
LA RUBRIQUE « DECOUVERTE »

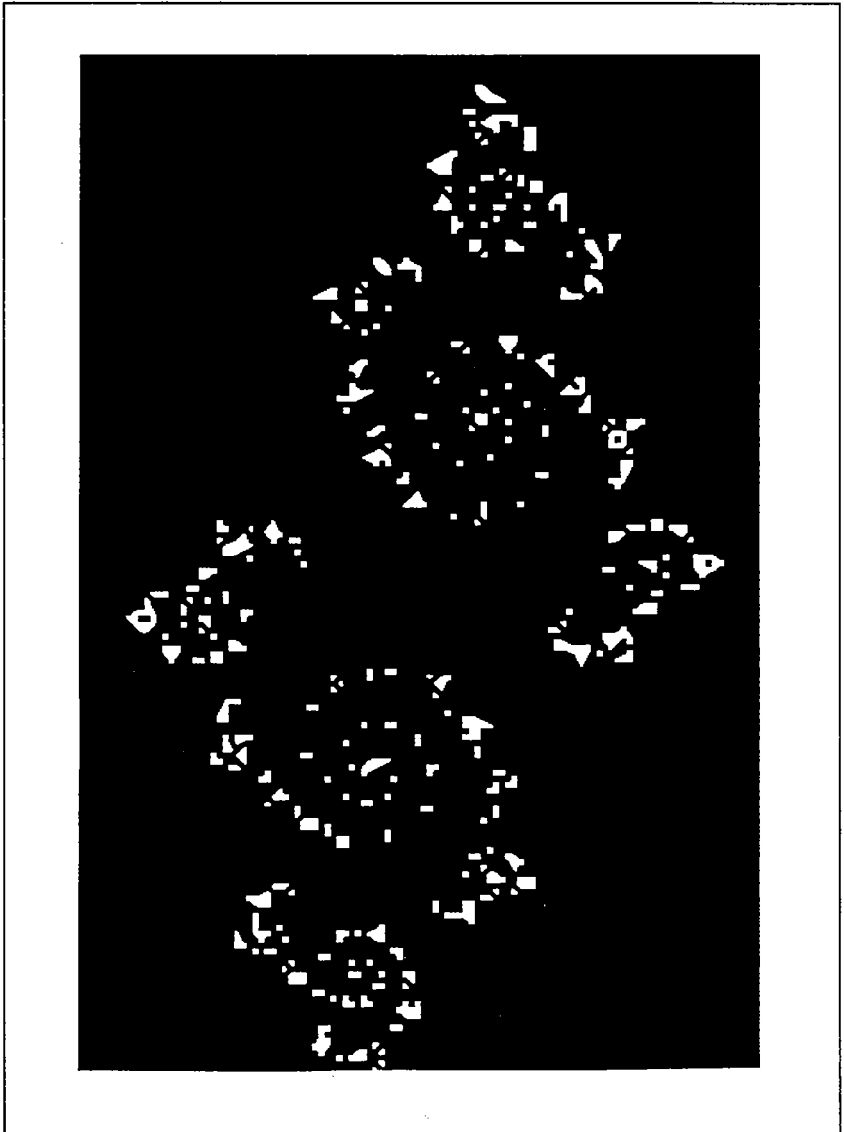
Itérations et systèmes dynamiques

La revue « Repères » accueille dans ce numéro un article proposé par Jean Brette, membre du Département Mathématiques du Palais de la Découverte.

Nous espérons que nos lecteurs y trouveront une introduction abordable par les non-spécialistes de l'un des aspects de la théorie dite "du chaos" ...

Jean Brette s'appuie ici sur son expérience des visites conduites au Palais de la Découverte et destinées aux élèves de second cycle.

ITERATIONS ET SYS-
TEMES DYNAMIQUES



ITERATIONS ET SYSTEMES DYNAMIQUES

Jean BRETTE

Département Mathématiques
Palais de la Découverte (Paris)

introduction.

Il y a quelques années, on a vu apparaître dans différentes revues d'informatique ou de vulgarisation scientifique, des images hautement colorées et d'une complexité fascinante d'un nouvel objet apparu en 1980 dans la littérature mathématique : l'ensemble de Mandelbrot. Un des sommets de cette abondance d'images fut certainement la publication de "Beauty of fractals" [1].

