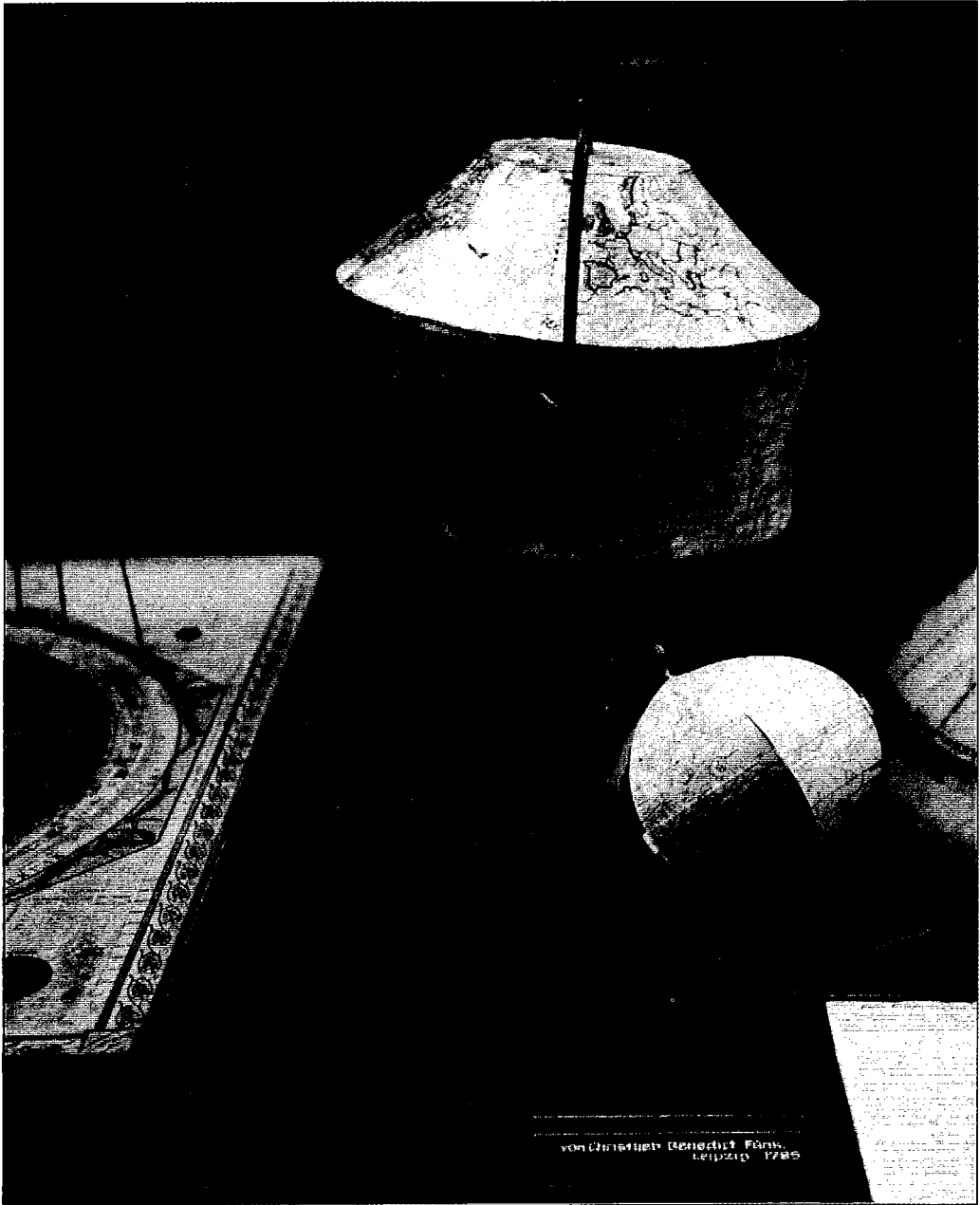
Füller a proposé un positionnement de l'icosaèdre circonscrit, qui permet de le découper et de le développer sans jamais couper une terre émergée. Le résultat est assez fidèle, mais très déroutant ...



**Encadré 3 (suite)**  
Le découpage de Füller.



*Musée National des Techniques, Dresde.*

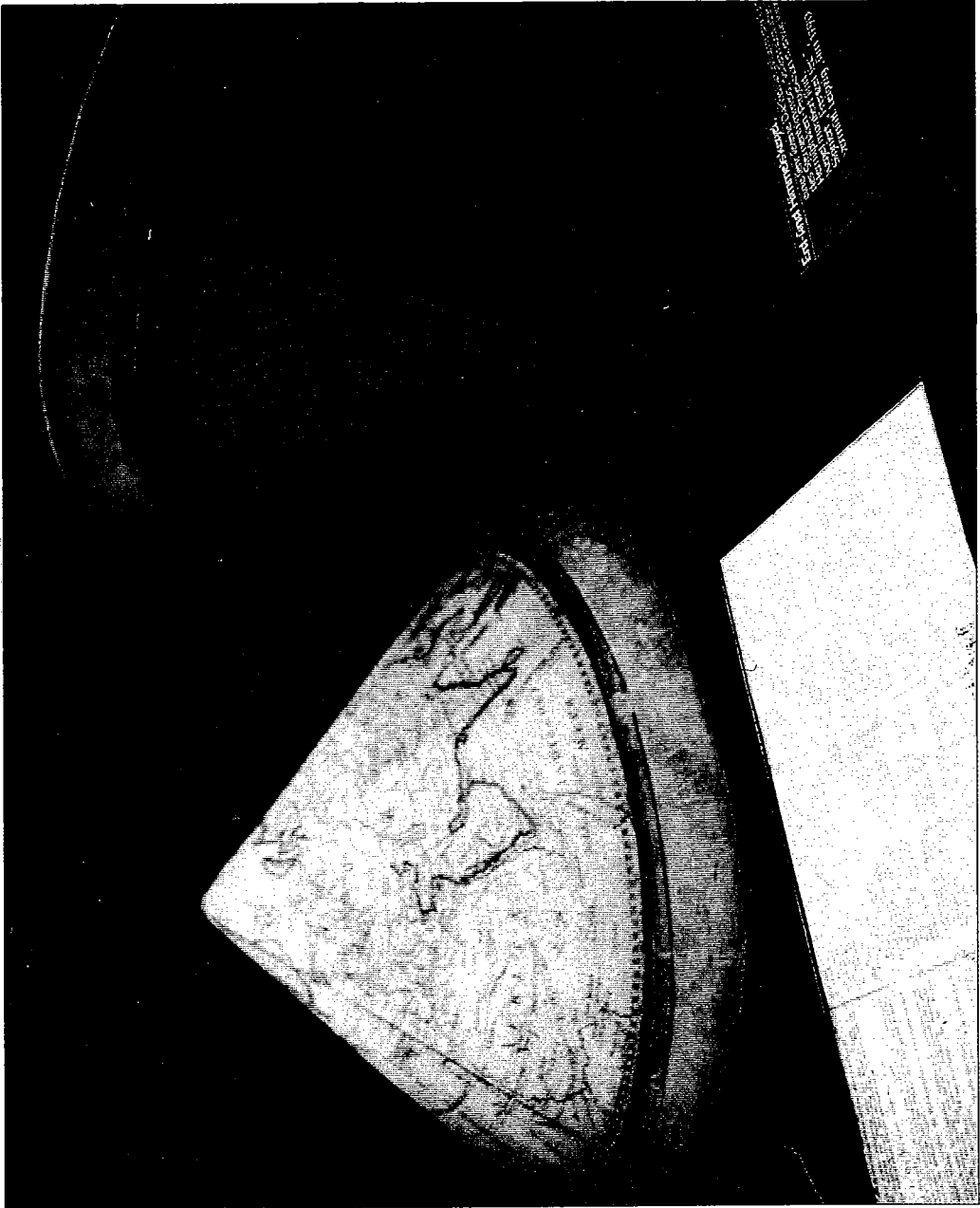


*Musée National des Techniques, Dresde.*



CARTOGRAPHIE ET  
MATHEMATIQUES

*Musée National des Techniques, Dresde.*



## B. Projections cylindriques

Seuls les procédés 1 et 4 du paragraphe III sont effectivement utilisés.

