REPERES - IREM . n°6 - janvier 1992

L'ENSEIGNEMENT DES PROBABILITES DANS LE PROGRAMME DE PREMIERE

Annie et Michel HENRY
Irem de Besançon

Première partie : épistémologie et didactique

Les nouveaux programmes des premières et terminales proposent une évolution significative de l'enseignement des probabilités à la suite des changements des programmes des collèges et des classes de seconde. (A la fin de cet article, on trouvera les extraits des programmes des premières et de terminales publiés au B.O. du 2 Mai 1991, ainsi que la bibliographie à laquelle renvoient les [ ]).

I – Les changements

On peut observer deux changements importants :

1 – Les nouveaux programmes des collèges abordent l'organisation et la gestion des données et une première approche de la statistique descriptive.

Le programme de seconde reprend et complète l'étude des séries statistiques qui étaient auparavant enseignées en première.

Pour éviter une rupture inutile, l'ancien programme de probabilités de TC, TE (en gros la moitié de celui de TD) passe en première, avec la recommandation :

"il ne s'agit que d'un premier contact".

La deuxième partie de l'ancien programme de TD (variables aléatoires) est alors étendue aux autres terminales, ce qui permet d'aborder réellement les concepts de base en probabilités (v.a. et loi).

2 – A la faveur de ce glissement de programme des terminales aux premières, on réduit le recours aux dénombrements pour calculer des probabilités, ce qui entraîne plus de conséquences qu'on ne l'imagine à première vue.

II – L'esprit de ce nouveau programme

Nous allons donc examiner ces conséquences et analyser la démarche de ce programme qui s'affirme encore plus "fréquentiste" que le précédent dans l'approche de la notion de probabilité.

Les dénombrements resteront en terminale sous une forme plus modeste.

L'esprit du programme, son épistémologie de référence, tient dans les quelques lignes suivantes (les autres déterminent les outils et les limitations et donnent des recommandations) :

"L'objectif est d'entraîner les élèves à ***décrire quelques expériences aléatoires simples*** *et à* ***calculer des probabilités. On évitera tout développement théorique.*** *Pour introduire la notion de probabilité, on s'appuiera sur l'étude de séries statistiques obtenues par répétition d'une expérience aléatoire, en soulignant les propriétés des fréquences et la relative stabilité de la fréquence d'un événement donné lorsque cette expérience est répétée un grand nombre de fois."*

Ce programme inscrit l'introduction des probabilités dans la continuité des apprentissages en statistiques et particulièrement lors de l'étude des séries statistiques.

La probabilité y est ainsi conçue comme liée à la notion de fréquence, laquelle prend du sens au travers de multiples exemples en statistiques. C'est pour cela que nous parlons de conception fréquentiste, en opposition à la conception plus formelle, qui modélise l'équiprobabilité des événements élémentaires, posée *a priori* pour des raisons de symétrie. Cette deuxième conception amenait Pascal à parler de "géométrie du hasard", nous l'appellerons *"l'approche pascalienne"*. Elle conduit à la définition de la probabilité par la fameuse formule :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}\,.$$

III – Continuité avec les programmes des collèges et de seconde

Remarquons que la démarche adoptée pour ce programme est parfaitement cohérente avec l'esprit des nouveaux programmes de collège et de seconde, privilégiant l'activité des élèves, l'observation et la formulation de conjectures, avant que le modèle mathématique soit institutionnalisé. S'opposant à une présentation formelle des mathématiques, ces programmes se conçoivent comme l'étude d'outils de description d'une réalité concrète.

Ainsi, la probabilité est conçue comme outil mathématique, s'intégrant dans une modélisation de l'expérience sensible lors de l'activité qui, en statistiques, est centrée sur le recueil et l'organisation de données.

La présentation formelle du modèle probabiliste est donc exclue, et par conséquent le programme précise *"on évitera tout développement théorique"*, car au-delà de difficultés formelles ou techniques non nécessaires en première, c'est en fait l'esprit même du programme qui serait trahi par "tout développement théorique".

IV - Introduction de la notion de probabilité

Voyons maintenant comment se présente cet enchaînement des statistiques descriptives et l'étude de séries statistiques avec la notion de probabilité.

Prenons un premier exemple d'une série statistique issue de l'étude d'un caractère défini sur une population.

La situation la plus simple est celle d'un caractère qualitatif. Dans le cas d'un caractère quantitatif continu, la répartition des observations en classes nous ramène à cette situation.

Dans notre exemple, la **population** est celle des 1 000 arbres d'une petite forêt.
Il y a 6 essences différentes qui retiennent notre attention, numérotées de 1 à 6.

Nous nous intéressons aux proportions des différentes essences dans la forêt. Le **caractère** est ce qui permet d'associer le numéro de son essence à chacun des arbres.

Si i est le numéro de l'essence, n_i est l'**effectif** (le nombre des arbres) de cette essence et f_i la **fréquence** de cette essence dans la population.

L'observation conduit à la **série statistique** comprenant 6 classes, donnée dans le tableau ci-dessous.

Comment *"s'appuyer sur la description de cette série statistique pour introduire la notion de probabilité"* ? (selon les termes du programme).

Pour le moment, il ne peut être question de dégager cette notion.

En effet, et ceci est essentiel, une probabilité ne peut avoir de sens que si elle concerne un **événement** associé à une **expérience aléatoire.**

En l'absence d'expérience aléatoire, pas de probabilité.

Le concept de probabilité (et sa construction), suppose donc acquis ceux d'expérience aléatoire et d'événements. C'est d'ailleurs souligné en premier lieu dans le programme : *"l'objectif est d'entraî-*

Exemple de série statistique.

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
n_i	700	200	50	30	10	10
f_i	0,7	0,2	0,05	0,03	0,01	0,01

ner les élèves à ***décrire quelques expériences aléatoires simples****"*. Ce concept se dégagera alors de cette activité de description portant sur différents exemples dans des cadres variés.

A cette notion d'expérience aléatoire sont associées des hypothèses importantes :

Si l'on veut développer un travail mathématique, cette notion doit pouvoir être modélisée. Nous savons que le langage et les opérations sur les ensembles le permettent effectivement.

Une expérience aléatoire doit donc conduire à un *ensemble* de résultats possibles, bien identifiés.

De plus, elle doit être *reproductible* dans les mêmes conditions (au moins par la pensée). Ainsi, les faits historiques ne peuvent être considérés comme résultant d'expériences aléatoires et ne sauraient être probabilisés.

Enfin, les résultats possibles ne peuvent être prévus à l'avance. Plus exactement, les conditions de l'expérience, telles qu'elles peuvent être décrites et reproduites, ne déterminent pas l'un des résultats possibles de manière absolue. Chacun des résultats possibles est alors le fruit du *"hasard"* se conjuguant avec les conditions de l'expérience.

A la notion d'expérience aléatoire est donc liée celle du *hasard*, avec les difficultés épistémologiques ou philosophiques que nous connaissons. Elles justifient d'ailleurs une longue dissertation en introduction de l'ouvrage de Henri POINCARE "Calcul des probabilités" publié en 1912. En voici un extrait :

Le déterminisme Laplacien pose que *"le mot hasard est tout simplement un synonyme d'ignorance, qu'est-ce que cela veut dire... ? Il faut donc bien que le hasard soit autre chose que le nom que nous donnons à notre ignorance, que parmi les phénomènes dont nous ignorons les causes, nous devions distinguer les phénomènes fortuits, sur lesquels le calcul des probabilités nous renseignera provisoirement, et ceux qui ne sont pas fortuits et sur lesquels nous ne pouvons rien dire, tant que nous n'aurons pas déterminé les lois qui les régissent."* [1, p.3]

Cette remarque montre que pour comprendre les difficultés conceptuelles de la notion de probabilité, nous nous heurterons à des obstacles épistémologiques.

V – Le hasard, digression épistémologique

Arrivés en première, les élèves se sont confrontés depuis longtemps avec les phénomènes aléatoires, en particulier avec les jeux de hasard. Ils ont même pu émettre certaines inférences de nature probabiliste, sans bien pouvoir en mesurer la fiabilité.

Cependant, pour la première fois en mathématiques, on se propose de modéliser ces phénomènes et de les mesurer. Pour permettre aux élèves ce passage de la perception empirique à l'approche scientifique, on n'évitera pas un réel travail de fond sur la notion de hasard et sur les obstacles épistémologiques durs qui lui sont liés.

Ceux-ci nous sont révélés par les hésitations historiques des Bernoulli, D'Alembert, Laplace, Poincaré. Il est alors bon que les enseignants de mathématiques aient fait le point sur leurs propres conceptions, les aient confrontées à celles de ces mathématiciens du passé pour ne pas être pris au dépourvu par tel ou tel comportement d'élève qui rencontre à cette étape des difficultés de compréhension.

Nous vous proposons donc un petit détour historique sur la notion de hasard. (cf. encadré 1 ; se reporter aussi à [2].)

