REPERES - IREM. n°7 - avril 1992

A PROPOS DE LA DEMONSTRATION EN GEOMETRIE DE CINQUIEME

Michèle MUNIGLIA
Irem de Lorraine

« L'attracteur carré ... »

Dans le n° 1 de "REPERES", Jean Houdebine donne à son article traitant de la démonstration un titre qui résume le dilemme posé à la plupart des professeurs de mathématiques :

"démontrer ou ne pas démontrer,
voilà la question". (1)

Les programmes et le corps enseignant me semblent avoir déjà répondu ...

Confrontés au balancier de l'histoire, les programmes sont passés d'une attitude à l'autre : chacun sait l'importance donnée à la démonstration dans les mathématiques modernes des programmes de 1970, et chacun devrait aussi connaître — du moins selon les directives des inspecteurs de mon académie — l'interdit qui règne dans les programmes actuels ... : "*ce n'est que dans le programme de quatrième qu'il s'agit d'introduire petit à petit des démonstrations n'excédant pas une étape, et si, en troisième, deux étapes sont tolérées, encore faut-il qu'elles soient préparées*".

Soumis à ce flux et ce reflux pendulaires, les professeurs se raccrochent à ce qu'ils pensent être, en leur for intérieur, la finalité sociologique de leur vocation. Et il n'est pas nécessaire de les observer bien longtemps pour constater que la plupart "s'accrochent à la démonstration", ... tout en étant prêts à s'accommoder de tous les méandres des instructions officielles ... Il leur suffit, au fond, de *poser des problèmes à leurs élèves* « dans le but avoué mais secondaire qu'ils en trouvent la solution et dans le but primordial mais inavouable qu'ils s'entraînent aussi à raisonner ! » (2)

(1) J. HOUDEBINE. *"Démontrer ou ne pas démontrer voilà la question"*, Repères n°1 octobre 1990.

(2) cf. Pierre GAGNAIRE. *"A propos des mathématiques modernes"*, Repères n°4 juillet 1991.

Dans le cadre du débat ouvert par Houdebine, je voudrais présenter ici quelques réflexions à propos d'une activité sur le raisonnement géométrique en classe de cinquième, car l'histoire de cette activité me semble illustrer de façon saisissante aussi bien le comportement des élèves que celui des professeurs autour d'un sujet classique : la *caractérisation du rectangle*.

Vous trouverez donc tout d'abord ici la séquence telle qu'elle a été présentée aux élèves, puis une description aussi fidèle que possible de son déroulement dans ma classe de cinquième.

A partir des réactions des élèves, mais aussi de professeurs, je tenterai ensuite de dégager quelques remarques sur le fond.

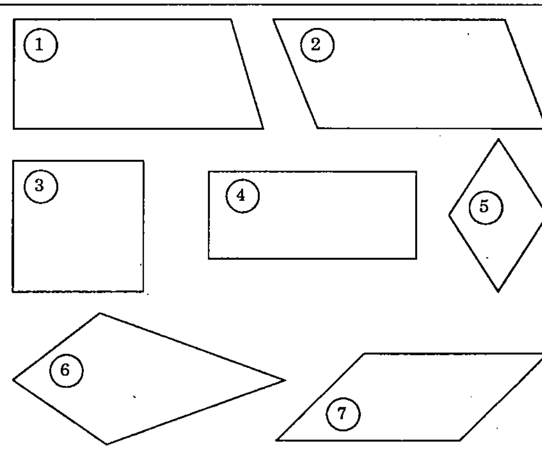
Il m'apparaît, en effet, que les difficultés essentielles ne résident peut-être pas uniquement au niveau de l'*acquisition de la démonstration* : car bien que le sujet soit particulièrement classique, voire banal, il entraîne des difficultés sur des aspects tout à fait marginaux dont on ne soupçonne pas nécessairement l'importance et qu'il faudrait pourtant pouvoir *mettre à plat* si l'on veut cerner de façon plus globale le problème de la démonstration.

1. La séquence proprement dite

1 Indiquez la nature de chacun des quadrilatères ci-contre en marquant une croix dans les cases convenables du tableau.

Attention ! *Tout le groupe doit être d'accord* ***avant de marquer*** *les réponses dans le tableau.*

(si c'est nécessaire, un quadrilatère peut avoir plusieurs croix)

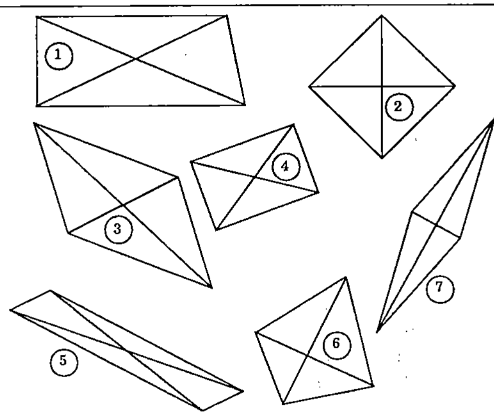


Quadrilatère n°	1	2	3	4	5	6	7
Carré							
Losange							
Rectangle							
Parallélogramme							

2 En utilisant au besoin les instruments (équerre, double-décimètre, rapporteur...), trouvez la nature de chacun des quadrilatères ci-contre.

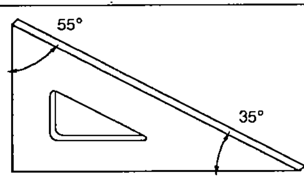
Indiquez les résultats dans les cases convenables du tableau.