### Procédé n°1 (projection orthogonale) :

Cette projection est équivalente.

De plus, associée avec la projection orthogonale polaire correspondante, elle permet de relever des distances vraies sur une carte.

La carte obtenue par ce procédé (cf. figure 4 ci-dessous) est parfois transformée par une affinité, qui conserve les méridiens en vraie grandeur, et réduit les parallèles.

Cette variante conserve toujours les

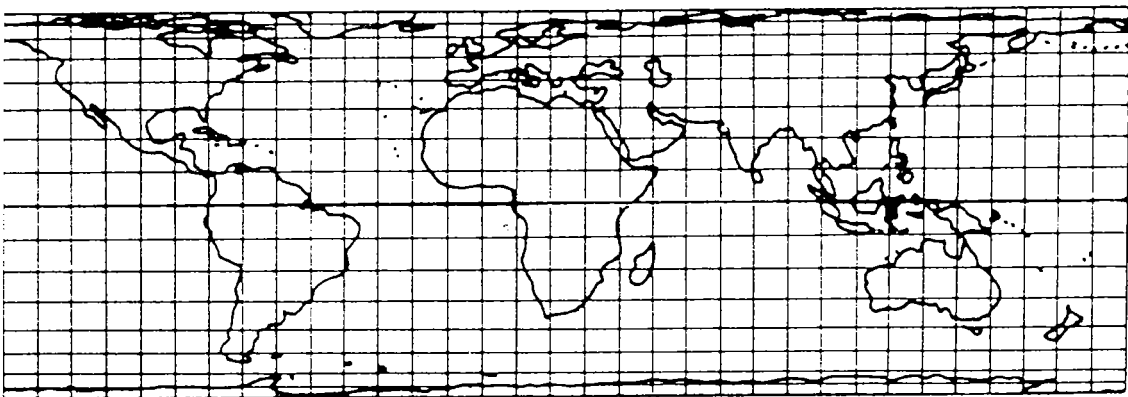
rapports de surface, mais répartit les déformations sur les zones équatoriales et polaires, en gardant un air conforme aux latitudes intermédiaires. C'est la *projection de Peters*.

### Procédé n°4 (projection gnomonique) :

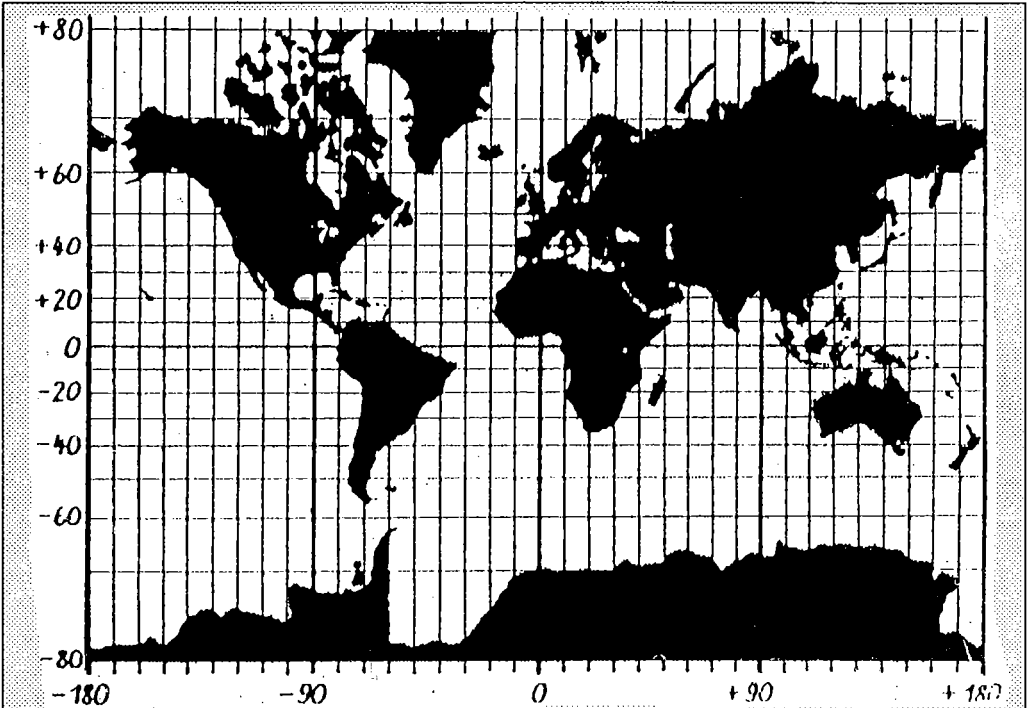
Dû à Mercator (cf. encadré 4), il a été considéré comme conforme, mais il est abandonné depuis que l'on sait faire des projections cylindriques conformes.

Les projections coniques géométriques n'ont que peu d'intérêt. Signalons, par contre, que le géographe Lambert (1728-1777) a mis au point une méthode analytique de projection conique conforme, toujours utilisée pour la cartographie locale en Europe, en particulier par l'I.G.N.

Fig. 4. Projection cylindrique équivalente.



**Encadré 4.** La projection cylindrique conforme de Mercator.



Une application est *conforme* (conserve les angles) si son application tangente est, en tout point, une *similitude*.

Ceci permet de construire une *projection cylindrique conforme* :

Lorsqu'à un point de coordonnées  $(\theta, \varphi)$  sur la sphère, on associe un point de coordonnées  $(\theta, f(\varphi))$  sur la carte, la transformation est conforme si, en tout point :

$$\frac{d\varphi}{\cos\varphi d\theta} = \frac{d(f(\varphi))}{d\theta}$$

D'où l'on tire :  $f'(\varphi) = \frac{1}{\cos\varphi}$

L'intégration de cette dernière formule donne :

$$f(\varphi) = \ln \left( \tan \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right), \text{ ou en core : } f(\varphi) = \ln \left( \frac{1 + \sin\varphi}{\cos\varphi} \right)$$

On peut aussi construire un réseau *presque conforme* en sommant la formule initiale. C'est le travail qu'a fait Mercator à une époque où on ignorait les logarithmes et le calcul intégral ...

Le parallèle de latitude  $n$  (en degrés) est représenté par un segment d'ordonnée :

$$f(n) = \frac{\pi}{180} \sum_0^n \frac{1}{\cos i}$$

Cette formule est correcte jusqu'à des latitudes de 60 ou 70°, ce qui est déjà suffisant pour beaucoup de navigateurs.