Nous avons exposé en 1989, sous le titre "Aux frontières du chaos", une sélection d'une soixantaine d'images issues de cet ouvrage, accompagnées de treize panneaux explicatifs, de logiciels calculant divers ensembles de Julia, ou l'ensemble de Mandelbrot lui-même, et d'une bande vidéo montrant le "survol" d'un ensemble de Mandelbrot en trois dimensions. Des visites commentées (de une à deux heures suivant les niveaux et la curiosité du public) accompagnaient ce dispositif.

Notre motivation était simple : utiliser l'esthétique et le pouvoir de séduction de ces images pour faire passer un certain nombre d'idées auprès des élèves, ... et des autres. En particulier :

- sur la recherche mathématique : on découvre encore des mathématiques aujourd'hui et, quelquefois, des concepts simples peuvent conduire à des développements d'une richesse insoupçonnée.
- sur l'expérimentation et le rôle des ordinateurs et des images de synthèse dans la recherche mathématique ... et ses limites éventuelles.
- sur la modélisation et l'interaction physique / math.
- sur l'histoire des maths (itérations, approximations successives, notion de nombre complexe, etc.)

ITERATIONS ET SYSTEMES DYNAMIQUES

La plupart de ces points, à des profondeurs diverses, était abordée lors de la première partie des visites commentées, avec des élèves dont le niveau était compris entre 3ème et terminales (avec une forte proportion de 1ères et terminales). La seconde partie de la visite était plus "touristique", et consistait à commenter et à "aider à voir" les points importants révélés par les images.

Enfin, les panneaux explicatifs étaient destinés principalement aux visiteurs isolés, entre deux visites commentées. Compte-tenu de la variété du public, il s'agissait donc, en peu de mots et si possible en restant au plan qualitatif des idées et non celui des techniques mathématiques, d'introduire quelques concepts importants liés à ces problèmes.

Je remercie Régine et Adrien Douady, qui ont eu l'indulgence de penser que le texte qui suit pouvait intéresser le lecteur, et peut-être lui suggérer des activités avec ses élèves.

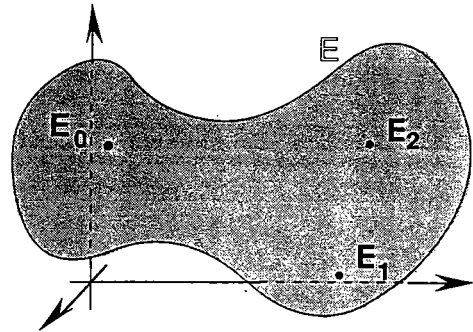
Systèmes dynamiques

Etudier un phénomène ou un système, qu'il soit économique, physique, chimique, biologique,... consiste principalement à observer, élaborer un modèle descriptif (ou mieux encore explicatif), tester la validité de ce modèle et éventuellement le modifier, si nécessaire. Cela signifie, en particulier :

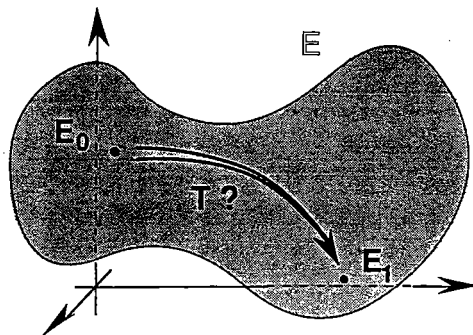
- **Déterminer**, ou choisir, les quantités qui semblent pertinentes pour décrire l'état du système :

- position, vitesse ... pour un système mécanique,
- température, pression ... pour un système thermodynamique, etc.

On peut alors considérer l'ensemble E des états possibles du système :

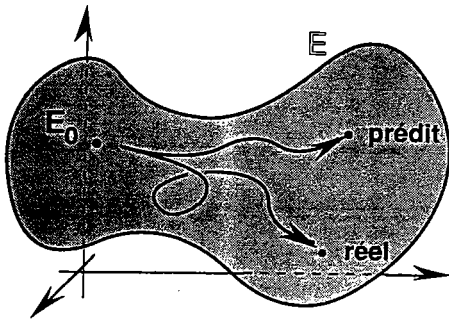


- **Découvrir**, expérimentalement ou théoriquement, la règle du jeu, c'est-à-dire la ou les relations existant entre ces quantités et indiquant comment le système se comporte et évolue dans le temps. Par exemple, connaissant l'état E_0 du système à l'instant t_0 , trouver la fonction, ou la transformation $T(E_0)$, permettant de connaître son état à l'instant t_1 . Si cet état E_1 peut être connu sans ambiguïté, le système est dit **déterministe**.