L'idée (déjà présente chez D'Alembert) que *la probabilité que l'on va attribuer à un événement dépend de l'interprétation par le sujet des informations qu'il possède et n'est pas en soi une donnée objective*, sera renforcée par l'introduction des probabilités conditionnelles (difficulté à ne pas négliger en terminale).

Il y a là aussi un obstacle épistémologique : séparer une information objective relative à l'événement à observer qui permet de se situer dans un autre modèle probabiliste intégrant cette information, d'une appréciation dépendant des facultés de l'observateur.

Ainsi il n'est pas rare qu'un étudiant prétende avec assurance que la probabilité d'obtenir 6 et 5 avec deux dés n'est pas la même selon que les dés sont identiques ou de couleurs différentes ... Nous rencontrons ici la marque de l'obstacle didactique lié à l'introduction de la notion de probabilité par les dénombrements des cas.

Entre l'*aléatoire pur* qui enlève toute scientificité à la prévision probabiliste et place l'individu face à sa subjectivité, et le *déterminisme absolu* qui réduit le calcul des probabilités à un palliatif de notre ignorance, il faut permettre au hasard en tant que phénomène naturel d'avoir une place aux côtés des autres lois de la nature, lesquelles, comme le souligne Laplace, *"bien*

Encadré 1.

Origines du mot :

en arabe : az zahr signifie "jeu de dé"
en latin : alea signifie "coup de dé"
en latin : cadere (chance) signifie "choir" (chute des dés). (1)

Mais le hasard existe-t-il ? comment le définir ?

Approche "théologique" :

A l'origine, cette notion, trop liée aux jeux de hasard, se dégageait difficilement de considérations théologiques, philosophiques ou idéologiques.

Ainsi en est-il de l'appréciation de Jacques Bernoulli (1654-1705) dans ses "Ars conjectandi", publiés seulement en 1713 : seul Dieu tout puissant sait tout, les hommes sont ignorants ou incapables de maîtriser toutes les causes aboutissant au résultat observé. On peut citer : *"si n'arrivait pas avec certitude tout ce qui est futur, on ne voit pas comment le Créateur suprême pourrait conserver entière la gloire de son omniscience et de son omnipotence"... "La probabilité est en effet un degré de la certitude et en diffère comme la partie diffère du tout".* [3]

Il ajoute : *"Si on considère la certitude subjectivement dans son rapport à nous, elle est la mesure de notre connaissance touchant cette vérité."*

Approche déterministe :

Dans ce cadre théologique, il y a la place du déterminisme cartésien de cette époque. Ce déterminisme allait s'exprimer de manière radicale chez Laplace (1749-1827) dans son "essai philosophique sur les probabilités" publié en 1814 : *"Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui que va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour sou-*

(1) Citées par Bigot et Verlant dans leur manuel : *Statistiques et Probabilités* pour STS, Ed Foucher.

Encadré 1. *(suite)*

mettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux". [4, p.32]

Alors le hasard n'existe pas ?

René Thom (préface à l'essai philosophique) ajoute : *"l'aléatoire pur exige un fait sans cause, c'est-à-dire un commencement absolu. Or, dans l'histoire de notre représentation du réel, il n'y a d'autre exemple de commencement absolu que celui de la Création."* [4, p.23]

L'aléatoire dans la Nature :
Cependant, la conception déterministe se heurte au 20ème siècle à l'avancée des connaissances. René Thom, pour des raisons de principe affirme : *" dans ce conflit déterminisme-hasard, la science est déterministe"*, tout en s'interrogeant sur la métaphore d'Einstein : "usuellement Dieu joue-t-il aux dés ?". Mais la relation d'incertitude de Heisenberg a jeté un pavé dans la mare déterministe et la conception cosmogonique du "big bang" réfute l'existence d'une *"cause de l'état qui va suivre"*.

D'autres auteurs contemporains reviennent sur la dualité Déterminisme - Hasard (J. Monod, "le hasard et la nécessité") et dans une approche plus dialectique Ilia Prigogine et Edgar Morin avancent qu'un désordre complexe structure l'ordre par des régulations dont la résultante est prévisible dans un cadre probabiliste. L'exemple générique est le mouvement Brownien et les lois des gaz en thermodynamique.

L'aléatoire et la complexité :
Ainsi, du point de vue épistémologique (c'est-à-dire des conceptions qui fondent le modèle mathématique), un déterminisme absolu conduit Laplace à justifier l'aléatoire par l'ignorance dans laquelle nous sommes de maîtriser toutes les causes d'un événement et par la trop grande complexité des phénomènes par rapport à nos capacités d'analyse et de calcul. *"La probabilité est relative en partie à cette ignorance, en partie à nos connaissances".* [4, p.34]
Pour illustrer cette complexité, on cite les modèles actuellement en usage pour les prévisions météorologiques, calculant que le battement d'une aile de papillon en Australie peut avoir des effets sur le temps qu'il fera ici dans six mois. Mais il y a (encore) beaucoup de papillons dans le monde !

Conceptions erronées :
Ce déterminisme, mal digéré, conduit D'Alembert (dans l'Encyclopédie, tome IV, 1754, article "croix ou pile") à des erreurs grossières : par exemple, au jeu de pile ou face, il prétendit qu'après avoir obtenu face trois fois de suite, face devenait moins probable au coup suivant ! C'est cette même conception erronée qui est exploitée par les publications de certains journaux des statistiques du loto.
A l'inverse, une approche purement aléatoire des phénomènes imprévisibles conduit à attribuer l'équiprobabilité à des événements pour lesquels on ne dispose d'aucune raison valable d'en favoriser l'un plutôt que l'autre. D'où cette réflexion d'un étudiant qui n'a jamais voulu en démordre : *"De deux choses l'une, ou demain il fait beau, ou le temps est mauvais, donc, en l'absence d'informations météorologiques, il y a une chance sur deux pour qu'il fasse beau".*

Ainsi, l'âne de Buridan aurait une chance sur deux de choisir le seau d'eau ? ...
En traversant la rue, aurais-je une chance sur deux de me faire écraser ? ...

que de plus en plus précises, fondent leur effectivité sur l'induction et l'analogie lesquelles relèvent d'une démarche probabiliste, de sorte que le système entier des connaissances humaines se rattache à la théorie (des probabilités)". [4, p.31]

VI - Description d'une expérience aléatoire associée à une série statistique

Revenons à notre exemple de la forêt : l'expérience aléatoire, nécessaire pour introduire la notion de probabilité, sera le choix *"au hasard"* de l'un des arbres.

Avec la convention suivante : "Au hasard" signifie qu'un arbre n'a pas plus de "chances" (sens naïf) qu'un autre d'être choisi. C'est l'hypothèse de l'équiprobabilité sur les arbres considérés alors comme réalisant les événements élémentaires dont Laplace souligne l'importance de l'égale probabilité :

"La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence..." [4, p.35]

Le "c'est-à-dire..." est porteur de l'erreur conceptuelle de l'étudiant avec la météo ou de l'âne de Buridan : notre ignorance des phénomènes nous conduit à l'équiprobabilité. Mais pour Laplace, l'indécision est intrinsèque à la situation.

Il ajoute dans son deuxième principe :

"Si les divers cas ne sont pas également possibles, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives dont la juste appréciation est un des points les plus délicats de la théorie des hasards." [4, p.38]

Dans ce deuxième principe, Laplace, après avoir donné la définition pascalienne, laisse la porte ouverte à l'approche fréquentiste. Remarquons que Condorcet ne l'accepte pas :

"On cherche d'abord à déterminer le nombre de tous les événements également possibles, et il est absolument nécessaire de remonter à ceux auxquels il est permis de supposer cette égale probabilité, sans quoi le calcul deviendrait absolument hypothétique." [5 p. 56]

De manière générale, l'expérience aléatoire associée à une série statistique sera donc le prélèvement "au hasard" d'un élément de la population étudiée.

Mais comment prélève-t-on au hasard en assurant l'égalité des possibles ?

C'est un problème réel et concret que l'on rencontre dans le développement des sondages par exemple.

Voici une technique qui peut satisfaire les élèves :

On numérote les arbres. Il reste à prélever "au hasard" un nombre compris entre 1 et 1000. Pour cela, il suffit de prélever "au hasard" chacun des 3 chiffres de ce nombre. (Dans la classe, on peut recourir par exemple à l'utilisation d'un chronomètre au centième, dont le défilement est arrêté sur ordre).

On peut aussi utiliser à cette fin une table de nombres au hasard (annexe 3), en prenant par exemple 3 chiffres successifs sur une des lignes ou une des colonnes de la table (toute autre démarche systématique : 1 chiffre sur 3, etc. est valable).

Mais comment est fabriquée cette table ?

Peu importe (on pourrait imaginer les sorties de boules de loto, ou la roulette, ou tout autre mécanisme "purement aléatoire" (!) dont on a testé sur des échantillons de tirages les performances équiprobabilisantes).

En fait, les ordinateurs sont pourvus de générateurs de nombres aléatoires utilisant des algorithmes plus ou moins performants basés sur des calculs de restes successifs modulo un grand nombre. Les décimales d'un nombre transcendant ou d'une suite transcendante, peuvent servir de générateur (le logarithme chez Poincaré).