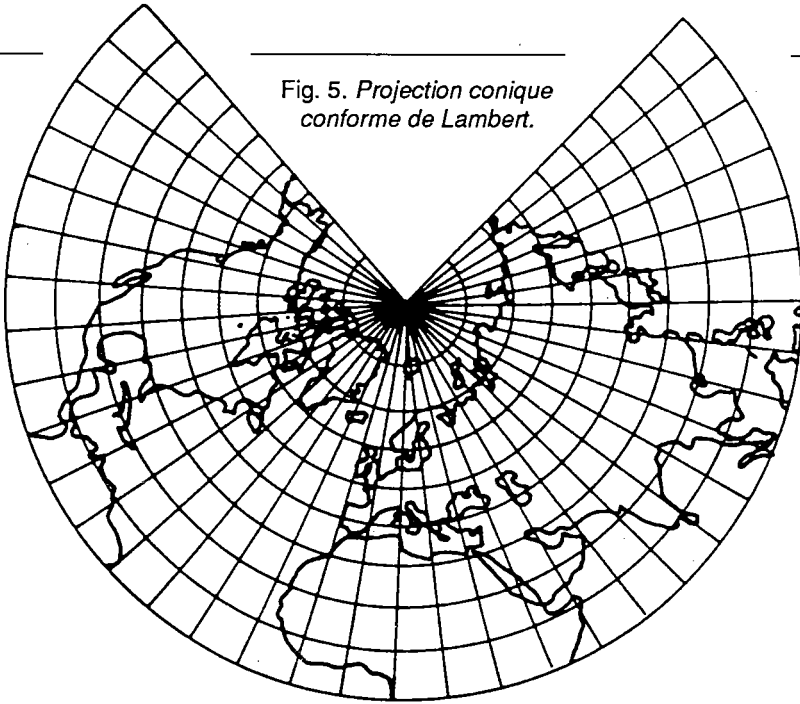


Fig. 5. *Projection conique conforme de Lambert.*

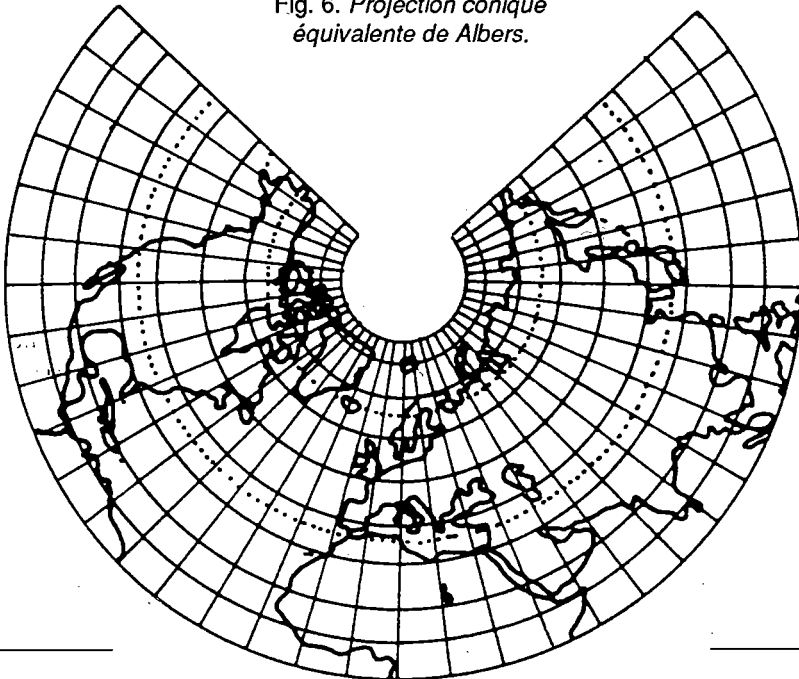


Fig. 6. *Projection conique équivalente de Albers.*

## V — Quelques projections analytiques

### A. Procédé de Stab-Werner

Au XV<sup>ème</sup> siècle apparaît une représentation originale de la sphère :

On trace un méridien en vraie grandeur, d'un pôle à l'autre, puis on représente tous les parallèles par des arcs de cercle, centrés au pôle Nord, et dont la longueur est égale à la vraie longueur du parallèle.

On aboutit à une curieuse carte en forme de cœur (voir encadré n°5), où chaque point de la terre est représenté (sur son parallèle), à une "distance" du méridien central (mesurée le long de ce parallèle), qui soit proportionnelle à la distance correspondante mesurée sur la surface terrestre.

Procédé séduisant, qui n'utilise pas le caractère sphérique de la terre (et marche donc aussi bien pour un ellipsoïde).

### B. Variantes de la projection de Stab-Werner

D'autres auteurs ont proposé de placer le centre des parallèles au-delà du pôle Nord. Cette astuce permet de lisser le point anguleux du pôle, mais le principe général reste le même.

L'ingénieur français Bonne (1727 - 1797) a démontré en 1752 que ces projections sont équivalentes, et la cartographie générale de la France (Laplace, 1821), puis celle de nombreux pays européens, s'est basée sur ce type de projection.

On voit cependant que ces cartes, trop centrées sur le Vieux Monde, ne pouvaient pas survivre à l'exploration de l'Amérique du Sud, ou à la découverte de l'Australie.

#### Encadré 5

*Le procédé de Stab-Werner.*

Apparu au XV<sup>ème</sup> siècle, ce procédé donne la curieuse carte ci-contre.

Détaillons quelques aspects de cette méthode :

#### ■ La forme analytique de la projection de Starb-Weber.

Le point de coordonnées sphériques  $(R, \theta, \varphi)$  sur la terre [  $\theta$  : longitude ;  $\varphi$  : déclinaison par rapport au pôle nord ] est représenté sur la carte par le point de coordonnées polaires :

$$\left( R\varphi, \frac{\theta}{\varphi} \sin\varphi \right)$$

On en déduit par exemple l'équation polaire du bord de la carte :

$$\alpha = \frac{\pi R}{\rho} \sin\left(\frac{\rho}{R}\right),$$

où  $(\rho, \alpha)$  sont les coordonnées polaires...

L'équation du méridien de longitude  $\theta$  est, hélas, encore pire :

$$\alpha = \frac{\theta R}{\rho} \sin\left(\frac{\rho}{R}\right),$$

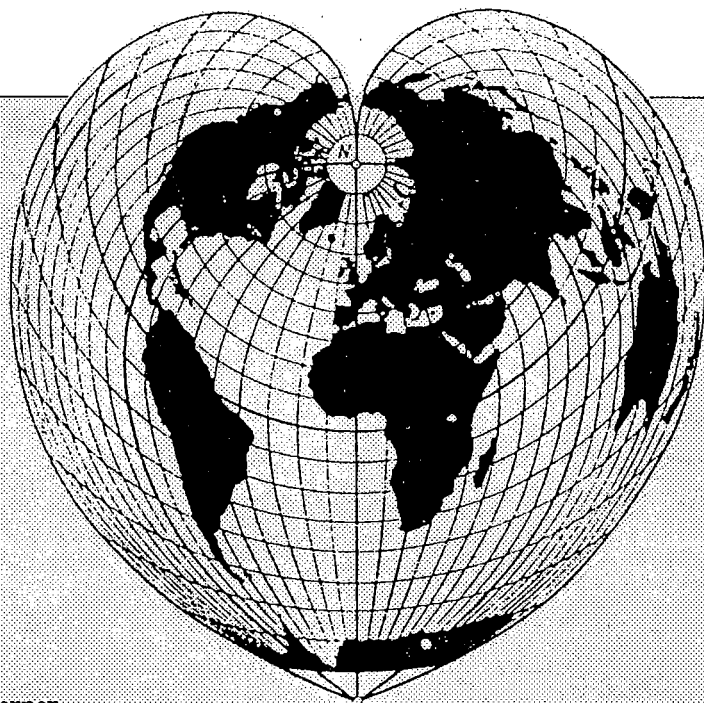
ce qui limite l'emploi de ces formules !

#### ■ Construction pratique de la carte de Starb-Weber.

A l'origine, cette carte était construite par des procédés graphiques approchés d'une précision étonnante. Je ne reprends pas ici les procédés de *rectification du cercle* (pour construire le méridien central en vraie grandeur), mais je vais détailler la construction de deux arcs de cercles de rayons différents et de même longueur : en effet il faut savoir construire deux arcs de cercles de rayons  $R\varphi$  et  $R\sin(\varphi)$  qui aient la même longueur. Voir page 98 ...