- **Prédire**, grâce à cette transformation, le comportement du modèle à partir d'un état

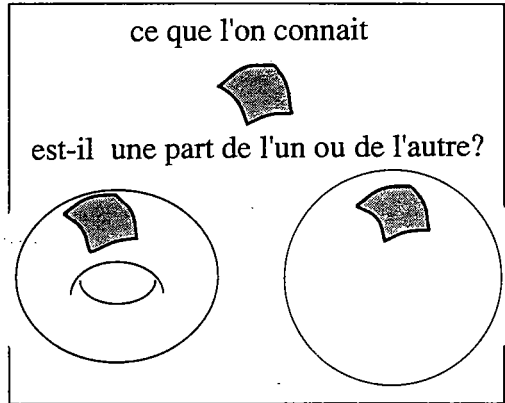
E_0 donné et comparer ces prédictions avec le comportement réel du système.



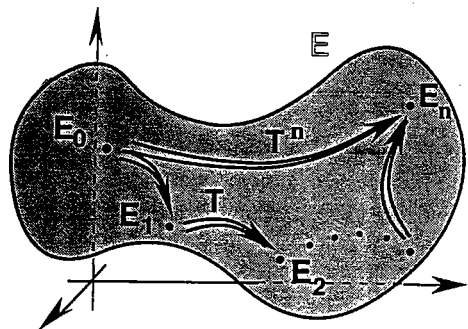
Dans la pratique, la description d'un phénomène suppose qu'il est isolé du reste du monde. Certains effets, jugés mineurs, sont négligés ; la transformation T , ainsi que les états du système, ne sont connus qu'avec une certaine précision ; le domaine de validité du modèle n'est pas toujours connu, les calculs introduisent des erreurs d'arrondis, etc.

On doit donc distinguer, dans les résultats, ce qui est imputable à l'élaboration du modèle de ce qui dépend du comportement de ce même modèle.

Par ailleurs, le plus souvent, les équations ou les transformations rencontrées dans l'étude des phénomènes naturels décrivent le comportement du système localement : dans un petit volume, pour une petite variation des paramètres, durant un court intervalle de temps, etc. Or ce que l'on souhaite, si possible, c'est connaître le comportement global du système, par exemple dans l'espace entier, ou à long terme. Exemple :



Enfin, en général, les équations obtenues sont beaucoup trop compliquées pour que les mathématiciens sachent les résoudre complètement et **explicitement**, c'est-à-dire puissent donner une formule décrivant quantitativement l'état du système à un instant t ultérieur quelconque. On calcule donc alors de proche en proche les états successifs $E_0, E_1, E_2 \dots E_n$ du système aux temps : $t_0, t_1 = t_0 + \Delta t, t_2 = t_0 + 2\Delta t, \dots, t_n = t_0 + n\Delta t$.



Ces points $E_0, E_1, E_2, \dots, E_n$ constituent ce qu'on appelle l'orbite du point E_0 , par analogie avec les systèmes planétaires.

ITERATIONS ET SYSTÈMES DYNAMIQUES

Et comme on a :

$$E_0$$

$$E_1 = T(E_0)$$

$$E_2 = T(E_1) = T(T(E_0)) = T^2(E_0)$$

.....

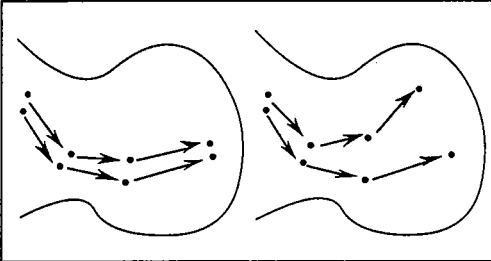
$$E_n = T^n(E_0)$$

On rejoint ici l'idée d'**approximations successives**, datant des Grecs et largement développée et étudiée depuis Newton.