Mais ces processus sont parfaitement déterminés, à partir de la donnée initiale (touche randomize sur les calculatrices), mais les résultats sont parfaitement imprévisibles et sont à peu près équirépartis (on dit alors qu'ils sont pseudoaléatoires).

Ainsi, l'usage d'une table aléatoire devrait concourir à rassurer les élèves quant à la possibilité d'observer le hasard. L'annexe 3 propose la table de nombres au hasard simulant une répartition uniforme, qui a servi à l'expérimentation présentée en deuxième partie de l'article, avec son mode d'emploi.

VII – Notion d'événements, d'événements élémentaires et d'univers

Dans notre expérience aléatoire, nous nous intéressons aux 6 essences possibles de l'arbre choisi au hasard. Le tirage "réalise" donc l'un des 6 événements associés aux 6 essences.

Un événement est donc réalisé par une famille d'événements élémentaires. Pour les représenter on a recours à l'utilisation pratique du langage des ensembles. Les combinaisons logiques d'événements (et, ou, contraire) seront modélisées par intersection, réunion et complémentaire.

Notons que le membre de phrase du programme précédent (TD et TC) : *"l'objectif est d'entraîner les élèves à organiser,* **grâce à un minimum de langage ensembliste,** des données..." disparaît de manière à ce que les opérations ensemblistes ne soient pas objet d'étude en elles-mêmes.

Dans les connaissances exigibles, le nouveau programme indique cependant :

"Les élèves doivent savoir calculer la probabilité de la réunion d'événements disjoints, d'un événement contraire, ..."

La modélisation de cette expérience aléatoire nous renvoie à un modèle d'urne à 6 couleurs, où seulement les proportions de chacune des couleurs sont données, comme le propose en exemple la partie travaux pratiques du programme.

Lorsque la taille de la population est inconnue et qu'alors seuls les f_i sont donnés dans la série statistique, les probabilités des événements élémentaires ne sont pas accessibles. On peut alors considérer comme élémentaire chacun des 6 événements "essence d'arbre". On est dans le cas où les événements élémentaires ne sont pas équiprobables, et où *"la juste appréciation* *de leurs probabilités respectives est un des points les plus délicats de la théorie des hasards"* selon Laplace qui fait ici allusion à une démarche d'estimation à partir d'échantillons.

C'est dans de telles situations que le programme indique : lorsque *"les événements élémentaires ne sont pas donnés* a priori, *on les construit en effectuant une partition de la population"*, ce qui conduira à *"définir la probabilité d'un événement par addition de probabilités d'événements élémentaires"*.

Ainsi, la notion est abordée par le programme dans toute sa généralité, intégrant dans les hypothèses du modèle le choix des événements élémentaires et de leurs probabilités.

C'est seulement ensuite que le programme propose le *"cas où les événements élémentaires sont équiprobables"*, ce qui conduit, alors seulement, à la définition pascalienne de la probabilité et aux exercices de dénombrements inhérents.

De la même manière que pour les événements élémentaires, leur ensemble (qui constitue l'univers de référence des probabilistes), n'est ni imposé ni uniquement déterminé par la description de l'expérience aléatoire.

Sa description, qui doit être clairement établie pour travailler sur l'algèbre des événements, relève de l'activité de modélisation et donc de choix de commodités par rapport aux questions qui devront être résolues. On devrait donc voir disparaître des énoncés d'exercices la question rituelle : "déterminer l'ensemble des événements élémentaires" pour être remplacée par : "faire le choix d'un univers susceptible de décrire l'expérience aléatoire".

VIII – Notion de probabilité

Elle se dégage donc de manière très intuitive du modèle de l'urne :

Si dans une population il y a une proportion p d'individus ayant le caractère A , en tirant un individu "au hasard" de cette population, la probabilité pour qu'il soit de caractère A est *précisément* p . Remarquons que :

$$p = \frac{\text{nombre d'individus de caractère A}}{\text{taille de la population}}$$

et que l'approche fréquentiste à ce niveau est très proche de la notion pascalienne dans le cas où la taille de la population est connue.

Ainsi, dans la description de séries classées, les probabilités des événements associés aux classes, réalisés au cours de l'expérience aléatoire de prélèvement au hasard de l'une des observations, sont données par les fréquences des classes.

La relation probabilité-fréquence s'établit ici très simplement. La situation est moins simple lorsque l'étude statistique doit servir à "estimer" les probabilités associées à la réalisation ultérieure d'une autre expérience aléatoire.

C'est le problème par exemple d'une compagnie d'assurance qui utilise la statistique d'une année pour établir ses prévisions pour l'année suivante, basées sur les probabilités qu'un véhicule assuré aura 0 , 1 , 2 , 3 (ou plus) accidents.

Se pose alors la question de la taille de la population décrite par la statistique et de la *"stabilité des fréquences observées"* lorsque l'on reporte sur une autre population les résultats observés.

IX – Répétition d'une expérience aléatoire un grand nombre de fois

C'est ici un objectif particulier du programme que d'associer aussi la notion de probabilité d'un événement à la fréquence stabilisée de cet événement au cours d'un grand nombre d'expériences identiques.

Difficultés conceptuelles :

Les spécialistes y verront la manifestation de la loi des grands nombres, tout en pesant les difficultés épistémologiques qui lui sont inhérentes (voir D'Alembert) et les difficultés didactiques d'un énoncé précis à ce niveau. Ils regrettent néanmoins (commission inter Irem) que le programme n'aille pas au bout de sa démarche et mette cette loi hors programme en terminale.

Déjà en première, la notion de série statistique associée à une expérience aléatoire répétée est source de difficultés intrinsèques. Il est bon de s'y arrêter quelques instants.

Prenons la situation simple du pile ou face. L'objectif d'introduire la probabilité 1/2 par l'observation de la fréquence de piles obtenus sur un grand nombre de lancers se heurte à de nombreuses difficultés conceptuelles. Les lancers réalisés pour l'étude statistique, aussi grand soit leur nombre, ne représentent qu'un "échantillon" de ceux passés et à venir que l'on doit considérer. D'où les questions :

Peut-on considérer comme une population l'ensemble des lancers possibles, réalisés ou potentiels ? Elle serait alors infinie. Peut-on parler de proportion des "pile" dans cette population ? Quelles extrapolations permettent l'échantillon observé ? La taille (infinie ?) de la population a-t-elle une influence sur la représentativité et la fiabilité de l'échantillon ? (on sait que non, mais ce n'est pas intuitif).

Si les questions précédentes peuvent être clarifiées, on est placé devant un problème d'estimation : dans quelle mesure les 48,5 % de "pile" observés justifient-ils le 0,5 attribué à la probabilité du "pile" ? Problème pas très difficile, du niveau BTS, mais exclu en classe de première sur le plan conceptuel même. Au fait, pourquoi 0,5 et non 0,49 ? (la pièce est peut-être truquée !).

Cohérence des concepts :

Ainsi la fréquence observée sur un grand nombre d'expériences ne permet pas d'introduire la notion de probabilité. Celle-ci doit être conçue au préalable pour donner du sens justement à l'observation de la stabilité de cette fréquence.

Le programme propose néanmoins *"l'observation de la stabilité approximative de la fréquence f_n d'un événement donné lorsque l'expérience est répétée un grand nombre n de fois".*

Il ne s'agit donc pas d'établir une estimation de la probabilité p limite. D'ailleurs dans ce cas, la meilleure estimation est la fréquence observée pour le plus grand nombre d'expériences, et l'on n'a que faire de sa stabilisation.

De plus, et le programme le précise, cette stabilisation ne peut être qu'approximative ou "*relative* ". En effet, la convergence de f_n vers p n'est pas monotone : avec $p = 1/2$, il y a une chance sur 2 pour qu'au prochain tirage f_n s'éloigne de p .

Il convient cependant d'habituer les élèves à cette stabilité relative, de leur faire apprécier le nombre n d'expériences nécessaires pour l'observer et de leur donner confiance dans l'approche fréquentiste. Celle-ci, en effet, correspond mieux à la pratique sociale et à l'usage actuel en statistiques dans l'induction suivante : si dans un échantillon assez vaste, pris au hasard dans une population, j'observe une proportion p d'éléments de caractère A , le choix au hasard d'un autre élément de la population donnera A avec la probabilité p .

Cette pratique imagine donc la répétition de l'expérience une fois de plus et suppose la stabilité de la fréquence observée dès que l'échantillon préalable est assez grand.

Le programme propose donc une telle observation, concrètement, si on poursuit toujours l'objectif de privilégier l'activité de l'élève comme support à sa conceptualisation.

Une expérience aléatoire simple étant déterminée, on s'intéresse donc à la réalisation d'un événement A .