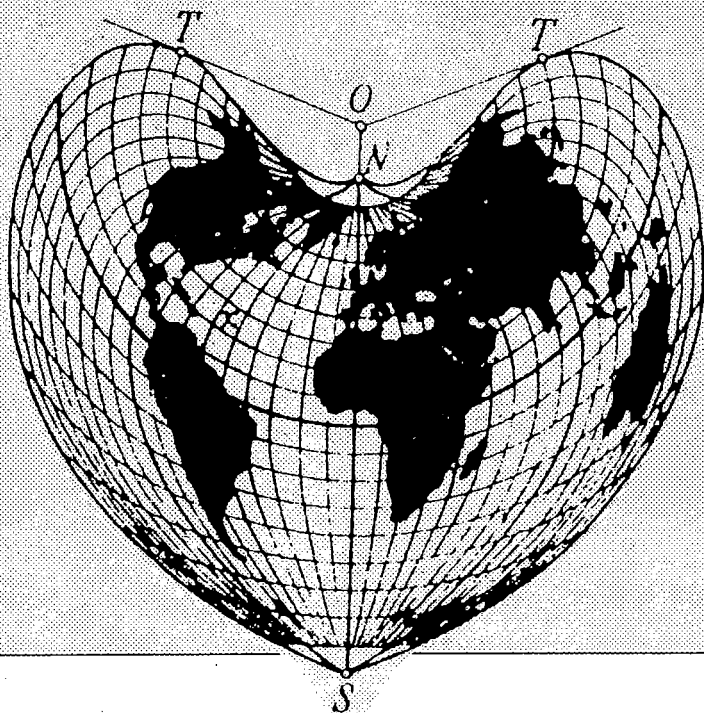


**Encadré 5. (suite)**

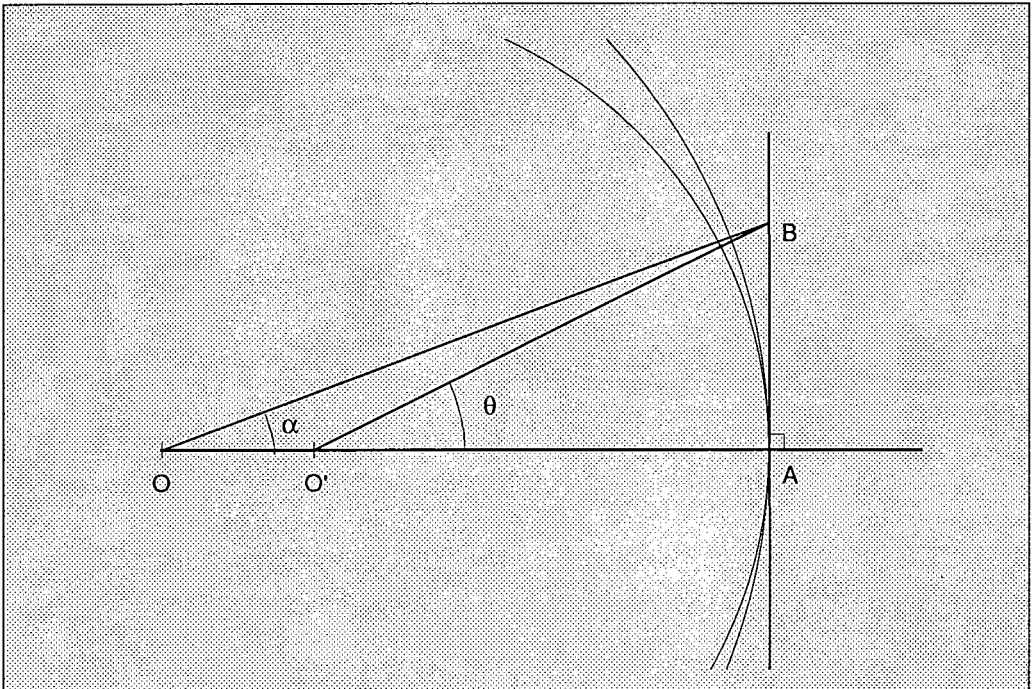


La projection de Stab-Werner.

La projection de Bonne.



**Encadré 5. (suite)**



On trace sur une même droite deux segments OA et O'A de longueurs respectives  $R\varphi$  et  $R\sin(\varphi)$ , puis on trace les cercles de centres O et O' passant par A, ainsi que la tangente commune à ces deux cercles au point A.

Soit B un point de cette tangente tel que  $\widehat{BO'A}$  soit assez petit ...

Si on note  $\theta = \widehat{BO'A}$  et  $\alpha = \widehat{BOA}$ , on obtient :

$$\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi} \tan\theta\right),$$

et un calcul d'équivalent montre que :

$$\alpha = \frac{\sin\varphi}{\varphi} \theta - \frac{\sin\varphi}{\varphi} \left(1 - \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^2\right) \frac{\theta^3}{\varphi} + o(\theta^4).$$

Cet équivalent garantit, pour  $\theta$  assez petit, que  $\alpha$  est très voisin de  $\sin \frac{\theta}{\varphi}$ , donc de l'angle cherché ; en effet : pour toutes les valeurs de  $\varphi$ , on a :

$$\frac{\sin\varphi}{3\varphi} \left(1 - \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^2\right) \leq 0,13$$

donc pour  $\theta \leq 10^{-1}$  rd, l'erreur est de l'ordre de  $10^{-4}$  rd, imperceptible à l'œil nu.

Une fois l'angle  $\alpha$  construit (correspondant à  $\theta = 5^\circ$  ou  $10^\circ$ , par exemple), on le reporte autant que nécessaire sur le cercle de rayon  $R\varphi$  de la carte, pour obtenir un réseau de parallèles et méridiens acceptable.

Elles restent une curiosité historique, et continuent à séduire par leur esthétique baroque.

**C. Planisphère de Mercator-Sanson**

Cette carte est la plus simple, peut-être, des cartes analytiques : le méridien central et l'équateur sont représentés par deux segments orthogonaux, en vraie grandeur, puis chaque parallèle est représenté en vraie grandeur, par un segment parallèle à l'équateur.

Le bord de la carte et les méridiens sont des arcs de sinusé, et cette projection conserve les aires. Son excellente lisibilité pour les zones proches des axes (Europe-Afrique, et équateur), en a fait la carte coloniale par excellence, mais les déformations au bord, et les pointes au pôle lui ont fait perdre son intérêt.

**D. Planisphère de Mollweide**

En 1805, l'astronome Mollweide propose de représenter la terre par une ellipse, pour des raisons esthétiques, presque symboliques. L'équateur et le méridien central sont deux segments orthogonaux, l'équateur deux fois plus grand que le méridien. L'équateur est découpé régulièrement, les méridiens sont déduits du contour extérieur par des affinités, et sont donc, eux aussi, des ellipses. Les parallèles sont des segments parallèles à l'équateur, et leur écartement est calculé pour assurer la conservation des aires. Intellectuellement séduisante, cette projection a connu son heure de gloire au XIX<sup>ème</sup> siècle, et continue à être utilisée pour les petites vignettes des atlas thématiques (cartes de végétations, peuplements...). Elle est de plus en plus contestée, à cause des déformations aux bords, et elle est remplacée par la projection de Peters.

Fig. 7. Projection équivalente de Mercator-Sanson.

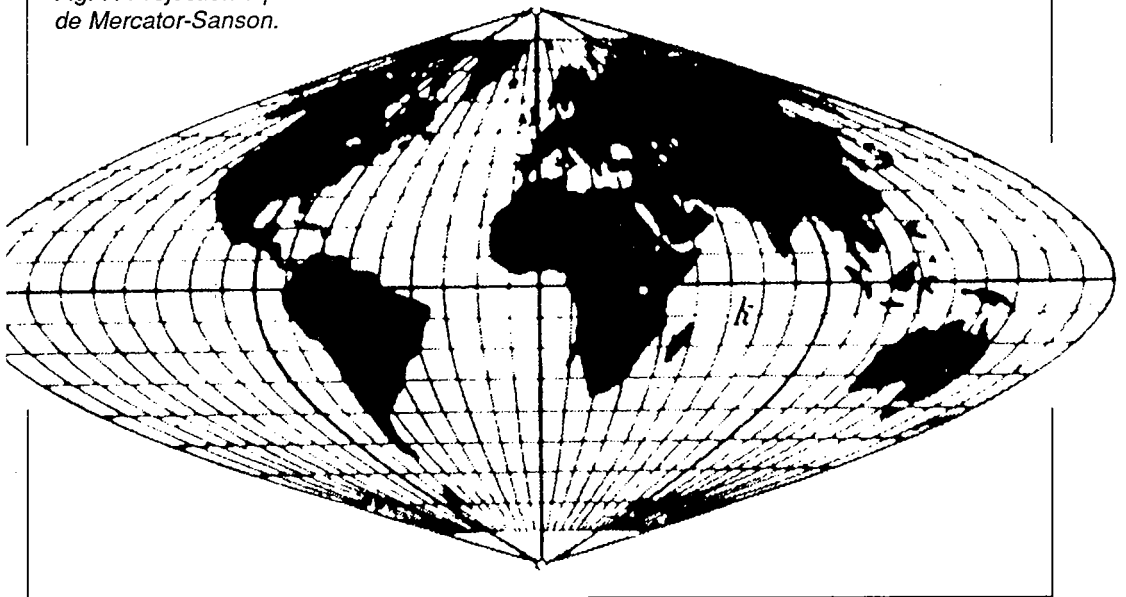
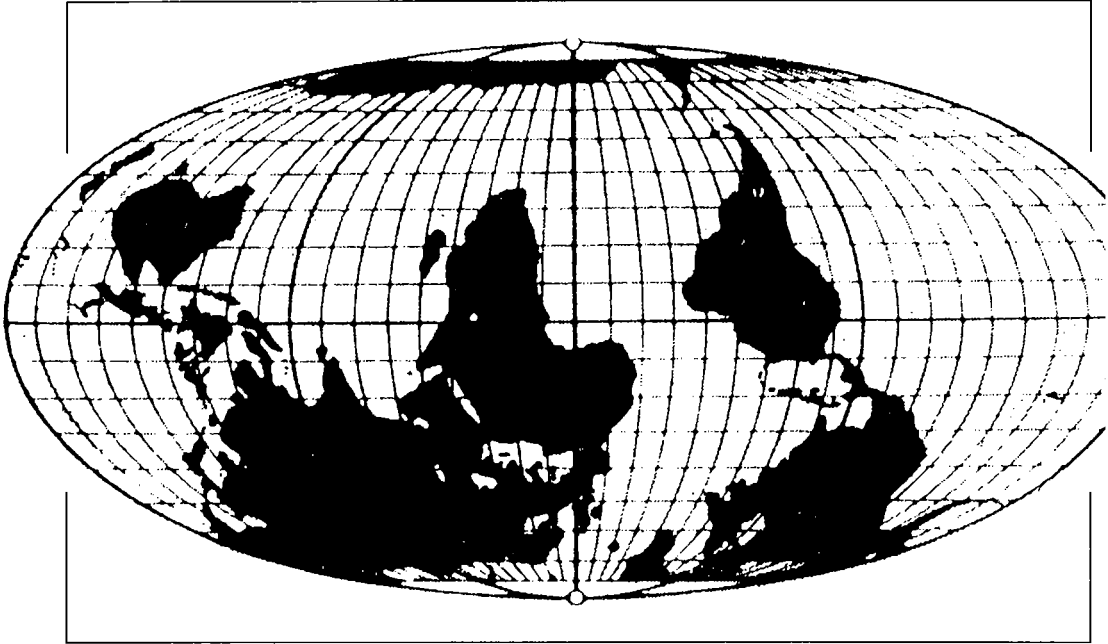