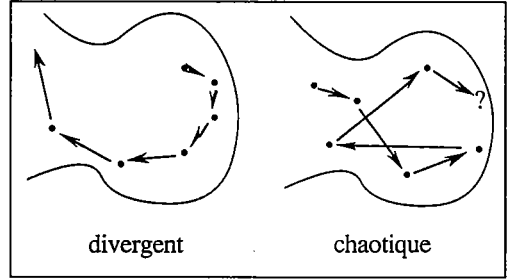
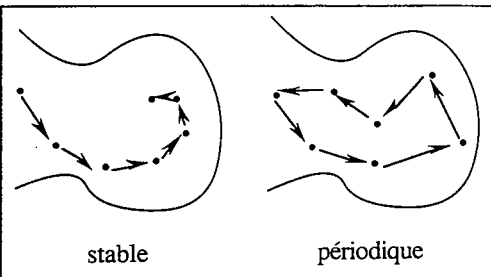
Du quantitatif au qualitatif

Puisque l'étude **quantitative** des systèmes est souvent très difficile, voire impossible, on peut restreindre ses ambitions et chercher, à partir des équations, à obtenir des informations **qualitatives**. En particulier, on peut s'interroger :

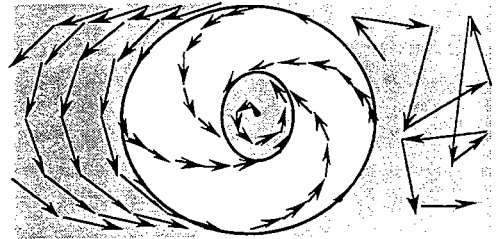
- Sur l'influence des **conditions initiales** : deux états proches conduisent-ils à des orbites proches ?



- sur l'allure des **orbites** : est-ce que le système se stabilise, oscille périodiquement, diverge... ?



- sur les **transitions** : certains systèmes peuvent passer d'un régime stable à un régime périodique, voire chaotique, lorsqu'on fait varier un paramètre. Pourquoi ? Comment se font ces transitions ? Peut-on déterminer les **frontières** entre ces différents régimes ?



- ... et d'une façon plus générale, le comportement du système est-il **prédictible** ?

C'est à ce type de question que s'efforce de répondre la théorie des **systèmes dynamiques**, née des réflexions de Henri Poincaré sur les équations de la mécanique céleste, il y a près d'un siècle.

De telles questions se posent naturellement lors de l'étude de systèmes réels, notamment quand le nombre de variables est grand : physique de l'atmosphère, systèmes planétaires, etc. On imagine moins qu'elles puissent se poser dans des situations qui semblent, *a priori*, très élémentaires.

C'est pourtant le cas, comme en témoignent les études menées ces vingt dernières années sur l'itération de la fonc-

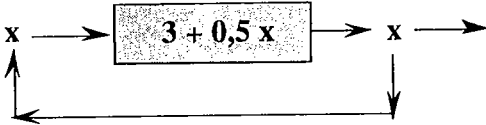
tion : $x \rightarrow x^2 + c$, où x et c sont des nombres réels ou complexes.

Elles se posent même, et ont déjà un sens, dans le cas encore plus simple : $x \rightarrow ax+b$, que nous allons aborder en premier lieu.

les itérations de $x \rightarrow 3 + kx$ (pour $k = 0,5$)

Partant d'une valeur x_0 , nous allons calculer successivement :

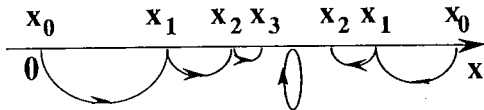
$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + 0,5 x_0 \\ x_2 &= 3 + 0,5 x_1 \\ x_3 &= 3 + 0,5 x_2 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$



Suivant la valeur x_0 de départ, on obtient par exemple :

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \rightarrow 3 \rightarrow 4,5 \rightarrow 5,25 \rightarrow \dots \\ x_0 &= 6 \rightarrow 6 \rightarrow 6 \rightarrow 6 \rightarrow \dots \\ x_0 &= 10 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 6,5 \rightarrow \dots \end{aligned}$$

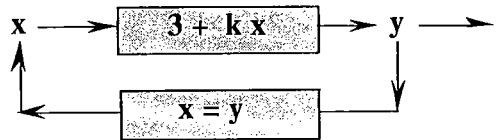
ou encore, graphiquement,



Ces données numériques, ou le diagramme ci-dessus, montrent que le point $x = 6$ est un **point fixe** qui attire les orbites $x_0, x_1, x_2, \dots$ des autres points.