Pour le moment, il n'y a pas de série statistique associée et la rédaction du programme est maladroite : "*pour des séries associées à une expérience aléatoire...*"

On devrait écrire : "*pour une série statistique associée à la répétition d'une expérience aléatoire...*"

On réalise donc une suite (indicée par n) d'expériences aléatoires et on note pour chacune (par 0 ou 1 par exemple) la réalisation de l'événement A . Pour chaque indice n on obtient alors une série statistique à 2 classes (0 et 1) avec les effectifs correspondants.

Pour tout n , on peut calculer la fréquence de réalisations de A observées depuis le début de l'expérimentation.

On obtient ainsi une suite f_n de fréquences dont on peut étudier graphiquement la "convergence" ou plus exactement, selon les termes du programme, "*la relative stabilité*" au voisinage de la probabilité p de l'événement A .

Expérimentation en première :

Pour l'illustration de cette propriété, on pourra se reporter à la deuxième partie de cet article présentant un compte rendu d'expérimentation dans une classe de 1ère S :

Dans cette expérimentation, pour donner une idée des ordres de grandeur (du n et de la proximité de f_n à p associée), utilisant une table de nombres au hasard, on a modélisé 1000 lancers de deux pièces (annexe 2), reprenant l'exemple célèbre de Laplace : probabilité d'amener "croix" (nous dirons face) une fois au moins en deux coups.

"*On peut ne compter à ce jeu que trois cas différents, savoir : croix au premier coup, ce qui dispense d'en jouer un second ;*

pile au premier coup et croix au second ; enfin pile au premier et au second coup. Cela réduirait la probabilité à 2/3, si l'on considérait avec D'Alembert ces trois cas comme également possibles. Mais il est visible que la probabilité d'amener croix au premier coup est 1/2, tandis que celle des deux autres cas est 1/4." [4, p. 39]

Les trois suites des fréquences ainsi obtenues "lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois" ont été représentées sur un graphique (annexe 2), dont les lignes polygonales donnent une idée de cette "*relative stabilisation*". Avec une autre expérimentation, on obtiendrait un autre aperçu des ordres de grandeur évoqués. (2)

Deuxième partie : expérimentation du nouveau programme en première S

Les phrases écrites en caractères gras à l'intérieur des paragraphes sont des "mises au point", c'est à dire des conclusions de débats, à la fin desquels l'enseignant donne une définition ou une propriété, à l'occasion de la situation étudiée. L'"institutionnalisation", dans laquelle définitions et propriétés sont "décontextualisées" vient plus tard.

PREMIERE SEANCE (2 heures)

I - Test individuel :

Pour faire émerger les conceptions spontanées des élèves, un test individuel, par écrit, leur est proposé (durée 20 mn) :

Première question : *Voici des informations (cf. page suivante) sur les résultats du tirage du loto : nombre de sorties (en "bon numéro") de chaque numéro dans les 1123 jeux de loto passés inscrit sur la deuxième ligne de chaque tableau, et nombre de sorties (en "bon numéro") de chaque numéro dans les 20 derniers tirages inscrits sur la troisième ligne de chaque tableau.*

a) **Ces informations te sont-elles utiles pour jouer la prochaine fois ?**

27 élèves répondent NON ; 4 réponses OUI.

b) **Si oui, quels numéros joueras-tu la prochaine fois ?**

Les 4 jouent les numéros sortis le plus souvent.

Deuxième question : *Penses-tu quelque chose de ces affirmations ? Si oui, dis ce que tu en penses.*

a) **"il y a une chance sur deux pour qu'il fasse beau demain"**

15 répondent OUI dont 2 "vrai mais stupide comme question". Par exemple : "oui, il fait beau ou il fait mauvais".
1 "ça ne veut rien dire" ; 1 "basé sur rien".
7 NON ("car la météo a dit..." ou "il y a aussi temps variable").
7 ne répondent pas.

(2) *Question subsidiaire :* est -ce que cette expérience donne tort à D'Alembert ? Pourquoi ne l'a t-il pas faite ou l'a t-il rejetée ? (en effet, selon J. Neveu, il s'est entêté dans son erreur au point de se ridiculiser).

boules	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
sorties	132	134	134	132	136	134	140	146	123	122	127	139	119	136	144	154	126
20 tirages	7	1	5	2	5	2	1	4	1	4	3	1	2	4	4	4	3

boules	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
sorties	148	150	146	140	137	133	152	141	144	133	140	129	130	138	132	126
20 tirages	3	3	0	4	2	3	3	2	2	3	1	2	6	3	2	4

boules	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
sorties	150	130	142	152	165	129	154	123	130	134	126	148	131	117	154	150
20 tirages	3	1	4	3	6	4	3	2	1	2	2	4	0	1	3	4

Résultats de 1123 jeux de loto.

b) **"si je lance deux pièces de un franc, j'ai une chance sur trois de voir 1 *pile* et 1 *face*."**

19 OUI (soit 2 "pile" soit 2 "face" soit "pile" "face").
9 NON dont 5 sans explication, 3 "mal" justifiés ("on peut n'avoir que des piles", ou "elles peuvent tomber plus d'une fois sur la même face" ou "car il n'y a que deux pièces").
1 "bien justifié" ("les possibilités sont pp, pf, fp, ff donc 2 sur 4 pour pf").
3 ne répondent pas.

c) **"Il y a une chance sur deux pour que, en désignant au hasard une femme parmi toutes les femmes enceintes, elle accouche d'une fille".**

18 OUI (dont un : "mais peut-être pas avec les chromosomes").
5 NON ("les statistiques prouvent qu'il naît plus de garçons que de filles" ou "pas de sens").
1 "vrai mais stupide", 1 "il faut voir sur une année".
6 ne répondent pas.

II - Commentaires, discussion, mise au point.

A propos de la première question, ceux qui ont répondu "NON" affirment que ce qui s'est passé dans les tirages précédents n'a aucune influence sur le prochain tirage, et que "c'est le hasard".

A propos de la deuxième question, on arrive à l'idée que les phrases dans lesquelles l'événement considéré n'est pas lié à une expérience aléatoire répétable, reproductible, n'ont pas de sens.

D'où une mise au point sur la notion d'**expérience aléatoire** dont on étudie les **événements** et les **probabilités** associées (et non plus la "chance").

Conditions pour qu'une expérience soit aléatoire:

- **l'ensemble des résultats possibles est bien exprimable.**
- **l'expérience est reproductible dans les mêmes conditions.**
- **le résultat n'est pas prévisible à l'avance.**

Exemple : dans le tirage d'une boule de loto, (expérience aléatoire) on parlera de la "probabilité" de l'événement "tirer le 8". Certains élèves proposent alors d'utiliser, pour la déterminer, la fréquence de sortie du 8 dans les tirages précédents. Cette interprétation est remise à plus tard. Dans l'immédiat la classe va travailler sur l'expérience "tirer, au hasard, un individu d'une population qui a été classée suivant un caractère".

III - Exemples d'étude d'expériences aléatoires.

a) Les arbres dans la forêt.

Une forêt contient 1000 arbres de 6 essences différentes, qu'on a dénombrées. On trouve 200 hêtres, 30 chênes, 10 bouleaux, 50 sapins, 700 épicéas et 10 frênes. On désire tirer "au hasard" un des 1000 arbres.

1) Quelle proposition faites vous pour cela ?

2) Quelle est la probabilité de l'événement "tirer un hêtre" ou plus simplement probabilité de "hêtre" puis probabilité de "frêne" puis..., etc. ?

3) Quelle est la probabilité de l'événement "tirer un conifère", puis de l'événement "tirer un arbre qui n'est pas un conifère" ?

Dans la classe, une proposition est immédiatement faite pour répondre à la première question: "*on numérote les arbres, on écrit leurs numéros sur 1000 morceaux de papier qu'on met dans une grande boîte, on remue bien et on fait tirer par une main innocente* ". Toute la classe accepte.

Pour la deuxième question, les élèves parlent, les uns de "proportion" des hêtres dans la population, les autres de leur "fréquence" correspondant à l'effectif indiqué. Tous donnent un résultat qui s'exprime soit sous la forme "200 chances sur 1000", soit "200/1000", soit "1/5", soit "20%". Une mise au point est faite alors :

On s'exprimera de la façon suivante : *La probabilité de tirer un hêtre est égale à 0,2* ; le calcul qui y conduit entraîne qu'elle est nécessairement comprise entre 0 et 1. On note P(H) = 0,2 où H désigne l'ensemble des hêtres. Dans l'interprétation en probabilité, H représente l'événement : "tirer un hêtre".

Les élèves complètent :

P(S) = ... , P(B) = ... , etc.

Pour calculer l'événement "tirer un conifère", ils ajoutent sans hésitation P(S) à P(E). Il est alors précisé que :

L'événement "tirer un conifère" est représenté par la réunion de S et de E, et que S et E étant disjoints, $P(S \cup E) = P(S) + P(E)$.

Pour obtenir la probabilité de l'événement "tirer un arbre qui n'est pas un conifère" ils calculent :

P(H) + P(B) + P(C) + P(F) .