Fig. 8. *Projection équivalente de Mollweide.*



## VI — Quelques grands problèmes classiques

### A. Le choix d'une projection

On voit bien que chaque projection a des zones privilégiées et des zones mal représentées, coupées, déformées. On prendra conscience de ces problèmes en cherchant la carte (type de projection et place du découpage) qui mette le mieux en valeur, successivement :

- La France, l'Australie,
- L'U.R.S.S. (si elle existe encore),
- Le "monde musulman",
- L'île de Nauru, le Pôle Sud, etc.

### B. La question des géodésiques

Une géodésique est une ligne qui réalise le plus court chemin d'un point à un autre

sur une surface. Les géodésiques de la sphère sont ses grands cercles. Un navigateur, aérien ou maritime, a toujours intérêt à connaître la géodésique, donc la route la plus courte, entre les extrémités de son voyage.

Bien entendu, cette géodésique n'est pas forcément la route la plus rapide, à cause des irrégularités de la surface de la terre (montagnes, vents contraires, courants, frontières étanches, zones de guerre...), mais les vrais navigateurs cherchent vraiment des géodésiques sur leurs cartes.

Les géodésiques ne se représentent bien que sur des projections géométriques polaires :

- En projection orthogonale, les géodésiques sont des ellipses, qui ont le bord de la carte comme grand cercle. La construction de la géodésique est délicate (voir annexe), mais on se limite souvent à cher-

cher les axes de l'ellipse, pour obtenir le point le plus près du pôle nord (pour les vols long courrier type Paris-Tokyo) ou l'intersection avec l'équateur (pour les vols type Paris-Nouméa).

— En projection stéréographique, les géodésiques sont des cercles, bien sûr. La construction fait intervenir les antipodes des points à joindre (voir annexe). On peut alors relever plusieurs points sur le trajet, et lire sur la carte (parce qu'elle est conforme) l'angle de la géodésique et du méridien.

— En projection gnomonique, les géodésiques sont des droites, et le point de la droite le plus près du pôle représente le point de la géodésique le plus près du pôle sur la terre. C'est vraiment le seul intérêt de cette projection.

— Sur une carte développée d'un polyèdre, les géodésiques sont des lignes polygonales. Mais pour des points éloignés, la détermination est très difficile.

### C. Lecture des angles et navigation

La navigation (maritime ou aérienne) s'appuie beaucoup sur la mesure de l'angle de la route suivie avec le méridien du point où on est, que cet angle soit mesuré avec une boussole, un gyroscope ou un relevé astronomique. La navigation facile consiste à naviguer à cap constant...

Une route qui coupe les méridiens avec un angle constant s'appelle une *loxodromie*. Sur une projection stéréographique, c'est une spirale logarithmique, qui s'enroule autour du pôle sans jamais y arriver, mais sur une longueur finie... Sur une projection cylindrique conforme (Mercator), ces loxodromies sont représentées par des droites. La navigation pratique se décompose ainsi :

— Tracer la géodésique entre les extrémités du voyage à faire.

— Relever quelques points de cette géodésique.

— Reporter ces points sur la projection de Mercator.

— Tracer les arcs de loxodromie qui approchent la géodésique, et naviguer sur cette route.

Signalons que le relevé de points sur la géodésique est facilité par l'existence de projections stéréographiques centrées sur les grands aéroports mondiaux. Une géodésique, de cet aéroport à n'importe où, est une droite. Mais il faut une carte par aéroport !

### D. Le relevé des distances

Prendre les deux projections du procédé 1 (orthogonale polaire, et cylindrique équivalente). Prendre deux points M et N sur la sphère,  $M_1$  et  $N_1$  leurs images sur la carte polaire,  $M_2$  et  $N_2$  leurs images sur la carte cylindrique. Le segment PMN est l'hypothénuse d'un triangle rectangle MNH, où NH est parallèle à l'axe de révolution du système sphère-plan-cylindre. Pour mesurer la distance MN, c'est très simple :

— On trouve MH en vraie grandeur sur la carte polaire.

— On trouve NH en vraie grandeur sur la carte cylindrique.

— On construit, en vraie grandeur, le triangle MNH, rectangle en H.

— On reporte le segment MN comme corde de l'équateur, sur la projection polaire. La longueur de l'arc intercepté est celle de l'arc de grand cercle MN sur la sphère.

## VII — De la cartographie aux mathématiques : quelques activités pour tous les niveaux scolaires

### A. Manipulations sur les réseaux

Très tôt, on peut fournir aux élèves des réseaux méridiens-parallèles, et y faire placer des villes, reporter des contours de continents, observer les différences, d'un réseau à l'autre.

Pour que les variations soient sensibles, il faut travailler à l'échelle d'un continent entier. Ce travail recoupe les programmes de géographie de sixième et de seconde.

### B. Les changements de carte

Problème infini, puisqu'il y a une infinité de cartes. Cependant, quelques problèmes géométriques sont sous-jacents, et peuvent être introduits de façon intéressante sur un exemple de cartographie :

— D'une projection orthogonale à une autre ; on retrouve les questions de la géométrie descriptive.

— D'une projection stéréographique à une autre : on retrouve les inversions du plan, sous une forme déjà sophistiquée.

— D'une projection gnomonique à une autre ; on découvre une application d'un demi-plan dans un autre qui conserve les alignements, mais pas le parallélisme. Le plan projectif n'est donc pas très loin.

D'autre part, écrire les équations de changement de carte (par exemple à partir de la projection cylindrique équivalente) est un excellent travail de mise en équations d'un problème à deux variables.

### C. Et l'analyse, dans tout ça ?

Dans ce domaine, l'analyse est partout :

— D'abord pour fonder toutes les manipulations sur les coordonnées. Et la cartographie est à l'origine des coordonnées polaires, cylindriques et sphériques. Ce point devrait encourager à introduire rapidement la géométrie dans l'espace, en lien avec la géométrie plane et la géométrie analytique dans tous les programmes scolaires.

— La recherche de quelques courbes caractéristiques sur des cartes (méridiens, géodésiques, loxodromies...) peut fournir de nombreux problèmes d'analyse, niveau bac.

— Mais l'analyse sert surtout à deux choses, hélas hors de portée pour nos élèves de lycée : démontrer qu'une projection est équivalente ou conforme.