Un **changement de représentation** permet de mieux comprendre ce phénomène : Remplaçons la fonction $x \rightarrow 3 + kx$ par le système équivalent :

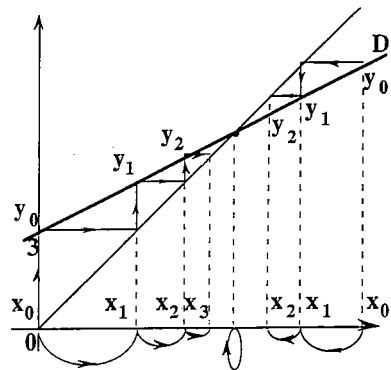
$$\begin{aligned} y &= 3 + kx \\ \text{et} \quad x &= y \end{aligned}$$



Cela ne change évidemment rien sur le plan numérique. On trouve par exemple :

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 & y_0 &= 3 + 0,5 x_0 = 3 \\ x_1 &= y_0 = 3 & y_1 &= 3 + 0,5 x_1 = 4,5 \\ x_2 &= y_1 = 4,5 & y_2 &= 3 + 0,5 x_2 = 5,25 \\ x_3 &= y_2 = \dots & y_3 &= \dots \end{aligned}$$

Par contre, la représentation graphique devient plus explicite :



$y = 3 + kx$ est l'équation d'une droite **D**,
 $x = y$ celle de la première bissectrice.

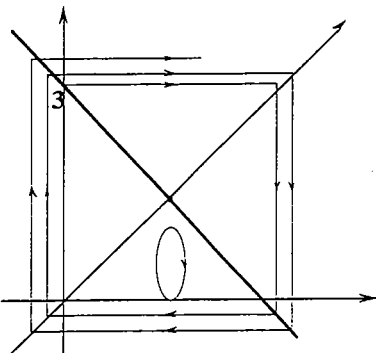
Le point fixe correspond à l'intersection de ces deux droites et les différentes étapes des calculs ci-dessus apparaissent comme une suite de flèches verticales et horizontales.

ITERATIONS ET SYSTEMES DYNAMIQUES

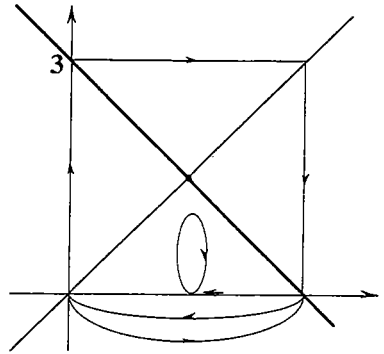
Les diagrammes suivants montrent comment le comportement des orbites dépend des positions respectives de la première bissectrice et de la droite D. Le paramètre qui **contrôle la dynamique** de ce système est la **pente** de la droite, c'est-à-dire le coefficient **k**, que nous avons fait varier dans l'encadré ci-contre. On peut résumer cette variété de comportements sur le diagramme suivant, en fonction de la variable de contrôle **k**.

k	point fixe	orbite de 0
	répulsif	oscille et s'éloigne
-1	indifférent	périodique
	attractif	oscille et se rapproche
0	superattractif	
	attractif	monotone et se rapproche
1	à l'infini	monotone et s'éloigne
	répulsif	monotone et s'éloigne

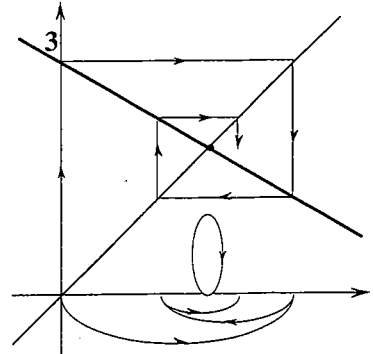
$k < -1$: le point fixe est **répulsif**, l'orbite de 0 s'éloigne vers l'infini en oscillant.



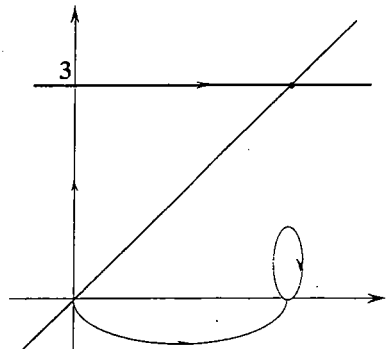
$k = -1$: le point fixe est **indifférent**, l'orbite de 0 est périodique, de période 2.



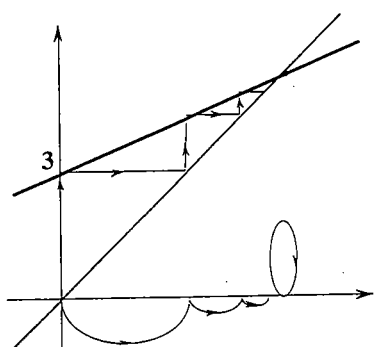
$-1 < k < 0$: le point fixe est **attractif**, l'orbite de 0 tend vers ce point en oscillant.