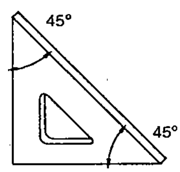
Attention ! *Tout le groupe doit être d'accord* ***avant de marquer*** *les réponses dans le tableau.*



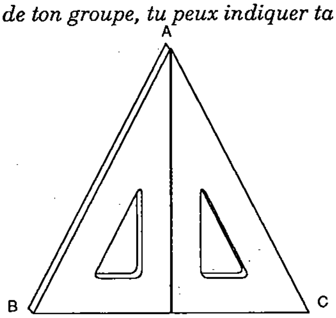
Quadrilatère n°	1	2	3	4	5	6	7
Carré							
Losange							
Rectangle							
Parallélogramme							

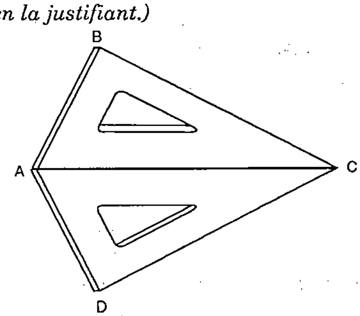
Nous disposons de plusieurs équerres identiques à l'une des deux qui sont dessinées ci-contre. *(Les angles des dessins ne sont pas exactement les mêmes que dans la réalité, on ne peut donc pas mesurer les angles sur les figures)*





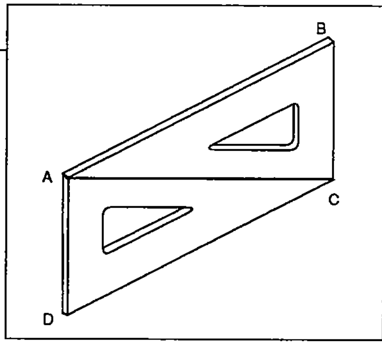
3 Avec des équerres du premier modèle, nous avons réalisé certaines figures géométriques. Compléter *(en groupe)* les tableaux ci-dessous. *(Si tu n'es pas d'accord avec les camarades de ton groupe, tu peux indiquer ta propre réponse en la justifiant.)*



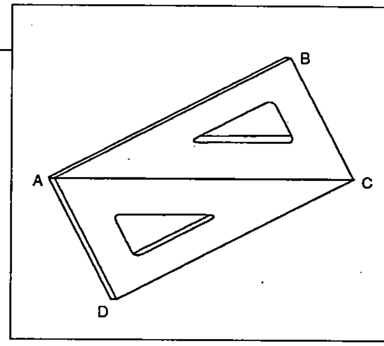


Quelle est la nature du triangle ABC ? ....
Pourquoi ? ....
....

Quelles sont les égalités entre les côtés du quadrilatère ABCD ? ....
ABCD est-il un rectangle ? Pourquoi ?
....

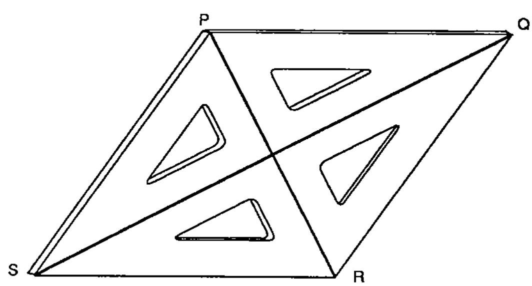


Quelles sont les égalités entre les côtés du quadrilatère ABCD ? ....
Quelle est la nature de ABCD ?
....

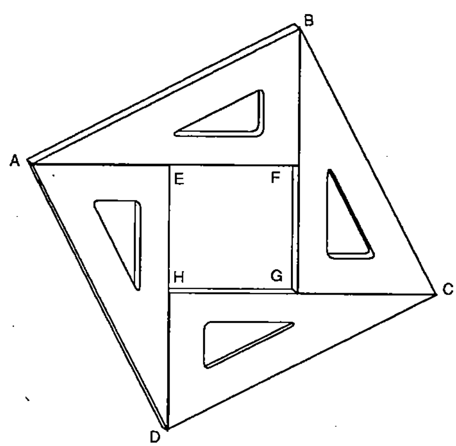


Quelles sont les mesures des angles du quadrilatère ABCD ? ....
ABCD est-il un rectangle ? Pourquoi ?
....

4 Toujours avec des équerres du premier modèle, nous avons réalisé les quadrilatères suivants. Complétez *(en groupe)* les tableaux ci-dessous. *(Si tu n'es pas d'accord avec les camarades de ton groupe, tu peux indiquer ta propre réponse en la justifiant.)*



Quelles sont les égalités entre les côtés du quadrilatère PQRS ? ....
Quelle est la nature de PQRS ?
....



Quelles sont les égalités entre les côtés du quadrilatère ABCD ? ....
....
Quels sont les angles de ABCD ?
....
....
Quelle est la nature de ABCD ?
....

Quelle est la nature du quadrilatère EFGH ? ....
Pourquoi ? ....
....

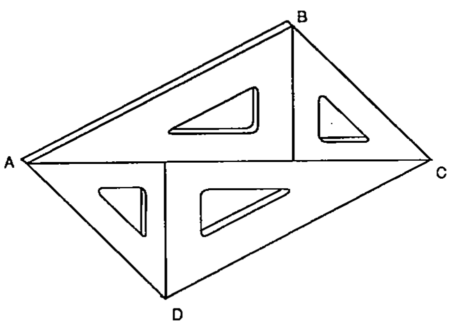
5 Avec des équerres des deux modèles, nous avons réalisé le quadrilatère ci-dessous.

ABCD est-il un parallélogramme ? ......

ABCD est-il un rectangle ? Pourquoi ?

....

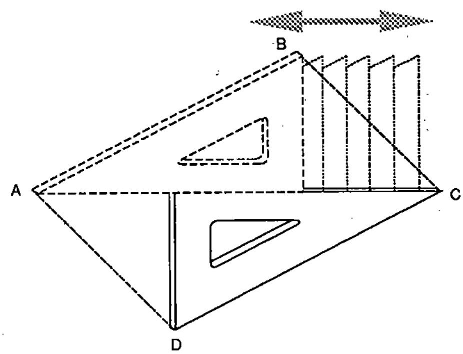
....



6 Dans la figure précédente, nous avons supprimé les deux petites équerres et gardé les deux grandes.

Comment faut-il faire glisser l'équerre du dessus pour que le quadrilatère ABCD devienne un rectangle ?

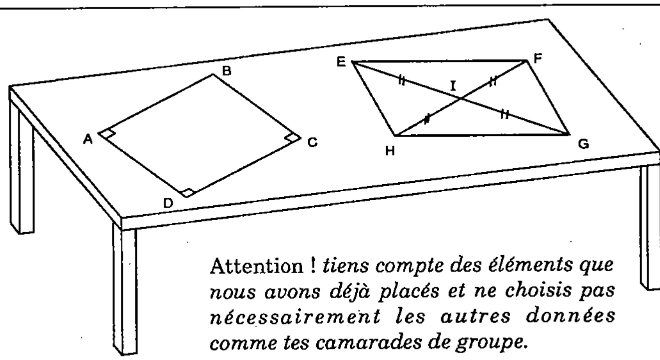
Dessine soigneusement le résultat.