**Une projection est conforme** (conserve les angles locaux) quand son application linéaire tangente est, en tout point, une similitude.

**Une projection est équivalente** (conserve les aires) quand son application linéaire tangente  $a$ , en tout point, un déterminant égal à 1.

Ces deux propriétés peuvent être étudiées directement dans le passage sphère - carte (mais il faut paramétrer la sphère en coordonnées cartésiennes, soit dans le passage d'une carte à une autre, en sachant que l'on possède deux cartes de référence :

La projection stéréographique conforme,  
La projection cylindrique équivalente.

### D. Informatisez-moi tout ça !

Je n'ai pas exploré cet aspect de la question, mais je suis sûr que ça doit très bien marcher. Le travail sera d'autant plus

passionnant que les méthodes discrètes, pas à pas, de l'ordinateur, doivent souvent recouper celles des inventeurs des différentes projections. De plus, il est facile d'obtenir les coordonnées de toutes les villes de la terre (par exemple dans l'index de l'Atlas de l'Encyclopédia Universalis).

Un bon contour des continents peut être obtenu en joignant tous les ports.

Et un bon programme de tracé de cartes permettrait de visualiser rapidement, sur écran, les changements de projection.

Par ailleurs, les recherches de routes aériennes, les déterminations de caps à suivre et les calculs de distance font partie du bagage informatique nécessaire à tout bon navigateur aujourd'hui.

## Bibliographie

L'article "Cartographie", dans *Géométrie V*, Irem de Lille, 1989, contient des illustrations, et quelques réseaux de cartes qui n'ont pu être reproduits ici.

Le présent article doit beaucoup à : *Kartenentwürfe der Erde* de Eberhard SCHRÖDER, publié par BSB B.G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT - Leipzig 1988.

Les manuels scolaires de l'Irem de Strasbourg, édités par ISTRAS, 1980, ont déjà étudié des thèmes cartographie et sphère terrestre.

On trouvera des cartes partout, mais peu d'entre elles précisent sur quels procédés elles sont construites. Enfin, pour le plaisir, on pourra admirer :

L'Atlas géostratégique, chez Fayard, pour ses différents "points de vue",

Le numéro de Juin 1991 du *Courrier de L'Unesco*, pour ses reproductions de cartes rares, et ses notes historiques.

Le catalogue de l'exposition "*Cartes et Figures de la Terre*" - Beaubourg - 1981 (épuisé).

Cet article omet, délibérément, les questions pratiques de mesure du globe. Ce sujet est traité, entre autres, dans le catalogue de l'exposition : "*L'Aventure du mètre*", C.N.A.M. 1989.

### Annexe 1 : Echelle d'une carte.

Cette notion, élémentaire pour les cartes locales, est un piège pour les planisphères :

*Lorsque la carte est construite par un procédé géométrique, l'échelle est le rapport d'homothétie qui fait passer de la sphère terrestre à la sphère effectivement utilisée dans la projection, sphère tangente à la surface développable où se dessine la carte.*

Cette échelle n'est donc une vraie échelle de réduction des longueurs qu'aux points de contact entre la sphère et la carte.

*Pour les projections équivalentes, il y a une vraie échelle de surface : 1 cm<sup>2</sup> représente xxx km<sup>2</sup> sur la terre. Il n'y a aucun rapport entre cette échelle de surface et les modifications de longueurs.*

*Pour les cartes orthodromiques, il y a une vraie échelle de longueurs, valable seulement le long du méridien central et des parallèles.*

*Pour les projections conformes, on peut parler d'échelle locale en tout point : l'application linéaire tangente à la projection est, en tout point, une similitude, et son rapport est l'échelle de la carte en ce point.*

Toutes ces précisions sont à divulguer avec prudence, si vous ne voulez pas entrer en guerre avec vos collègues géographes, pour qui l'échelle d'une carte est une notion simple : sans toujours le préciser, ils se placent uniquement dans le cas de cartes locales conformes.

### Annexe 2 : Construction des géodésiques.

#### I. En projection stéréographique

La géodésique qui passe par A et B est un cercle, qui passe par A et B, et par leurs antipodes.

En construisant successivement  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A'$ , on obtient en  $A'$  l'antipode de A. La construction de la géodésique passant par A et B se réduit alors à celle du cercle AA'B. La construction de l'antipode de B, inutile sur le plan théorique, peut être assez pratique pour mieux déterminer le cercle cherché. (voir figure 9 ci-contre)

#### II. En projection orthogonale

Le problème est de construire l'ellipse de grand cercle C, passant par A et B. On construit d'abord A' sur l'équateur, tel que :  $(PA) \perp (AA')$ .

Puis, on construit A'' tel que :

$$(AB) \perp (AA'') \text{ et } AA' = AA''.$$

On construit de même B' et B''.

La droite (A''B'') coupe (AB) en K (éventuellement à l'infini).

La droite (PK) est le grand axe de l'ellipse cherchée, et le reste de la construction est aisé.

NB : Il y a bien sûr deux positions de K, et deux ellipses.

- A et B du même côté du grand axe correspond à deux points du même hémisphère.

- A et B de part et d'autre du grand axe correspond à deux points situés de part et d'autre de l'équateur. (voir figure 10)



Fig. 9. Construction d'une géodésique en projection stéréographique.

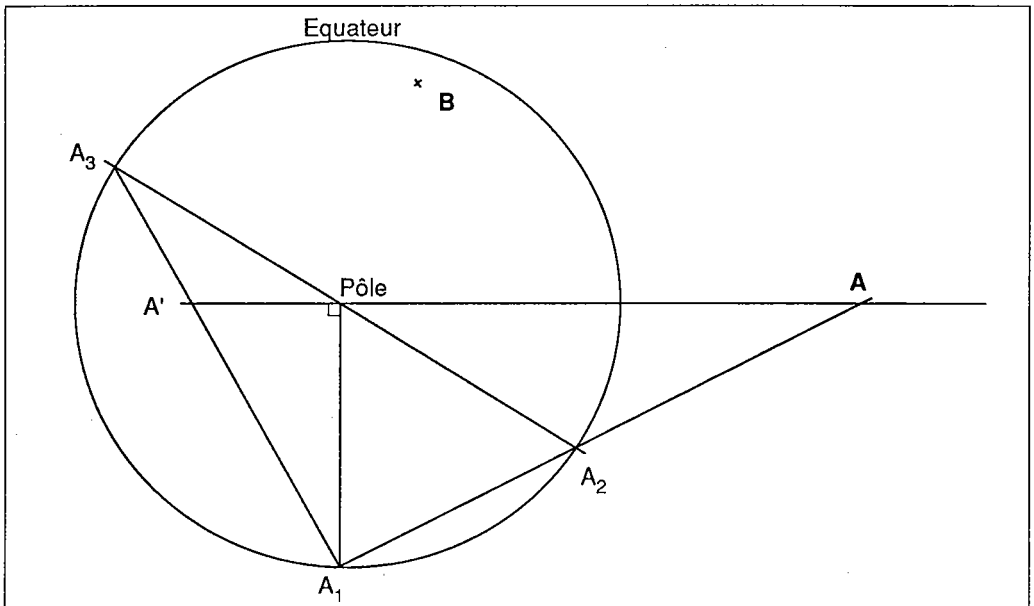
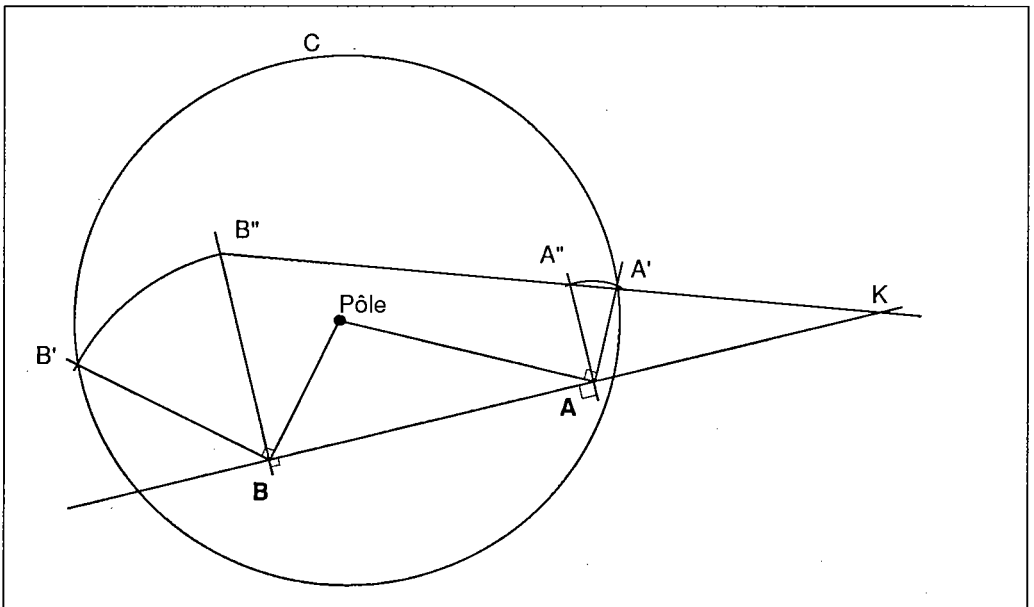


Fig. 10. Construction d'une géodésique en projection orthogonale.