On remarque alors que c'est aussi :

$1 - P(S \cup E) = 1 - P(\text{Conif})$;

on notera :

$P(\overline{\text{Conif}}) = 1 - P(\text{Conif})$, où $\overline{\text{Conif}}$ désigne la partie complémentaire de Conif, dans l'ensemble des 1000 arbres.

Les élèves ne comprennent pas la question supplémentaire : "*est-il nécessaire de* *connaître le nombre d'arbres de la forêt et celui de chaque essence pour répondre aux questions ?*", qui avait comme objectif de mettre en évidence cet élément essentiel qu'est la fréquence.

La probabilité d'un événement A , dans ce cas, est introduite par :

$$\mathbf{P(A) = f_A}$$

où f_A désigne la fréquence du caractère A dans la population.

b) Jeu de pile ou face avec deux pièces.

On revient à la question 2b) du test : "*si je lance deux pièces de un franc, j'ai une chance sur trois de voir 1 "pile" et 1 "face"* .

La question reste ouverte : chaque élève doit apporter à la prochaine séance les résultats de 30 à 40 lancers de deux pièces.

DEUXIEME SEANCE (2 heures)

I - Suite de la deuxième étude (pile ou face).

a) Chaque élève annonce le nombre de PP de PF et de FF qu'il a obtenus et quatre élèves additionnent au fur et à mesure le nombre de PP, 4 autres le nombre de PF, etc. La classe propose de calculer les fréquences d'apparition :

on trouve

0,27 pour FF ,
0,213 pour PP ,
0,517 pour PF .

Les élèves proposent "donc" de décider que :

P(PF) = 0,517 ; P(PP) = 0,213 ; P(FF) = 0,27.

Mais, c'est à ce moment qu'intervient l'élève qui avait répondu "non" à la question 2 b) du test , en justifiant correctement sa réponse ; il donne comme argument :

> "*En lançant 2 pièces, on obtient soit PP, soit PF, soit FP, soit FF, alors c'est* logique *de dire que la probabilité de PF est 1/2 puisqu'il y a 2 chances sur 4 de sortir un P et un F*".

b) Les tirages réalisés en utilisant une table de nombres au hasard (cf. la fin de la première partie de cet article : 2 lignes successives représentent les tirages des deux pièces : F si le chiffre est impair, P s'il est pair) sont alors proposés aux élèves (annexe 2). On leur distribue également le graphique qui montre l'évolution des fréquences quand on rajoute des tirages. Il faut un temps d'appropriation de ces graphiques et de leur signification.

C'est à ce moment qu'est faite **la distinction entre "l'estimation" de la probabilité de PF (qui sera d'autant meilleure que les tirages seront nombreux) calculée à partir de n tirages déjà réalisés et *la probabilité* de PF calculée par un raisonnement probabiliste qui tient compte de l'analyse de la situation. Dans le cas présent, "autant de chances" pour (P,P) ; (F,P) ; (P,F) et (F,F), on dira que ces quatre événements sont équiprobables, que leur probabilité est 1/4, et donc :**

$$\mathbf{P(\,1P\ et\ 1F\,) = P(\,(P,F) \cup (F,P)\,) = \\ = P((P,F)) + P((F,P)) = 1/2\,;}$$

et P(2P) = 1/4 et P(2F) = 1/4 .

"Preuve" à l'appui : les estimations se "rapprochent" de 1/2 lorsque le nombre de tirages augmente.

II - Probabilité de tirer la boule numéro n .

Question posée aux élèves : "quelle est la probabilité de tirer la boule n° 27 dans une urne qui contient les 49 boules numérotées de 1 à 49 ?"

Certains reprennent alors le tableau distribué dans le test et calculent 133/1123 qui est égal à 0,1184...

D'autres calculent 1/49 et trouvent donc 0,020... : *"ça ne va pas !"*

Evidemment, la question posée sortait du contexte du jeu du loto, puisque, s'il y a eu 1123 jeux de loto, il y a eu 1123×6 tirages de boules. C'est un élève qui fait remarquer, après ce début d'explication, qu'en outre, ces 6738 tirages ne sont pas tous la même expérience : *"dans les 6 tirages successifs du jeu de loto, la chance de sortie d'une boule augmente, puisqu'il y en a de moins en moins dans l'urne".*

Malgré cela, la plupart calculent 133/6738 et trouvent environ 0,0197 .

Le même raisonnement leur fait trouver environ 0,0177 pour la boule n° 13 ; 0,0245 pour la boule n° 38, etc.

Mais, par un raisonnement probabiliste, on dira :

$$\mathbf{P(40) = P(13) = P(38) = \ldots = 1/49 \approx 0{,}0204}$$

du fait de l'équiprobabilité de chaque événement "élémentaire".

A ce moment de la séquence, les élèves insistent pour apprendre à calculer la probabilité pour que sortent, dans un jeu de loto, les 6 numéros inscrits sur la grille jouée (ce n'était pas prévu dans les deux heures !), par exemple p(G) avec une grille G qui contient les numéros :

27 - 2 - 42 - 10 - 15 - 22 .

Il leur est répondu que, comme plus haut, en faisant l'hypothèse que toutes les grilles sont équiprobables, on calcule cette probabilité en divisant le nombre de résultats qui réalisent l'événement G (ici 1) par le nombre total de résultats "possibles" (ici 13 983 816, qu'ils trouvent à partir de la formule qu'on leur donne du nombre de parties de 6 boules dans l'ensemble des 49 boules).

C'est l'occasion de mentionner un article récent du journal local, qui, à partir de cette probabilité de 1/13983816, "calcule" que chacun de nous a ses chances de gagner en moyenne tous les ... 67 000 ans.

De nombreuses questions subsistent sur "l'équiprobabilité" et le hasard. C'est le moment d'apporter quelques remarques d'ordre épistémologique et de faire la distinction entre le "hasard" de Laplace (l'avenir est déterminé d'avance, mais on a besoin des probabilités pour essayer de deviner ce qui va se passer) et les conceptions modernes du hasard de Monod ou Morin (dans la complexité, les "bifurcations" sont imprévisibles et non prédéterminées). Et, comme une élève avait parlé de "destin", (parmi ceux qui avaient répondu "oui" à la question 1 du test), la lecture de "Jacques le fataliste" de Diderot leur est conseillée.

III - Réinvestissement dans deux exercices simples.

Quelle est la probabililité de tirer dans un jeu de 52 cartes : un roi ? un cœur ? une carte rouge ?

Tous les élèves trouvent sans difficulté.

Quelle est la probabililté, dans le lancer de deux dés, de tirer deux "6" puis de tirer un double ?

Ici, quelques-uns ont des difficultés pour trouver des événements élémentaires équiprobables.

TROISIEME SEANCE (2 Heures)

I - Institutionnalisation

Après les deux premières séquences, il est nécessaire de décontextualiser les concepts abordés. Le "cours", reprenant les termes du programme, est présenté aux élèves. Sa trame est la suivante :

Définitions :

— Expérience aléatoire. Evénement. Evénement certain, impossible. Evénement élémentaire.

— Probabilité d'un événement élémentaire (définition fréquentiste donnée a priori, telle que $\Sigma\, p_i = 1$).

— Probabilité d'un événement (somme des probabilités des événements élémentaires).

Propriétés :

— $P(E) = 1$; $P(0) = 0$.

— $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont incompatibles,

— $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ si A et B sont quelconques.

Définition d'événements équiprobables :

— Probabililité théorique (géométrie du hasard), citation de Laplace. Formule de Pascal.

— Vérification des propriétés. Observation empirique : stabilité de la fréquence quand on répète l'expérience "un grand nombre de fois" (lois du hasard : loi des grands nombres ; justification de la détermination par estimation sur statistiques).

II - Evaluation

L'évaluation d'une courte tâche a été réalisée deux semaines plus tard : dans un bilan, les trois questions sur les probabilités "comptaient pour le quart de la note" et demandaient un travail d'environ une demi-heure. Voici, grossièrement classées, les réponses des élèves et quelques citations précises relevées dans certaines copies.

Première question : On lance trois pièces de 1 franc,

a) Quelle est la probabililté d'obtenir trois "pile"?

— 27 élèves sur 31 donnent la bonne réponse : 1/8, les autres donnent 1/6 ou 1/3 ou 3/4 dans le calcul suivant :

" *on peut avoir :*

$P_1P_2F_3 \to 1/8$; $P_1F_2F_3 \to 1/8$; $P_1F_2P_3 \to 1/8$

$F_1F_2P_3 \to 1/8$; $F_1P_2P_3 \to 1/8$; $F_1P_2F_3 \to 1/8$

donc $6/8 = 3/4$ "

cette élève oublie $F_1F_2F_3 \to 1/8$ et qu'elle obtiendrait alors la probabilité de l'événement contraire.

b) Comment pourrais-tu le vérifier expérimentalement ?

— 21 sur 31 proposent de lancer 3 pièces un grand nombre de fois. Parmi les 21, 13 indiquent qu'ils calculent la fréquence, 7 ne précisent pas ce qu'ils feront des résultats de ces tirages, 1 dit qu' *"il calculerait alors la probabilité"* sans préciser comment.