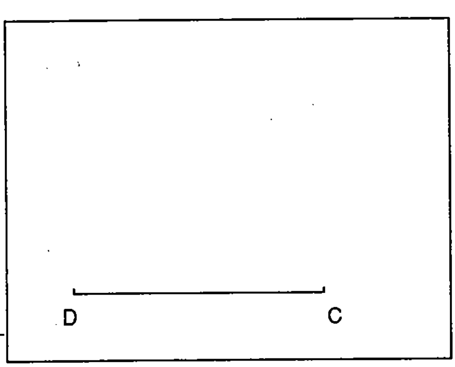
7 Nous avons dessiné des **quadrilatères** sur une table. Ils sont vus en perspective.

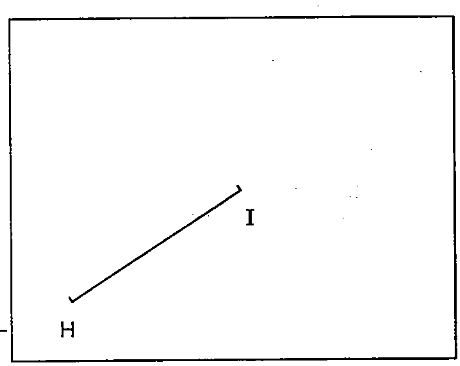
Pour chacun d'eux, nous avons tenu compte de propriétés particulières (angles droits ou égalités de segments). Redessine ces deux quadrilatères *vus du dessus* dans les deux cadres que nous avons préparés ci-dessous.

Indique ensuite la nature de ces deux quadrilatères.



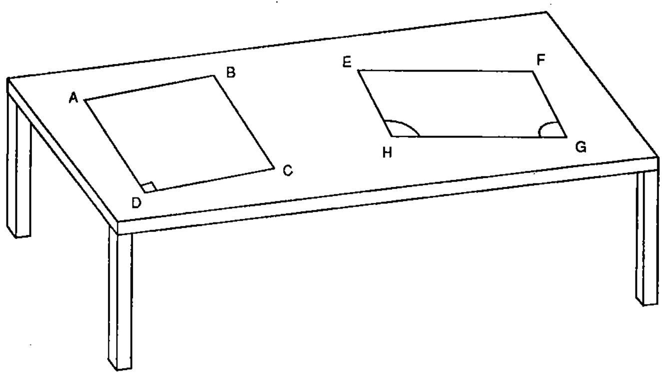
Attention ! *tiens compte des éléments que nous avons déjà placés et ne choisis pas nécessairement les autres données comme tes camarades de groupe.*

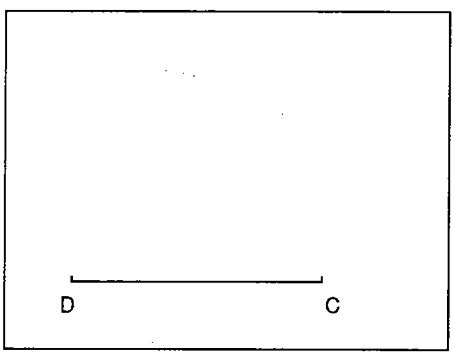


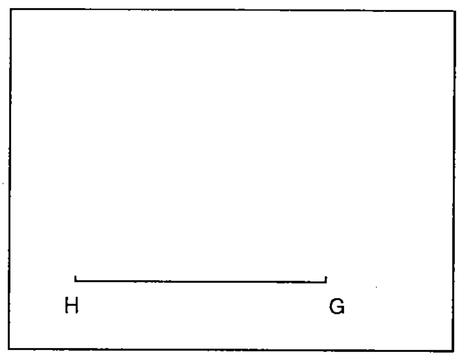


8 Nous avons cette fois dessiné deux **parallélogrammes,** pour chacun desquels nous avons tenu compte de propriétés supplémentaires.

Comme dans l'exercice précédent, redessine ces deux figures vues de dessus, puis indique leur nature.







9 Voici un extrait d'un manuel de Quatrième. (3)

Lis-le soigneusement.

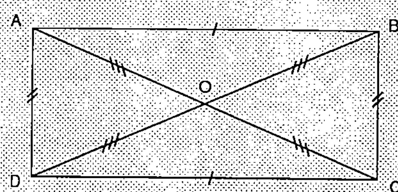
RECTANGLE

Un **rectangle** est un quadrilatère
qui a **quatre angles droits.**

(3) *Mathématiques quatrième.* Editions Didier 1988.

• Un **rectangle** est un parallélogramme : ses diagonales se coupent en leur *milieu* et ses *côtés opposés* sont *égaux deux à deux*.

• Dans un rectangle, les *diagonales* ont *même longueur*. (*Attention* : ceci est faux dans un parallélogramme quelconque.)

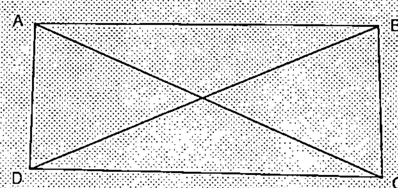


Comment savoir si un quadrilatère est un rectangle ?

• Tout quadrilatère qui a **trois angles droits** est un rectangle.

• Tout **parallélogramme** qui a **un angle droit** est un rectangle.

• Tout quadrilatère dont les **diagonales sont égales** et **se coupent en leur milieu** est un rectangle.



As-tu rencontré dans les exercices précédents des cas où tu aurais pu appliquer l'une des trois phrases permettant de savoir si un quadrilatère est un rectangle ?

1ère phrase : ....
....
....

2ème phrase : ....
....
....

3ème phrase : ....
....
....

L'exercice n°8 doit te permettre de trouver une propriété *qui n'est pas dans ce livre de Quatrième* et qui fournit encore **une autre façon de savoir si un parallélogramme est un rectangle** ... Essaie de l'énoncer de manière très précise :

4ème phrase : ....
....
....
....
....

2. Un exemple de déroulement

L'activité proposée a nécessité deux heures de travail pour les élèves. Ce travail s'est réparti de la manière suivante :

— *première séquence* : les exercices 1, 2, 3 et 4.

— *deuxième séquence* : les exercices 5, 6, 7 et 8.