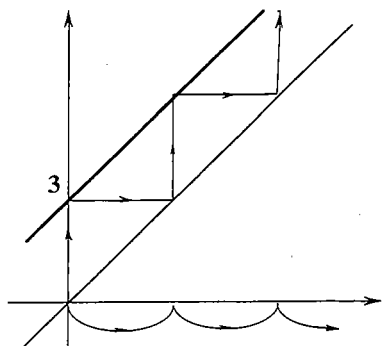
$k = 0$: le point fixe est **superattractif**.



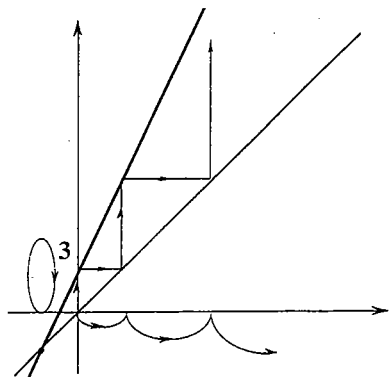
$0 < k < 1$: le point fixe est **attractif**, l'orbite de 0 tend vers ce point de façon monotone.



$k = 1$: le point fixe est "à l'infini", l'orbite de 0 s'éloigne.



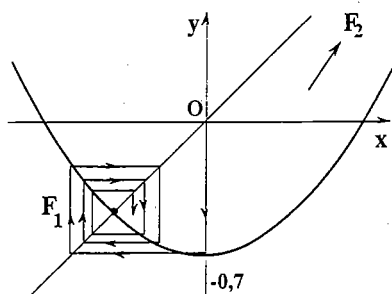
$k > 1$: le point fixe est **répulsif**.



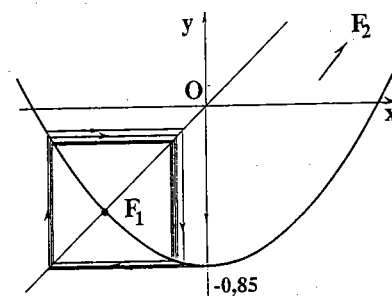
Quand la fonction $y = f(x)$ n'est pas **linéaire**, on peut souvent appliquer les résultats précédents au **voisinage des points fixes**, en assimilant la courbe à sa **tangente**. Cependant, en s'éloignant des points fixes, les orbites sont considérablement plus diversifiées et il apparaît des phénomènes **nouveaux**.

Ainsi, suivant les valeurs du **paramètre de contrôle c** , la plus simple des fonctions non-linéaires : $x \rightarrow x^2 + c$ fait apparaître des points fixes qui peuvent être **attractifs**, **répulsifs** ou **indifférents**, et des orbites périodiques, ou même apparemment **chaotiques**, comme le montrent les trois exemples ci-dessous :

les itérations de : $x \rightarrow x^2 + c$



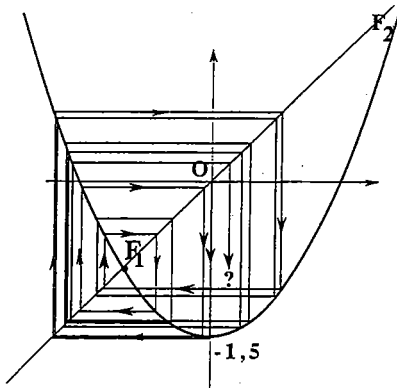
$c = -0,7$: le point F_1 est attractif, le point F_2 , non visible ici, est répulsif.



$c = -0,85$: présence d'un cycle attractif de période 2 : F_1 et F_2 sont répulsifs.

ITERATIONS ET SYSTEMES DYNAMIQUES

Il existe des cas où la situation est plus complexe. Par exemple le suivant, avec : $c = -1,5...$, où il n'existe apparemment pas de cycles périodiques, et où F_1 et F_2 sont répulsifs.



De tels exemples, que l'on pourrait d'ailleurs multiplier en faisant varier la valeur de c , posent de nombreuses questions : Quand apparaissent les points fixes ? et les cycles périodiques ? pourquoi ? en existe-t-il de toutes périodes ? l'orbite de 0, pour $c = -1,5...$ devient-elle périodique à long terme ou reste-t-elle imprédictible ? etc.