— 7 lanceraient 3 pièces *"30 fois" ou "30 à 40 fois"* (souvenir de ce que chacun avait réalisé pour le lancer de deux pièces), dont 2 indiquent le calcul du quotient,
2 ne précisent pas, 3 signalent seulement qu'on obtiendrait plus souvent PPF que PPP.

— Quelques citations :

— *"Je pourrais faire 1000 tirages et noter les résultats pour les 4 "cas" possibles (PPP, FFF, 1P2F et 2P1F), et ensuite diviser le nombre de chaque catégorie par le nombre total de tirages (1000) et j'obtiendrais un nombre aux alentours de 0,125 (plus le nombre de tirages est grand, plus le résultat de l'expérience se rapprochera de 0,125)."*

— *"On peut vérifier en faisant l'expérience de lancer de trois pièces ; il faudrait tout de même effectuer un grand nombre de lancers (par exemple 1000) pour avoir un chiffre plus sûr. Une fois ces lancers effectués, relever le nombre de "3P" obtenus, et diviser ce nombre par le nombre total de lancers et vérifier que ce chiffre est égal au quotient 1/8 supposé précédemment."*

— *"On pourrait lancer de nombreuses fois les 3 pièces et tracer une courbe des fréquences : en abscisse, on mettrait le nombre de lancers et en ordonnée la fréquence au bout de x lancers. Ainsi, on pourra remarquer qu'au bout d'un nombre important de lancers, la courbe tendrait à se stabiliser autour de 0,125".*

Deuxième question : dans un lycée, on a classé les élèves suivant leur "langue 2". Voici ce qu'on a obtenu :

Langue 2	Nb d'élèves
Anglais	140
Allemand	225
Espagnol	82
Italien	53
Russe	9

a) Si on prend au hasard un élève dans cette population, quelle est la probabilité pour qu'il étudie l'espagnol comme langue 2 ?

— 1 élève ne répond pas,
— 2 font une erreur : réponse 0,19 (sans calcul) et 1,21% (100/82),
— 28 répondent bien 0,16 après calcul du quotient.

b) Sachant que cet élève tiré au hasard étudie une langue d'origine latine, (italien ou espagnol), quelle est la probabilité pour que ce soit l'espagnol ?

— 1 élève ne répond pas,
— 1 fait une erreur (0,74 sans calcul),
— 29 répondent bien 0,607 ou 0,61.

Troisième question : chaque année en France, les automobilistes qui ont un accident sont dans la proportion de 1/10000.

a) Si je tire au hasard un automobiliste, quelle probabilité a-t-il d'avoir un accident ?

— 25 répondent 1/10 000,
— 6 disent qu'on ne peut pas répondre, 3 parce que l' expérience n'est pas aléatoire, d'après eux :

" ce n'est pas aléatoire, pas répétable"

" l'étude de probabilité ne peut se faire que sur un événement qui peut se reproduire toujours dans les mêmes conditions" 1 pour 10000 des automobilistes ont un accident ; ce n'est pas une "expérience aléatoire" c'est à dire qu'on ne peut pas la répéter à volonté. Un accident, c'est le destin. Et puis, un automobiliste peut très bien avoir moins de chance de faire un accident qu'un autre s'il conduit mieux. Donc il n'y a pas de probabilité pour ce genre de phénomène".

Ces élèves ont vu comme "expérience", ici, l'accident et non pas le tirage au hasard dans une population classée, 3 en donnant d'autres arguments du genre :

– "*un automobiliste, en une année, normalement a une chance sur 10000 d'avoir un accident (statistiquement) mais on ne peut rien dire car tout dépend de la qualité du chauffeur et de sa voiture. Une chance sur 10000, c'est la moyenne".*

b) Ce résultat s'applique-t-il à ton professeur de mathématiques ?

— 10 répondent "*oui, car mon prof est un automobiliste",*
— 5 *"oui s'il a une voiture",*
— 1 *"oui, mais attention ce n'est qu'une probabilité ! ",*
— 6 *"oui s'il est désigné au hasard",*
— 3 *"non, il faudrait qu'il soit tiré au hasard",*
— 2 *"non, ça dépend"* (de sa façon de conduire, etc.),
— 4 ne répondent pas.

EN CONCLUSION de cette courte expérimentation :

Les notions d'expérience aléatoire et d'estimation de la probabilité par observation de la stabilisation de la fréquence d'événements déjà réalisés semblent acquises.

Ces deux séquences ont suscité un vif intérêt et des débats souvent animés chez les élèves. Ces débats ne sont pas tous clos, en particulier le débat "épistémologique" sur la conception du hasard.

Bibliographie

[1] Henri POINCARE. *Calcul des Probabilités*, éditions Jacques Gabay, les grands classiques, Gauthier-Villars 1987.

[2] Inter-Irem épistémologie. *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars 1987.

[3] Jacques BERNOULLI. *Ars Conjectandi*, publication de l'Irem de Rouen, 1987.

[4] Pierre-Simon LAPLACE. *Essai philosophique sur les Probabilités*, Christian Bourgeois éditeur, 1986.

[5] Marquis de CONDORCET. *Eléments de calcul des Probabilités*, publication de l'Irem de Paris VII, 1986.

Annexe 1

PROGRAMMES DE 1991 (B.O. du 2 Mai)

Classes de premières A_1 , B , S , E , F (3)

Au collège et en seconde, les élèves ont étudié la description de séries statistiques à une variable. Le programme des Premières S et E comporte un premier contact avec les probabilités. L'objectif est d'entraîner les élèves à ***décrire quelques expériences aléatoires*** simples, et à ***calculer des probabilités. On évitera tout développement théorique***. Pour introduire la notion de probabilité, on s'appuiera sur l'étude de séries statistiques obtenues par répétition d'une expérience aléatoire, en soulignant les propriétés des fréquences et la relative stabilité de la fréquence d'un événement donné lorsque cette expérience est répétée un grand nombre de fois. La description d'expériences aléatoires amène aussi à organiser des données : on se limitera à ***quelques*** exemples permettant de mettre en valeur les idées, mais ne comportant pas de difficultés combinatoires.

Il est important que les élèves puissent se familiariser avec les probabilités pendant une durée suffisante : L'étude de ce chapitre ne doit pas être bloquée en fin d'année.

Evénement, événements élémentaires ; la probabilité d'un évènement est définie par addition de probabilités d'événements élémentaires. Evénements disjoints (ou incompatibles), événement contraire, réunion et intersection de deux événements.

Cas où les événements élémentaires sont équiprobables.

Seul est au programme le cas où l'ensemble des événements élémentaires est fini.

Les élèves doivent savoir calculer la probabilité de la réunion d'événements disjoints, d'un événement contraire $\bar{A}$, et savoir utiliser la formule reliant les probabilités de $A \cup B$ et de $A \cap B$.

Les notions de probabilité conditionnelle, d'indépendance, de probabilité produit et de variable aléatoire ne sont pas au programme.

Travaux pratiques

Exemples simples d'emplois de partition et de représentations (arbres, tableaux...) pour organiser et dénombrer des données relatives à la description d'une expérience aléatoire.

Exemples simples d'étude de situations de probabilités issues d'expériences aléatoires (modèles d'urnes, jeux...).

L'étude du dénombrement des permutation, arrangements et combinaisons est hors programme.

On s'attachera à étudier des situations permettant de bien saisir la démarche du calcul des probabilités, et non des exemples comportant des difficultés techniques de dénombrement.

Dans certaines situations, par exemple l'étude de caractères d'une population, les événements élémentaires ne sont pas donnés *a priori* ; on les construit en effectuant une partition de la population.

(3) Les programmes des Premières A_2, A_3, F_7, F_8, F_{12}, G et H sont quasiment identiques avec en moins la réunion et l'intersection de deux événements, et la compétence de savoi utiliser la formule reliant les probabilités de $A \cup B$ et de $A \cap B$.

Classes de Terminales

Quelques notions de calcul des probabilités ont été introduites en Première ; en Terminale, on poursuit l'étude de ***phénomènes aléatoires***, en disposant de quelques outils combinatoires (***arrangements, combinaisons***) et de nouveaux concepts probabilistes (***variables aléatoires, conditionnement***). Comme en Première, on s'attachera à étudier des situations permettant de bien saisir la démarche du calcul des probabilités et non des exemples comportant des difficultés techniques de dénombrement.

Le programme se limite à des ensembles ***finis*** ; toute théorie formalisée est exclue. Les notions de probabilité produit et d'indépendance de deux variables aléatoires sont hors programme. Aussi bien pour les variables aléatoires que pour les probabilités conditionnelles, ***le programme ne porte que sur l'étude d'exemples.***

a) **Variable aléatoire** (réelle) prenant un nombre fini de valeurs et loi de probabilité associée; fonction de répartition, espérance mathématique, variance, écart-type.

b) **Probabilité conditionnelle** d'un événement par rapport à un événement de probabilité non nulle ; relation $p(A \cap B)=p(A|B)p(B)$.

Indépendance de deux événements.