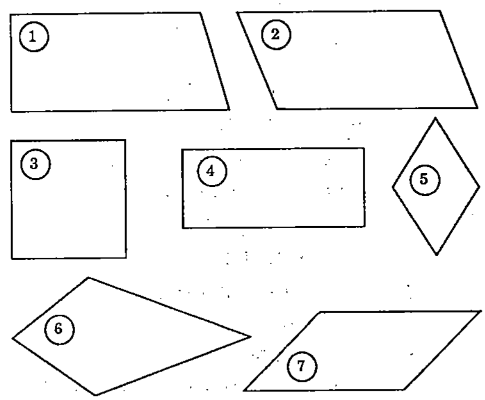
— enfin l'*exercice 9* , qui n'a pu être abordé en classe, a été donné en exercice à faire à la maison.

La première séquence (exercices 1 à 4) n'a été précédée que d'un rappel sur les quadrilatères particuliers fait sous forme de recherche individuelle à la maison, reprise et clarifiée en classe. Ce rappel explique que dans les exercices 1 et 2 (qui ne demandent pas de démonstrations) les élèves n'hésitent pas à mettre quatre croix s'il s'agit d'un carré, deux croix s'il s'agit d'un rectangle ... La plus grosse difficulté concerne peut-être les quadrilatères qui ne donnent lieu à aucune croix. La question : « Est-ce qu'il peut n'y avoir aucune croix ? » revient en effet dans pratiquement tous les groupes.

L'*exercice n° 1* , fondé sur une reconnaissance visuelle des figures, ne pose aucun problème.

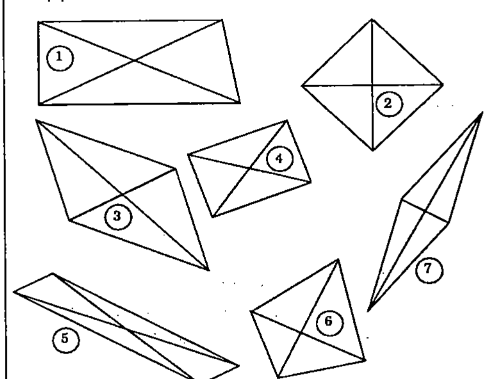
Dans l'*exercice n° 2* , le fait d'avoir tracé les diagonales pouvait inviter à s'en servir pour la reconnaissance des figures ... , mais de façon presque générale, les mesures se font surtout *au niveau des côtés et des angles* et seul le losange amène les élèves à vérifier la perpendicularité des diagonales. Notez que les seules justifications demandées par le professeur sont de type contraposé : « Pourquoi la figure n° 1 n'est-elle pas un rectangle ? ».

Rappel de l'**exercice 1** :



Indiquez la nature de chacun des quadrilatères en marquant une croix dans les cases convenables du tableau.

Rappel de l'**exercice 2** :



En utilisant au besoin les instruments (équerre, double-décimètre, rapporteur...), trouvez la nature de chacun des quadrilatères ci-dessus.

L'exercice n° 3, plus délicat, permet de mettre le doigt sur la difficulté que représente une ébauche de raisonnement logique, même pour un élève considéré comme bon, voire très bon.

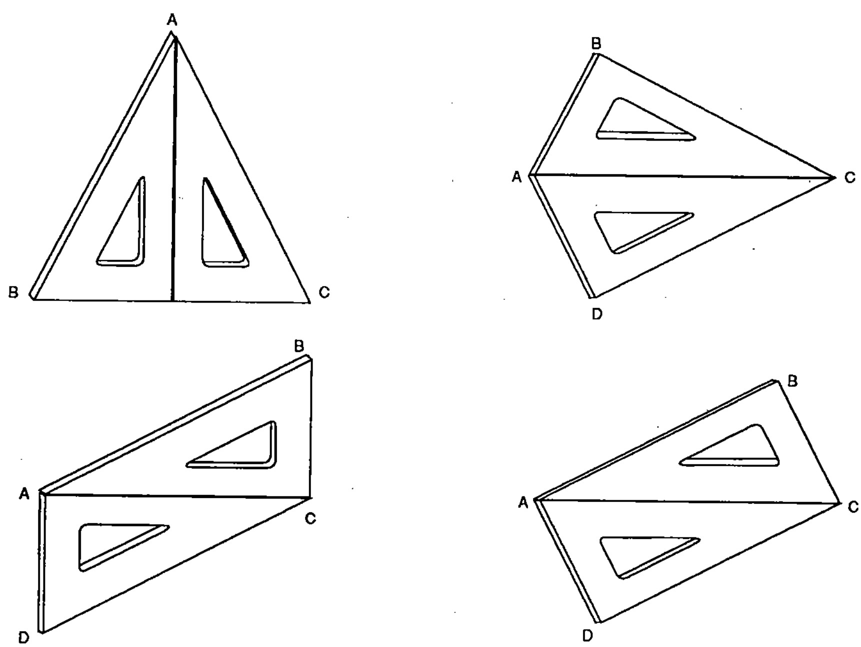
— *Le cas du triangle isocèle :* tous les élèves le reconnaissent et sont capables d'expliquer pourquoi en faisant appel à l'égalité des côtés ou à l'égalité des angles. Plusieurs élèves s'interrogent sur le fait qu'il est peut-être équilatéral. L'intervention du professeur s'avère nécessaire pour faire découvrir que si le triangle était équilatéral, les angles des équerres seraient différents ...

— *Le cas du "cerf volant" :* la présence de deux angles droits fait hésiter. S'agit-il ou non d'un rectangle ? L'image visuelle laisse penser que non mais, malgré tout, certains enfants ne sont pas sûrs de leurs réponse. L'idée de calculer par exemple l'angle en A et d'en déduire que ce n'est pas un rectangle n'est pas naturelle du tout. Les meilleures explications sont du type : « Ce n'est pas un rectangle parce qu'il n'a pas quatre angles droits ». La surabondance dans la réponse n'est pas perçue.

— *Le cas du parallélogramme :* il est identifié facilement, compte tenu de la séance de rappel qui a précédé.

— *Le cas du rectangle :* le calcul des angles en A et en C n'est pas fait systématiquement, beaucoup de vérifications se faisant d'ailleurs à l'équerre.

Rappel de l'**exercice 3** : étude des figures géométriques suivantes ...