**Annexe 3 : Transformations équivalentes.**

On appelle ainsi les projections qui conservent les aires, ou plus généralement leurs rapports. Cette propriété est fort utile pour toutes les cartes à caractère économique ou écologique, mais n'est acquise qu'au prix de grosses déformations locales, qui peuvent rendre certains pays méconnaissables.

Par ailleurs, l'étude analytique classique de cette propriété est d'un niveau élevé, inaccessible à nos élèves de lycée. C'est pourquoi je propose ici une approche "semi-expérimentale" de la conservation des aires.

*I. Rappel : Les aires des portions de sphère.*

Il faut rappeler trois résultats élémentaires, mais trop peu enseignés :

- la sphère de rayon  $R$  a pour aire  $4\pi R^2$ ,
- le fuseau compris entre les méridiens de longitude  $\theta$  et  $\theta'$  a pour aire  $2\pi R^2 |\theta - \theta'|$ ,
- la bande comprise entre deux parallèles, de latitudes  $\varphi$  et  $\varphi'$ , a pour aire :

$$2\pi R^2 |\sin \varphi - \sin \varphi'|,$$

ou encore  $2\pi Rh$ , si  $h$  est la distance entre les plans des parallèles.

*II. Généralités.*

Une projection qui conserve les aires conserve, en particulier, les aires des fuseaux et des bandes.

Il semble que, pour une carte assez régulière, la conservation des aires sur les fuseaux et les bandes entraîne la conservation de toutes les aires. De toute façon, ce résultat est admis par les élèves, et le plus difficile est de leur faire admettre qu'une démonstration est souhaitable, mais difficile.

Une idée, pour construire des transformations équivalentes, va être de chercher des

cartes d'aire totale  $4\pi R^2$ , de découper des fuseaux équipartis, puis de placer les parallèles de façon à conserver l'aire des bandes. Pour cela, il suffira de conserver l'aire des calottes sphériques. On est donc ramené à un problème à une variable, dès qu'un parallèle est repérable par un seul nombre.

*III. Exemple 1.*

La carte est un disque de rayon  $2R$ . Les méridiens sont les rayons du disque, et les longitudes sont représentées en vraie grandeur.

Le parallèle de latitude  $\varphi$  délimite une calotte sphérique d'aire  $2\pi R^2 (1 - \sin \varphi)$ . Il sera représenté par un cercle (centré au pôle), le rayon :

$$R \sqrt{2(1 - \sin \varphi)}.$$

On reconnaît dans cette longueur la distance du pôle au parallèle (voir § III), ce qui prouve que la projection polaire géométrique de type 2 (voir § IV) est équivalente.

*IV. Un procédé plus général.*

On se fixe le cadre de travail suivant :

L'équateur et le méridien central sont deux segments orthogonaux qui se coupent en leur milieu.

Les parallèles sont des segments parallèles à l'équateur.

Puis, on fixe arbitrairement le contour de la carte, avec comme seule exigence qu'il soit convexe et symétrique par rapport aux axes ; les pôles peuvent être représentés par des points ou par des segments (qui seront, bien sûr, parallèles à l'équateur).

Les unités sont choisies pour que l'aire totale de la carte soit :  $4\pi R^2$ .

On commence par construire les méridiens ; le bord de la carte est le méridien de longitude  $180^\circ$ , et le méridien de longitude  $\theta$  s'en déduit par l'affinité de rapport  $\frac{\theta}{180}$ , et d'axe le méridien central.

Cette définition garantit la conservation des aires des fuseaux, et la régularité du découpage des bandes par les méridiens.

Pour les parallèles, si le bord de la carte a pour équation  $x = f(y)$ , et si le parallèle de latitude  $\varphi$  est représenté par le segment d'ordonnée  $\alpha$  ( $\alpha \in [-1, 1]$ ), alors  $\varphi$  et  $\alpha$  sont liés par la relation :

$$2 \int_{\alpha}^1 f(y) dy = 2\pi R^2 (1 - \sin \varphi)$$

On donne ici trois exemples classiques de ce procédé :

□ **Carte rectangulaire :**

Sur une carte rectangulaire, la conservation des aires est assurée quand le parallèle de latitude  $\varphi$  est représenté par le segment d'ordonnée  $\varphi$ . C'est la projection *cylindrique équivalente*, ou projection de Peters.

□ **Planisphère de Mercator-Sanson :**

Le parallèle de latitude  $\varphi$  est représenté par le segment de longueur  $2\pi R \cos \varphi$ , et d'ordonnée  $R\varphi$ .

On a donc  $x = \pi R \cos \frac{y}{R}$ , et on contrôle aisément que :

$$2 \int_{R\varphi}^{R\pi/2} \pi R \cos \frac{y}{R} dy = 2\pi R^2 (1 - \sin \varphi).$$

Ce qui assure que la projection de Mercator-Sanson est équivalente.

□ **Cartes à bords circulaires ou elliptiques :**

Pour ces cartes, on est ramené à une intégrale de surface de disque, bon exercice pour les élèves de terminale. Signalons trois variantes :

— le planisphère de Mollweide, où le contour est une ellipse de demi-axes  $R\sqrt{2}$  et  $2R\sqrt{2}$  ;

— le planisphère à contour circulaire (lié au précédent par une affinité) ;

— le planisphère de ECKERT, où le méridien central a une longueur  $2R$ , et où le bord est un demi-cercle, de rayon  $R$ , placé à une distance  $d$  du méridien central, telle que l'aire totale soit :  $4\pi R^2$ .

**Une autre approche :  
les cartes orthodromiques**

On appelle *cartes orthodromiques* des cartes où un méridien est représenté par un segment en vraie grandeur, et les parallèles par des courbes équidistantes, orthogonales au méridien central et en vraie grandeur.

Au XVIème siècle, on trouvait évident que ces projections étaient équivalentes. Au XVIIIème, on le démontra.

□ Reconnaissez-vous là-dedans les cartes de Stab-Werner, Bonne ou Mercator-Sanson ?

□ Connaissez-vous d'autres familles de courbes équidistantes que les droites parallèles et les cercles concentriques ?

□ Osez-vous montrer ces horreurs à des élèves de lycée, et les rendre sensibles à l'évidence, douteuse, du procédé ?