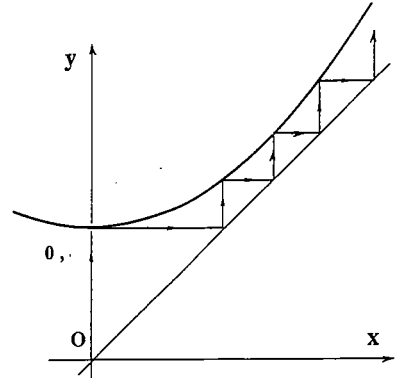
Points fixes, cycles périodiques

Par définition, un point fixe se transforme en lui-même. L'existence de tels points correspond donc à l'existence de solutions à l'équation $x = f(x)$, c'est-à-dire, ici, à l'équation $x = x^2 + c$, ce qui a lieu pour $c \leq 0,25$. Graphiquement, il y a points fixes réels quand la valeur de c est telle que la parabole coupe la première bissectrice (cf. encadré ci-contre).

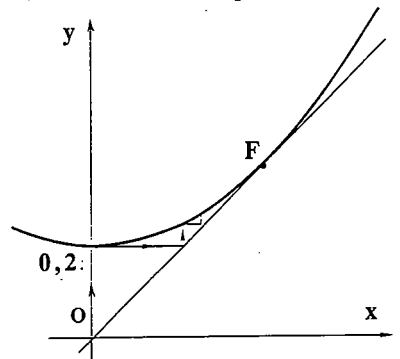
De la même façon, un point sera périodique de période 2 si l'on a $x_2 = x_0$, c'est-à-dire dans le cas présent :

$$x_2 = x_1^2 + c = (x_0^2 + c)^2 + c = x_0$$

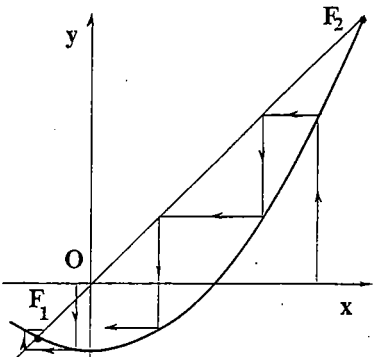
$c = 0,4$: pas de point fixe : l'orbite de 0 s'éloigne vers l'infini.



$c = 0,25$: naissance d'un point fixe.



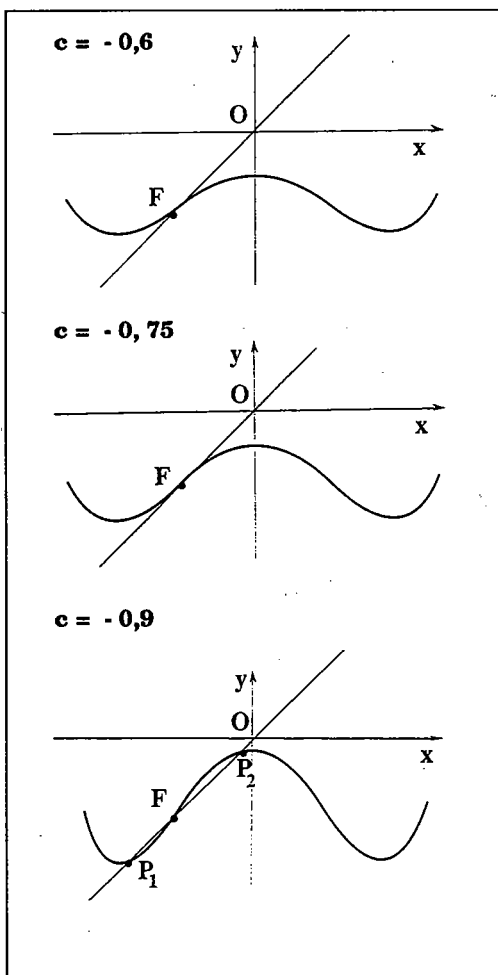
$c < 0,25$: deux points fixes ; ici F_1 est attractif, F_2 répulsif.



ou encore :

$$x_2 = x_0^4 + 2x_0^2 c + c^2 + c = x_0$$

On doit donc étudier cette fois l'intersection du graphe d'un polynôme du 4ème degré et de la première bissectrice, et le cycle correspondant sera attractif ou non en fonction de la pente des tangentes à la courbe en ce(s) point(s). Les trois figures qui suivent montrent les graphes respectifs de la fonction : $y = x_0^4 + 2x_0^2 c + c^2 + c$, pour les valeurs de c égales à : - 0,6 ; - 0,75 et - 0,9.