L'*exercice n° 4*, (traité, comme le reste, en petits groupes) a nécessité une reprise de synthèse en grand groupe.

Les élèves identifient très facilement le losange PQRS. La reprise permet d'insister sur la *perpendicularité des diagonales* et sur le fait qu'*elles se coupent en leur milieu* (bien entendu, le choix des équerres égales fait couler de source ces propriétés et il n'est soulevé aucune difficulté du type "cas d'égalité des triangles" ...).

La remarque est la même pour le carré ABCD : l'égalité des hypoténuses va de soi, la complémentarité des angles s'obtient par le calcul.

Une synthèse s'impose surtout pour le carré EFGH : si les angles (angles droits des équerres) sont — relativement — faciles à trouver, l'égalité des côtés est apparue comme nettement moins évidente.

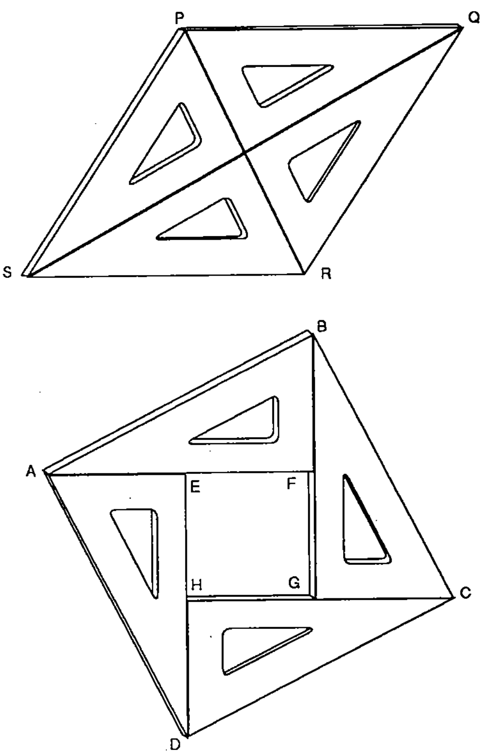
Le raisonnement :

« Le côté de EFGH *est égal au grand côté de l'angle droit moins le petit côté de l'angle droit »*

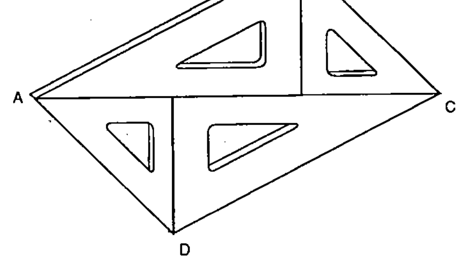
n'est, en définitive, que le fait des bons élèves. Les autres — qui le comprennent lors de la synthèse —, n'ont pu le trouver par eux-mêmes. Beaucoup parmi eux voient d'ailleurs dans F , G , H et E les *milieux* des grands côtés de l'angle droit des équerres : effet pervers du dessin !

La deuxième heure consacrée à cette activité commence avec l'*exercice n° 5*. La remarque faite à propos du "cerf volant" est encore valable ici : l'ensemble des groupes calcule *tous les angles* pour pouvoir affirmer que le parallélogramme n'est pas un rectangle ...

Les deux figures de l'**exercice 4** :



La figure de l'**exercice 5** :



L'*exercice n° 6* pose problème au niveau de la compréhension de l'énoncé.

Le glissement de l'équerre n'est pas compris d'emblée (en dépit du dessin montrant les différentes positions possibles de l'équerre qui est censée glisser) et la plupart des élèves n'ont même pas vraiment compris la signification de la flèche ...

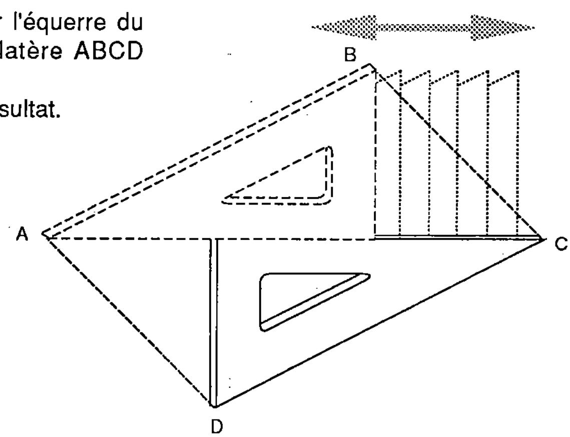
L'idée de tracer un angle droit au sommet C est cependant assez naturelle, mais beaucoup d'élèves cherchent alors, à tort, à faire coïncider le *petit côté* de l'équerre avec le trait obtenu.

En conclusion, bien que la solution fasse partie des positions suggérées par l'énoncé, cet exercice se révèle très peu clair, en grande partie sans doute parce que la figure doit alors se compléter par des équerres qui n'appartiennent pas aux deux modèles proposés.

Malgré ces vices de forme au niveau — pourrait-on dire — de "la lettre", il me semble pourtant que l'objectif recherché est en grande partie atteint au niveau de "l'esprit" de l'exercice : il est clair en effet que l'atteinte du but apparent « réussir le quadrilatère » est secondaire et peut être considérée comme une forme "d'objectif leurre", alors que le véritable objectif de l'exercice est simplement de faire naître l'intuition qu'*un seul angle droit suffit à commander* le reste de la figure. Or cette intuition est largement partagée sans évidemment être explicitée.

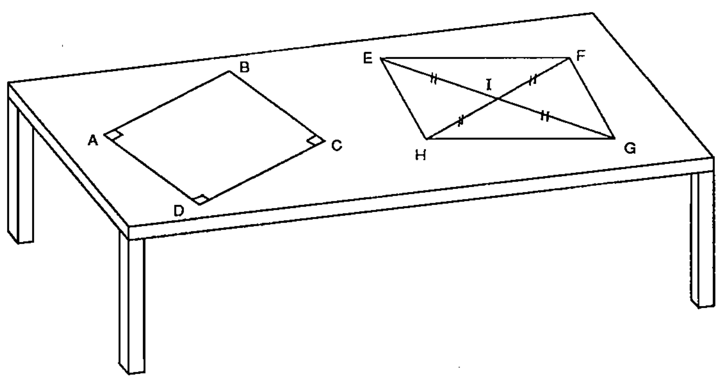
Rappel de l'**exercice 6** :

Dans la figure précédente, nous avons supprimé les deux petites équerres et gardé les deux grandes.
Comment faut-il faire glisser l'équerre du dessus pour que le quadrilatère ABCD devienne un rectangle ?
Dessine soigneusement le résultat.