Formule des probabilités totales : étant donné des événements $B_1, B_2, \dots, B_n$ constituant une partition de E, pour tout événement A,

$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \dots + p(A \cap B_n)$$

et, pour tout k : $p(A \cap B_k) = p(A|B_k)\, p(B_k)$.

On prendra un point de vue très simple : certaines situations de probabilité s'expriment commodément par l'affectation de probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$ aux valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ d'une grandeur numérique X associée à une expérience aléatoire ; on dit alors que X est une variable aléatoire. Les événements $(X=x_1)$, $(X=x_2)$, ... , $(X=x_n)$ sont les événemnents élémentaires de la loi de probabilité de X . Pour la fonction de répartition, on emploiera la convention $F(x)=p(X \leq x)$. L'étude d'expériences aléatoires bien choisies (situations d'équiprobabilité,...) amène à définir la probabilité de A sachant que B est réalisé, notée $p_B(A)$ ou encore $p(A|B)$, par la relation :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Tout développement théorique sur cette notion est exclu. On mettra en évidence son utilité en observant que, dans de nombreuses situations, on connaît les probabilités conditionnelles de A par rapport aux événements B_k, ce qui permet de calculer p(A) grâce à la formule des probabilités totales. La formule de Bayes est hors programme.

Travaux pratiques

Exemples simples d'emploi de partitions et de représentations (arbres, tableaux...) pour organiser et dénombrer des données.
Exemples d'étude de situations de probabilités issues d'expériences aléatoires (modèles d'urnes, jeux, schéma de Bernoulli,...).
Exemples simples de description et d'étude d'expériences aléatoires à l'aide d'une variable aléatoire.

Lorsque l'étude d'une situation nécessite l'emploi d'une variable aléatoire ou de probabilités conditionnelles, des indications doivent être données sur la méthode à suivre. En outre, pour l'exploitation des probabilités conditionnelles on se bornera à des exemples où la partition $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ utilisée comporte au plus quatre éléments.

Annexe 2

JETS DE DEUX PIECES : EXPERIENCE REPETEE 1000 FOIS

Tous les 50 jets, on a dénombré les effectifs des trois éventualités : Pile et Pile ; Face et Face ; Pile et Face, et indiqué les fréquences correspondantes.

de **1** à **50**	**P P**	**F F**	**P F**
effectifs	7	13	30
fréquences	0,14	0,26	0,60
En	7	13	30
Fn	0,14	0,26	0,60

de **51** à **100**	**P P**	**F F**	**P F**
effectifs	12	12	26
fréquences	0,24	0,24	0,52
En	19	25	56
Fn	0,19	0,25	0,56

de **101** à **150**	**P P**	**F F**	**P F**
effectifs	13	16	21
fréquences	0,26	0,32	0,42
En	32	41	77
Fn	0,213	0,273	0,514

de **151** à **200**	**P P**	**F F**	**P F**
effectifs	11	10	29
fréquences	0,22	0,20	0,58
En	43	51	106
Fn	0,215	0,255	0,53

de **201** à **250**	**P P**	**F F**	**P F**
effectifs	13	14	23
fréquences	0,26	0,28	0,46
En	56	65	129
Fn	0,224	0,26	0,516

de **251** à **300**	**P P**	**F F**	**P F**
effectifs	10	19	21
fréquences	0,20	0,38	0,42
En	66	84	150
Fn	0,22	0,28	0,50

de **301** à **350**	**P P**	**F F**	**P F**
effectifs	16	14	20
fréquences	0,32	0,28	0,40
En	82	98	170
Fn	0,234	0,28	0,486

de **351** à **400**	**P P**	**F F**	**P F**
effectifs	14	12	24
fréquences	0,28	0,24	0,48
En	96	110	194
Fn	0,24	0,275	0,485

de **401** à **450**	**P P**	**F F**	**P F**
effectifs	17	12	21
fréquences	0,34	0,24	0,42
En	113	122	215
Fn	0,251	0,271	0,478

de **451** à **500**	**P P**	**F F**	**P F**
effectifs	10	15	25
fréquences	0,20	0,30	0,50
En	123	137	240
Fn	0,246	0,274	0,48

Dans la deuxième partie des tableaux, on trouve les nombres E_n et les fréquences F_n de réalisations de ces trois événements depuis le début de l'expérimentation.

de **501** à **550**	**P P**	**F F**	**P F**
effectifs	18	13	19
fréquences	0,36	0,26	0,38
En	141	150	259
Fn	0,256	0,273	0,471

de **551** à **600**	**P P**	**F F**	**P F**
effectifs	13	13	24
fréquences	0,26	0,26	0,48
En	154	163	283
Fn	0,257	0,272	0,471

de **601** à **650**	**P P**	**F F**	**P F**
effectifs	13	9	28
fréquences	0,26	0,18	0,56
En	167	172	311
Fn	0,257	0,265	0,478

de **651** à **700**	**P P**	**F F**	**P F**
effectifs	11	14	25
fréquences	0,22	0,28	0,50
En	178	186	336
Fn	0,254	0,266	0,48

de **701** à **750**	**P P**	**F F**	**P F**
effectifs	9	18	23
fréquences	0,18	0,36	0,46
En	187	204	359
Fn	0,249	0,272	0,479

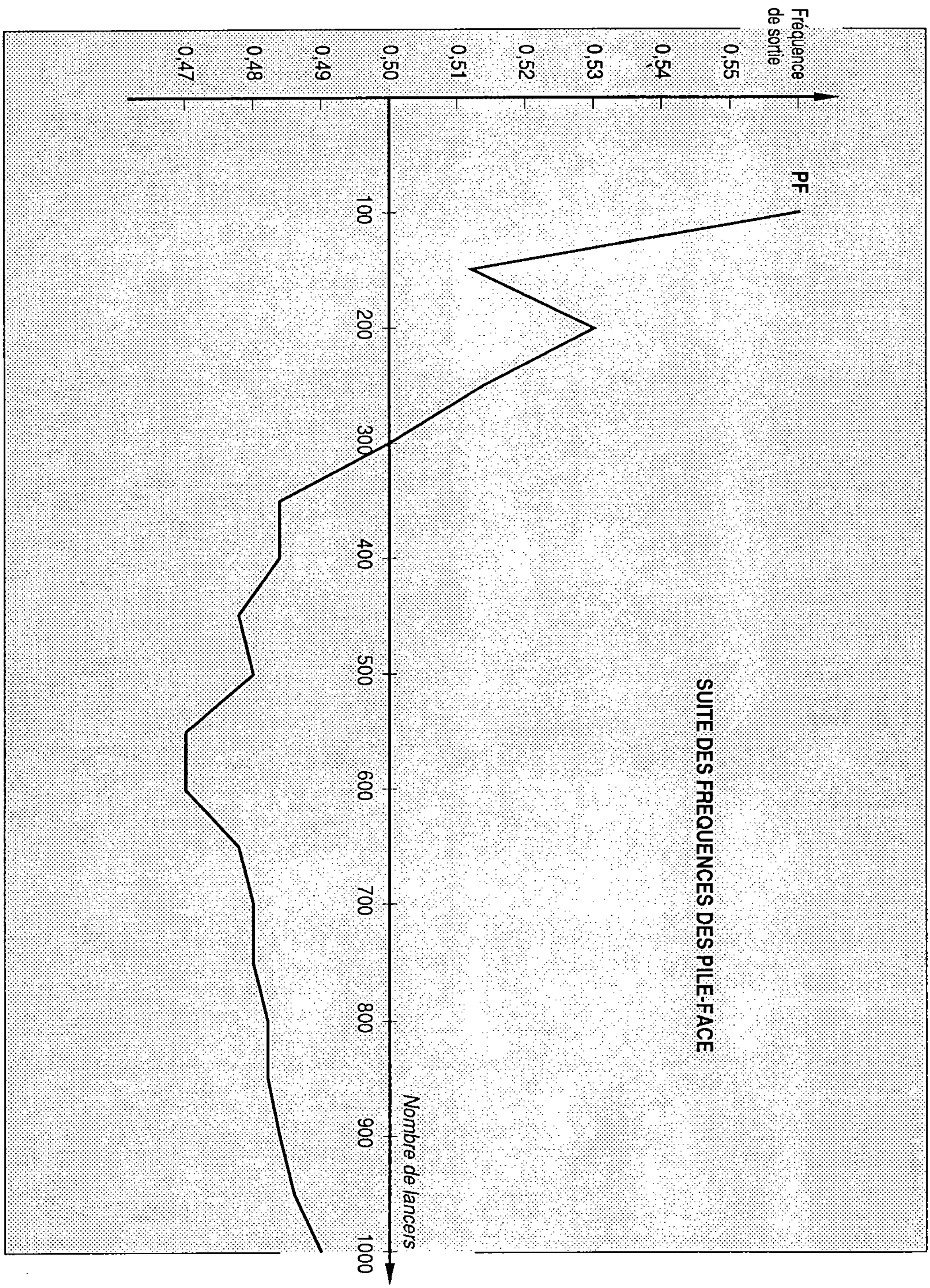
de **751** à **800**	**P P**	**F F**	**P F**
effectifs	14	10	26
fréquences	0,28	0,20	0,52
En	201	214	385
Fn	0,251	0,268	0,481