CARTOGRAPHIE ET  
MATHÉMATIQUES

Fig. 11. Projection équivalente  
de Eckert

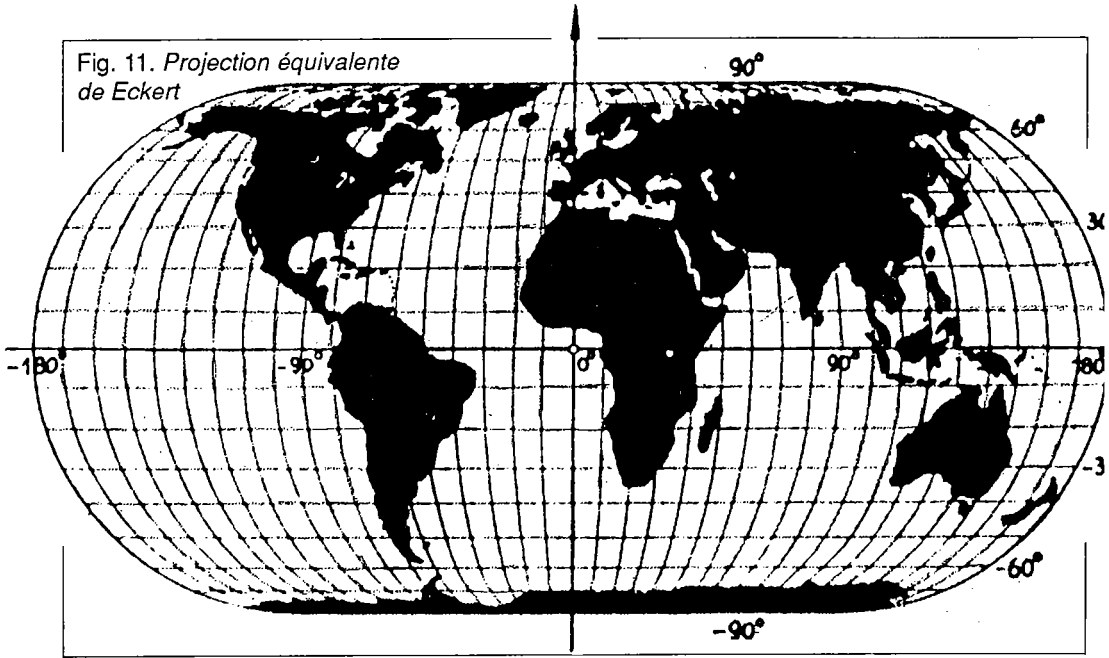
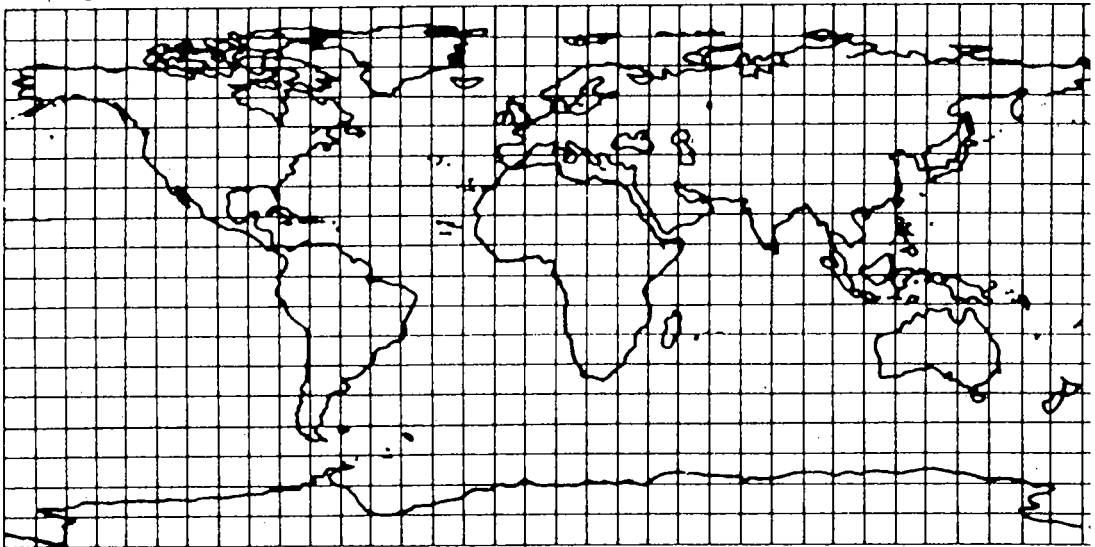


Fig. 12. Projection sur un quadrillage régulier.



**Annexe 4 : Projection stéréographique.**

Une étude complète de la projection stéréographique reviendrait à une étude générale des inversions de l'espace, sujet à la fois trop vaste et trop étudié ailleurs pour être traité ici. Je me limiterai donc à trois démonstrations, que j'ai essayé de rendre aussi "élémentaires" que possible. Ce travail n'est cependant pas abordable avant une classe de terminale.

*I. La projection stéréographique est la restriction d'une inversion.*

— Si on se limite à la figure de la partie III de cet article, on voit immédiatement que :

$$\frac{MQ}{PQ} = \frac{PQ}{M_3Q} = \cos \widehat{PQM}$$

d'où  $M_3Q = \frac{PQ^2}{MQ}$ , ce qui prouve que  $M_3$  est l'image de  $M$  par l'inversion de centre  $Q$  et de cercle invariant de rayon  $PQ$ .

L'extension à l'espace, par rotation autour de  $(PQ)$ , est évidente.

— Une approche analytique, directement dans l'espace, s'obtient ainsi :

Le point  $M$  a pour coordonnées  $(x,y,z)$  (avec  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ ). Le point  $M_3$  a pour coordonnées  $(\zeta,\eta,\nu)$ , et le théorème de Thalès donne :

$$\zeta = \frac{2x}{2-z}, \text{ et } \eta = \frac{2y}{2-z}.$$

*II. Conservation des cercles.*

Un cercle de la sphère est l'intersection de la sphère d'équation  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$  et d'un plan d'équation  $Ax + Bx + Cz = D$ .

On sait que (équations de la projection) :

$$x = \frac{(2-z)\zeta}{2} \text{ et } y = \frac{(2-z)\eta}{2}$$

On en tire :

$$Az + Bh + z \left( C - \frac{A\zeta}{2} - \frac{B\eta}{2} \right) = D,$$

et ensuite :

$$z = \frac{2(D-A\zeta-B\eta)}{2C-A\zeta-B\eta}.$$

En remettant ces valeurs de  $x, y$  et  $z$  dans l'équation de la sphère, on obtient :

$$(\zeta^2 + \eta^2)(2C - D) + 4(A\zeta + B\eta - D) = 0,$$

ce qui est bien l'équation d'un cercle du plan  $(\zeta,\eta)$ .

La condition d'existence du cercle est équivalente à celle de l'intersection de la sphère et du plan :

$$\frac{|C-D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} < 1$$

et le cas particulier  $2C - D = 0$  correspond à  $A\zeta + B\eta - D = 0$ , ce qui montre que, lorsque le cercle passe par le pôle, son image est une droite sur la carte.

*III. Conservation des angles.*

On reprend l'expression analytique de l'inversion, et on montre que l'inversion est conforme dans  $\mathbb{R}^3$ , et donc *a fortiori* sa réduction à n'importe quelle variété de dimension 2, par exemple une sphère.

Pour faciliter les calculs, on choisit un repère où le pôle de l'inversion est à l'origine du repère : à un point de coordonnées  $(x,y,z)$ , on associe le point de coordonnées  $(x',y',z')$  tel que :

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} \text{ et } (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}$$

On obtient alors :

$$x' = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)}, \quad y' = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)},$$

$$z' = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

CARTOGRAPHIE ET  
MATHÉMATIQUES

On a ensuite :

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{D^2}, \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{-2xy}{D^2}, \quad \frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{-2xz}{D^2}$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{-2xy}{D^2}, \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2 + z^2}{D^2}, \quad \frac{\partial y'}{\partial z} = \frac{-2yz}{D^2}$$

$$\frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{-2xz}{D^2}, \quad \frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{-2yz}{D^2}, \quad \frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{D^2}$$

où  $D = x^2 + y^2 + z^2$ .

Soit la matrice :

$$\begin{vmatrix} -x^2 + y^2 + z^2 & -2xy & -2xz \\ -2xy & x^2 - y^2 + z^2 & -2yz \\ -2xz & -2yz & x^2 + y^2 - z^2 \end{vmatrix}$$

Un calcul aussi simple qu'ennuyeux montre que :

$$M^2 = \begin{vmatrix} (x^2+y^2+z^2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (x^2+y^2+z^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (x^2+y^2+z^2)^2 \end{vmatrix}$$

Ce dernier résultat montre que *le carré de l'application linéaire tangente est une homothétie*, et donc que cette application est une *similitude* (et plus précisément, la composée d'une homothétie et d'une symétrie).

Cette dernière démonstration n'est, hélas, plus abordable en lycée, vu les programmes actuels...