Rappel de l'**exercice 7** :

Nous avons dessiné des **quadrilatères** sur une table. Ils sont vus en perspective.
Pour chacun d'eux, nous avons tenu compte de propriétés particulières (angles droits ou égalités de segments). Redessine ces deux quadrilatères *vus du dessus* dans les deux cadres que nous avons préparés ci-dessous.
Indique ensuite la nature de ces deux quadrilatères.



L'exercice n° 7 utilise la géométrie dans l'espace pour fournir les hypothèses sans donner pour autant à la figure son allure définitive ...

— Le quadrilatère ABCD fait l'unanimité : c'est un carré ! ...

La figure de l'espace n'indique que trois angles droits. Le raisonnement :

> *« Si le quadrilatère a trois angles droits, il en a forcément quatre »*

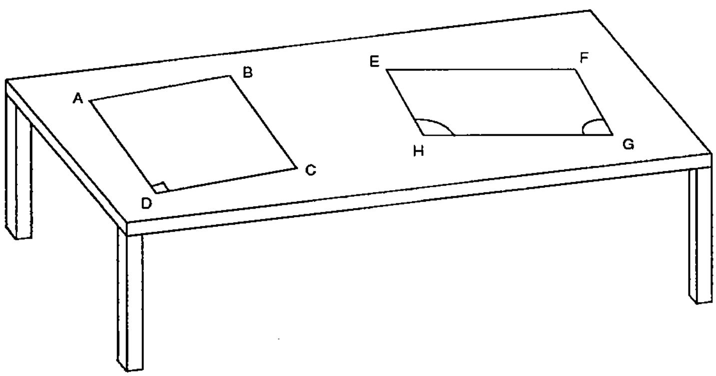
est souvent réussi. L'égalité des côtés dont les élèves ont besoin pour tracer le carré se lit tout naturellement sur une figure volontairement trompeuse. A la question du professeur : « l'égalité des côtés est-elle indiquée sur la figure ? », la réponse non *ne remet pas en cause* le tracé. Il faut insister pour obtenir des élèves que l'absence de signes d'égalité signifie que les côtés *ne sont pas nécessairement égaux* et donc que la figure est *à coup sûr* un rectangle et *peut-être* seulement, *moyennant une information complémentaire*, un carré.

— Le quadrilatère EFGH proposé ensuite est, semble-t-il, abordé avec plus de prudence : les discussions dans les groupes sont animées à propos de la façon de "placer" les diagonales. Assez rapidement et sans l'intervention du professeur, les enfants, tenant compte en plus de la remarque : « attention ! ... », dessinent des rectangles qui ne sont pas les mêmes. La question du carré est évidemment abordée : pour lui, une seule possibilité de tracé et tout le monde obtiendra le même, il suffit pour cela de tracer des diagonales perpendiculaires.

Rappel de l'**exercice 8** :

Nous avons cette fois dessiné deux **parallélogrammes**, pour chacun desquels nous avons tenu compte de propriétés supplémentaires.

Comme dans l'exercice précédent, redessine ces deux figures vues de dessus, puis indique leur nature.



L'exercice n° 8 qui ressemble comme un frère à l'exercice 7 est abordé sans appréhension.

— Au moment de la réalisation de ABCD , forts des enseignements de l'exercice précédent, les élèves sont prudents : on trace un angle droit, les côtés ne sont pas nécessairement égaux mais que faire pour les autres angles ? La question se pose pratiquement dans tous les groupes. Une lecture plus approfondie de l'énoncé s'impose et c'est alors que la plupart des élèves découvrent l'importance du mot "parallélogramme". Le raisonnement : « les côtés sont parallèles donc les autres angles sont droits » est assez facilement fait. Les rectangles obtenus (le plus souvent différents dans un même groupe), prouvent que le n° 7 a porté ses fruits. L'envie de tracer le carré existe cependant et les élèves *se font plaisir en complétant leur figure par le carré unique qu'il est possible de tracer.*

— Le parallélogramme EFGH est la source de discussions nourries et d'essais multiples pour la plupart non satisfaisants. L'égalité des angles donnera lieu à deux types de figures :

fig. 1

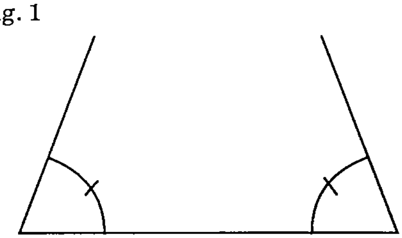
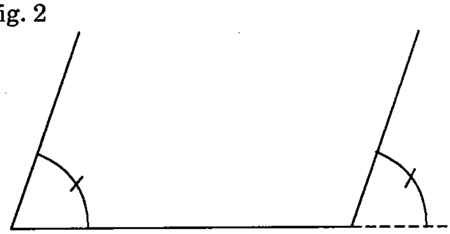


fig. 2



La figure 1 est repoussée car les côtés ne sont pas parallèles ; la figure 2 est assez séduisante pour les élèves : les côtés sont parallèles et il y a des angles égaux ... donc le professeur devrait être content ! Malheureusement, ces deux angles égaux sont mal placés ...

Contrairement à ce qui se passait dans le cas des trois quadrilatères précédents, les élèves sont confrontés ici à une impérieuse nécessité de réfléchir *avant* d'agir ... ; autant dire à la nécessité de recommencer une figure qu'ils avaient réalisée sans se poser trop de questions ! Le plus souvent, l'idée intuitive qui finit par germer est que la seule solution consiste en deux angles droits et donc en un rectangle.

Le raisonnement :

« *dans un parallélogramme les angles consécutifs sont supplémentaires. Ici, en plus, ils sont égaux, donc chacun mesure :*

$$\frac{180°}{2} = 90°\text{ . »}$$

est formulé dans quatre groupes sur sept. Cet exercice termine la deuxième séquence en classe. [4]

La page 5, avec l'*exercice n° 9*, a été donnée à faire à la maison et corrigée au début de l'heure suivante. Le lien entre les caractérisations du livre de quatrième et les cas vus dans les exercices 7 et 8 a été fait par tout le monde. La quatrième phrase : « tout parallélogramme qui a deux angles consécutifs égaux est un rectangle » est formulée à 90 %.