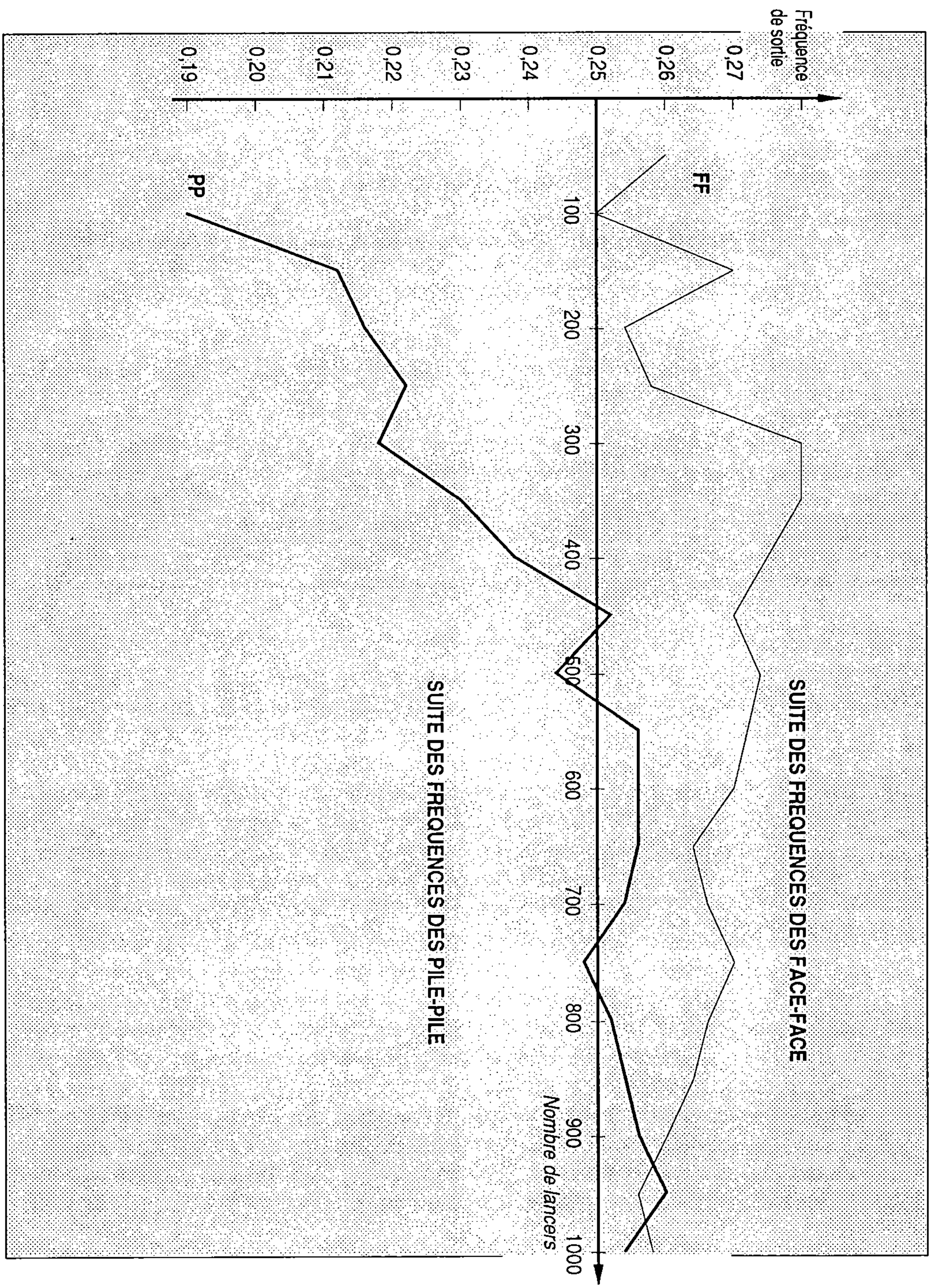
de **801** à **850**	**P P**	**F F**	**P F**
effectifs	14	13	23
fréquences	0,28	0,26	0,46
En	215	227	408
Fn	0,253	0,267	0,48

de **851** à **900**	**P P**	**F F**	**P F**
effectifs	15	9	26
fréquences	0,30	0,18	0,52
En	230	236	434
Fn	0,256	0,262	0,482

de **901** à **950**	**P P**	**F F**	**P F**
effectifs	16	7	27
fréquences	0,32	0,14	0,54
En	246	243	461
Fn	0,259	0,256	0,485

de **951** à **1000**	**P P**	**F F**	**P F**
effectifs	8	14	28
fréquences	0,16	0,28	0,56
En	254	257	489
Fn	0,254	0,257	0,489


SUITE DES FREQUENCES DES PILE-FACE
Fréquence de sortie
0,47
0,48
0,49
0,50
0,51
0,52
0,53
0,54
0,55
PF
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
Nombre de lancers


Fréquence de sortie
0,19
0,20
0,21
0,22
0,23
0,24
0,25
0,26
0,27
FF
PP
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
Nombre de lancers
SUITE DES FREQUENCES DES FACE-FACE
SUITE DES FREQUENCES DES PILE-PILE

Annexe 3

TABLE DE NOMBRES AU HASARD, EQUIREPARTIS

Mode d'emploi :

Pour tirer une suite de chiffres de 0 à 9, simulant un tirage au hasard, il suffit de se placer en un endroit quelconque de la table (initialisation) et de suivre en ligne ou en colonne. Tout tirage systématique, comme un chiffre sur n par exemple, est valable.

Pour tirer des nombres quelconques, il suffit de tirer successivement au hasard les chiffres composant ces nombres.

Pour tirer des couples de 0 ou 1 (piles ou faces), on a couplé les lignes deux à deux, en commençant par les deux premières, en prenant :

P = pair = 0 et **F** = impair = 1 .

03991	10461	93716	16894	98953	73231	39528	72484	82474	25593	17546	73704	92052	46215	15917	06253	07586	16120	82641	22820
38555	95554	32886	59780	09958	18065	81616	18711	53342	44276	32643	52861	95819	06831	19640	99413	90767	04235	13574	17200
69572	68777	39510	35905	85244	35159	40188	28193	29593	88627	61196	30231	92962	61773	22109	78508	63439	75363	44989	16822
24122	66591	27699	06494	03152	19121	34414	82157	86887	55087	30532	21704	10274	12202	94205	20380	67049	09070	93399	45547
03788	97599	75867	20717	82037	10268	79495	04146	52162	90286	88618	19161	41290	67312	71857	15957	48545	35247	18619	13674
48228	63379	85783	47619	87481	37220	91704	30552	04737	21031	27954	58909	82444	99005	04921	73701	92904	13141	32392	19763
80863	00514	20247	81759	45197	25332	69902	63742	78464	22501	90899	75754	60833	25983	01291	41349	19152	00023	12302	80783
33564	60780	48460	85558	15191	18782	94972	11598	62095	36787	78038	70267	43529	06318	38384	74761	36024	00867	76378	41605
55986	66485	88722	56736	66164	49431	94458	74284	05041	49807	16818	60311	74457	90561	72848	11834	75051	93029	47665	64382
87539	08823	94813	31900	54155	83436	54158	34243	46978	35482	34677	58300	74910	64345	19325	81549	60365	94653	35075	33949
16520	69676	11654	99893	02181	68161	19322	53845	57620	52606	79375	95220	01159	63267	10622	48391	31751	57260	68980	05339
68652	27376	92852	55866	88448	03584	11220	94747	07399	37408	33521	26665	55823	47641	86225	31704	88492	99382	14454	04504
59589	49067	66821	41575	49767	04037	30934	47744	07481	83828	59404	72059	43947	51680	43852	59693	78212	16993	35902	91386
20554	91409	96277	48257	50816	97616	22888	48893	27499	98748	42614	29297	01918	28316	25163	01889	70014	15021	68971	11403
34994	41374	70071	14736	65251	07629	37239	38295	18477	65622	66497	68646	78138	66559	64397	11692	05327	82162	83745	22567
99385	41600	11133	07586	36815	43625	18637	37509	14707	93997	48509	23929	27482	45476	04515	25624	95096	67946	16930	33361
15470	48355	88651	22596	83761	60873	43253	84145	20368	07126	73788	06533	28597	20405	51321	92246	80088	77074	66919	31678
20094	98977	74843	93413	14387	06345	80854	09279	41196	37480	60530	45128	74022	84617	72472	00008	80890	18002	35352	54131
44372	15486	65741	14014	05466	55306	93128	18404	79982	68416	58319	15997	08355	60860	29735	47762	46352	33049	69248	93460
18611	19241	66083	24653	84609	58232	41819	84547	46850	52326	61199	67940	55121	29281	59076	07936	11087	96294	14013	31792