Le prolongement de la leçon s'est fait sous forme de séances d'exercices "rapides" conçus de la façon suivante : le professeur énonce dix propriétés, à charge pour l'élève de déterminer de quel quadrilatère particulier il s'agit. La consigne était d'écrire le quadrilatère le plus "perfectionné". Par exemple :
— *Quadrilatère qui a trois angles droits.* Réponse : rectangle.
— *Parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur.* Réponse : losange.

Le résultat de ce type d'exercice répété plusieurs fois de suite, est assez surprenant. A la première séance, les réponses obtenues de façon quasi-unanime étaient à chaque question : « *carré* ». A la réaction étonnée (et pour tout dire, un peu irritée) du professeur, les élèves opposent avec une bonne foi inébranlable : « ce pourrait être un carré ! ».

La correction, assez fructueuse, a permis de clarifier la situation : « Evidemment, cela peut être un carré mais que faut-il dire de plus ? » Ainsi, le quadrilatère qui a trois angles droits "a besoin en plus" d'une égalité de côtés consécutifs, le parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux "a besoin en plus" d'un angle droit ou de diagonales égales ... Les séances suivantes tendent à prouver que la difficulté est surmontée. Qu'en restera-t-il en début de quatrième ?

(4) Sur cet exemple voir aussi, dans les actes du Colloque Inter-Irem d'histoire et d'épistémologie de 1991, l'exposé intitulé : *La représentation en perspective comme obstacle épistémologique.*

3. Un essai d'analyse

Ainsi présentée, cette séance est en réalité le résultat d'une demande très précise d'un groupe de professeurs qui participaient à un stage du PAF ayant pour thème *"les activités mathématiques au collège"*. Dans le cadre d'une des activités de ce stage, je devais présenter une séquence sur la méthodologie du travail de groupe dans la classe de l'un des collègues présents et d'autant plus volontaire qu'il était en train de peiner sur les démonstrations accompagnant nécessairement (à ses yeux) l'étude des quadrilatères particuliers en classe de cinquième.

Le problème de la caractérisation du losange étant alors réglé, la demande qui me parvint donc tout naturellement fut celle d'une leçon mettant en œuvre *la démonstration à propos de la caractérisation du rectangle.* Ma première réaction à la remise de ce cahier des charges, fut bien évidemment de le refuser en bloc : d'abord « ça n'est pas au programme », ensuite je ne disposais pas de cette séquence pour mes propres classes ... Après réflexion, je me résignai à relever le défi en proposant la séquence décrite dans la première partie de cet article.

Je commençai donc la séquence dans une classe de cinquième de bon niveau et manifestement entraînée aux travaux sur les quadrilatères particuliers. A mes yeux, la leçon s'était bien déroulée, les élèves actifs et intéressés avaient réussi à faire, sans réelles difficultés, les exercices de 1 à 6 dans une bonne ambiance de groupe : les enfants avaient bien joué le jeu et bien respecté les consignes, ce qui n'est pas évident lorsqu'il s'agit d'une toute première approche. Assez contente d'eux (... et de moi !), je m'apprêtai alors sans grande appréhension à répondre aux différentes questions sur le fond et sur la forme qui pouvaient se poser aux participants.

Le résultat ne se fit pas attendre : les professeurs, sans doute "déstabilisés", n'eurent pas de mots assez sévères : « l'objectif de la leçon, c'est-à-dire la démonstration, n'avait pas été atteint ».

Pour eux, il ne s'agissait que d'activités juxtaposées ne méritant en aucun cas l'intitulé de "démonstration". Pire : « rien n'avait été écrit au tableau, il n'y avait pas de plan et surtout les enfants n'avaient pas eu l'occasion de rédiger quelques "bons petits théorèmes", indispensables quand il s'agit de faire une véritable "démonstration" ».

A ces défauts, s'ajoutait celui, très grave à leurs yeux, d'une perte de temps : en une heure, il aurait fallu que le problème du rectangle fut réglé. Certes, l'activité et l'intérêt des enfants avaient été notés mais manifestement l'énergie dépensée avait surtout servi, à leurs yeux, à des discussions dans les groupes pour lever les pièges que contenaient les premiers exercices. Tout était frustant, y compris la forme du travail de groupe, dans laquelle les bons élèves "perdaient leur temps" à expliquer des choses somme toute inutiles à leurs camarades en difficulté.

Bref, cette séquence m'attira non seulement les réactions assez rituelles sur la méthodologie du travail de groupe, mais aussi une volée de bois vert sur ma façon d'envisager une initiation à la démonstration à ce niveau du collège. Comme les professeurs finirent par l'avouer à la fin de la discussion : ils s'attendaient « à tout sauf à cela et espéraient plutôt de la part de l'Irem quelques bons petits exercices "de derrière les fagots" permettant de passer d'un quadrilatère au rectangle ! ... » Tout ceci, bien entendu, dans le cadre d'une pratique pédagogique "innovante" qui devait (pour être probante) résoudre tous les problèmes auxquels chacun des participants se trouvait confronté quotidiennement.

Le temps imparti à mon intervention étant épuisé, il fallut arrêter le débat pourtant fort animé. La discussion devait reprendre le lendemain matin avec un autre intervenant. Il tenta d'expliquer que le but poursuivi était plus une *initiation au raisonnement* qu'à la démonstration "pure et dure" qui, d'ailleurs, n'est pas au programme. Et que, somme toute, un apprentissage *centré sur le raisonnement* pouvait légitimement apparaître comme un préalable indispensable à tout apprentissage *de la mise en forme d'un raisonnement* qu'est censée constituer la démonstration.

C'est alors que je décidai de passer l'intégralité des fiches préparées dans ma classe afin de me rendre compte si l'objectif d'initiation au raisonnement pouvait être atteint ...

En tentant, dans la première partie de cet l'article, de décrire ausi fidèlement que possible le déroulement des différentes séances, j'ai présenté les endroits où de mini-raisonnements élémentaires avaient été mis en œuvre :

— si le quadrilatère a trois angles droits, il en a forcément quatre.

— si les côtés sont parallèles et si il y a un angle droit, les autres le sont aussi.

— dans un parallélogramme, les angles consécutifs sont supplémentaires. Si en plus ils sont égaux, alors chacun mesure $\frac{180°}{2} = 90°$.

A la fin de l'exercice 9, il y avait une certaine adéquation entre les objectifs poursuivis et les résultats obtenus. Même si les mini-raisonnements n'étaient pas le fait de tous les élèves, une bonne proportion d'entre eux étaient capables de les faire. Quant aux autres, ils n'avaient pas perdu leur temps puisqu'ils avaient dû (au minimum) faire des tracés, écrire quelques petits commentaires, écouter leurs camarades, toutes activités dignes d'être considérées comme à la base d'une acquisition spiralaire de la démonstration ...

Vint ensuite l'heure de l'évaluation sous forme des petits exercices rapides précédemment décrits. La déconvenue n'avait alors qu'un seul mérite : on ne s'était pas vraiment trompé en voulant sérier les difficultés ! Même l'apprentissage de ces mini-raisonnements semblait ne pas pouvoir fonctionner hors d'un contexte où le travail est mâché, où les garde-fous sont posés. L'objectif démonstration "pure et dure" était très loin ! ... Ainsi, comme je l'ai noté dans la description détaillée de la séquence, ce qui s'est passé au moment de cette évaluation, c'est l'apparition et la persistance d'un phénomène que je me permettrai d'appeler : *"l'attracteur carré"*.

Que faut-il entendre par là ? Il semble, en effet, que dès la première séance d'exercices proposés, tout se passe comme si *les élèves ne pouvaient résister à la figure la plus parfaite possible* : le carré ! A leurs yeux, celui-ci a tous les avantages : d'abord, comme il posséde toutes les "bonnes" propriétés, il possède en particulier celles dont on parle, mais en plus, en la choisissant on met de son côté (leur semble-t-il) les meilleures chances de faire plaisir au professeur !

Un retour aux exercices 7 et 8 permit de clarifier le débat. En fait, « *ce pouvait être un carré* » mais il fallait dans la majeure partie des cas proposés *ajouter une propriété supplémentaire*. L'exercice de correction fut donc consacré à la recherche de la figure optimale puis le jeu consista à trouver ce qu'il suffisait d'ajouter pour obtenir ce carré si attrayant.

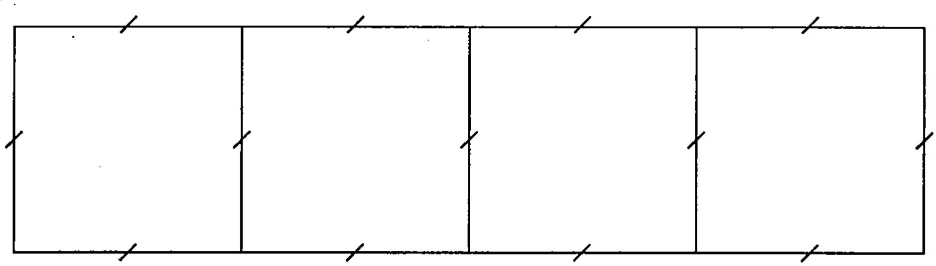
Mais le fait d'avoir insisté sur cet aspect du problème fit naître une autre difficulté. En effet, dans les séries d'exercices qui suivirent, j'injectai des quadrilatères possédant une propriété qui ne leur conférait aucune particularité. Ainsi, à la proposition "quadrilatères ayant des diagonales égales", bon nombre d'élèves écrivirent « rectangle », et il fallut que chacun réalise une figure pour se convaincre qu'il ne s'agissait que d'un quadrilatère somme toute assez décevant. Après plusieurs répétitions, le pourcentage de bons résultats avait atteint un niveau tout à fait acceptable ...

Faut-il en déduire que l'objectif visé est atteint ?

Les comportements en quatrième permettront peut-être d'apporter une réponse à cette question. Toutefois, dans les semaines qui suivirent, alors que les élèves étaient confrontés au problème suivant : *trouver un couvercle et un fond à une boîte dont le développement latéral est donné par la figure 3 ci-dessous*, j'ai pu lire à bien des endroits : « c'est obligatoirement un losange (et peut-être un carré !) ». J'avoue avoir ressenti une certaine satisfaction ... mais le problème de la démonstration reste pour moi, malgré cette expérience et toute la réflexion qui l'accompagne, *une énigme*.

Le résultat obtenu est, ainsi que je l'ai développé plus haut, très ambigu. Peut-être est-ce dû au fait que choisir les quadrilatères comme support à l'apprentissage du raisonnement est, en dépit du côté classique de ce type de pratique, une *erreur pédagogique*. En effet, à la difficulté liée à l'apprentissage lui-même, s'ajoute une quasi-impossibilité à vaincre les effets per-

fig. 3



vers de ce que j'ai désigné plus haut par l'expression d'*attracteur carré*.

A mon sens, le handicap relève d'abord, en l'occurrence, du domaine psychologique : il faut sans doute voir dans cet obstacle une des premières manifestations de la si difficile et si inaccessible prise de conscience du fait que le monde doit être regardé *tel qu'il est* et non *tel que l'on voudrait qu'il soit* ... Mais à la réflexion, les exemples d'obstacles de ce genre ne manquent pas, et tout professeur ayant essayé d'apprendre à "raisonner" à ses élèves (et il semble que ce soit monnaie courante !) a certainement eu à lutter, à un moment ou à un autre, avec cette difficulté psychologique première qui consiste précisément à ne bien vouloir considérer que *ce qui est*, et à le distinguer en permanence de ce que l'on voudrait *que cela soit* ... S'il est clair que l'apprentissage de la démonstration passe par un apprentissage du raisonnement, il me semble tout aussi clair que l'apprentissage du raisonnement passe par l'acceptation de cette "règle du jeu" inévitable.

La difficulté pédagogique est donc d'abord d'en détecter les manifestations éventuelles, analogues à celles que j'ai essayé de décrire, dans le cas des quadrilatères, sous le nom "d'attracteur carré". Le classicisme de thèmes largement rebattus les font le plus souvent oublier, sans doute au détriment de ce qui peut apparaître comme des "finesses" bien plus intéressantes à mettre en évidence au cours de la leçon. Ce n'est pourtant qu'en commençant par pointer du doigt les occasions précises où de tels obstacles se cristallisent que nous pourrons espérer les surmonter ...