Dans les trois cas, le point fixe F, $x_2 = x_0$, est en fait un point fixe pour la transformation initiale, c'est-à-dire que l'on a : $x_2 = x_1 = x_0$. Dans les deux premiers cas ce point est attractif alors qu'il est répulsif dans le dernier. On voit alors apparaître les points P_1 et P_2 qui sont des points fixes attractifs pour la transformation : $x_0 \rightarrow x_2$. Pour la transformation initiale, ces points ne sont pas fixes, ils s'échangent.

Il y a donc pour celle-ci présence d'un cycle de période 2. Enfin, dans la seconde figure, le point F est un point d'inflexion où la pente de la tangente est 1. Les points P_1 et P_2 sont alors confondus avec F et on assiste donc là à la naissance du cycle.

On poursuit, pour des cycles de périodes plus élevées, en étudiant les fonctions :

$$f^3(x) = ((x^2 + c)^2 + c)^2 + c, \dots, f^n(x)$$

et les racines des équations $x = f^n(x)$.

On montre ainsi qu'il existe des cycles de périodes quelconques.

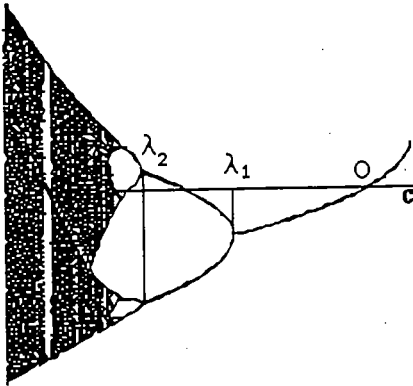
Vers le chaos

On peut également souhaiter avoir une vision synthétique du comportement des orbites de 0 pour toutes les valeurs de c . Il suffit, pour chacune de ces valeurs, de superposer sur le même diagramme les valeurs de x_n pour n assez grand.

On obtient alors le diagramme suivant, où les valeurs de c sont en abscisse et où on a reporté en ordonnées l'ensemble des valeurs de x_n , pour chaque c , avec $x_0 = 0$ et $500 < n < 800$...

ITERATIONS ET SYSTEMES DYNAMIQUES

De la droite vers la gauche, on observe :



$0,25 > c > l_1 = -0,75$: l'orbite de 0 tend vers un point fixe.

$c = l_1$: première bifurcation, apparition du cycle P_1P_2 .

$l_1 > c > l_2 = -1,25$: l'orbite tend vers un cycle P_1P_2 , elle est périodique pour $c = -1$.

$c = l_2$: seconde bifurcation et apparition d'un cycle de période 4.

$l_2 > c > l_3 = -1,36...$: cycle de période 4.

$c = l_3$: troisième bifurcation.

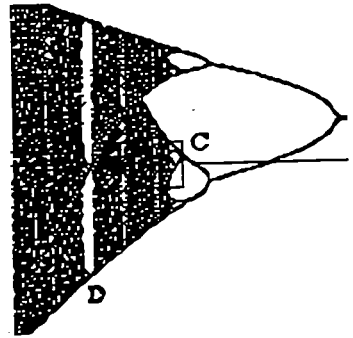
.....

Ces dédoublements se poursuivent en une cascade infinie de bifurcations $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jusqu'à la valeur $c = -1,401...$, limite des λ_n , appelée **point de Feigenbaum**.

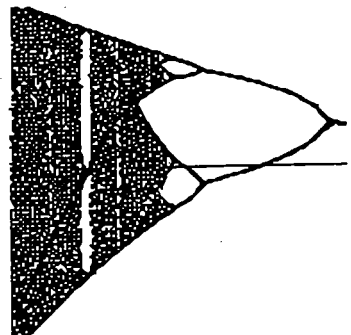
A partir de là, le comportement de l'orbite semble difficile à prédire : elle est chaotique, avec des intermittences : sur certains intervalles, elle redevient périodique de périodes diverses (par exemple 3 pour la bande claire, à gauche), puis elle est

sujette à de nouvelles cascades, etc. Elle diverge de nouveau pour $c < -2$.

Un zoom permet de mieux observer ces dédoublements. Les deux schémas suivants montrent les grossissements respectifs des zones B et C.



Gros plan de la zone B : $-1,55 < c < -1,24$
La zone D montre une intermittence de période 6 dont on ne voit que la moitié.



Gros plan de la zone C : $-1,41 < c < -1,393$.

On notera la similitude avec la figure précédente, à l'échelle près. Le rapport des longueurs des intervalles de deux cycles consécutifs tend vers 4,66..., constante de Feigenbaum.

Les itérations de la fonction $x \rightarrow x^2 + c$ constituent une situation **prototype** montrant :

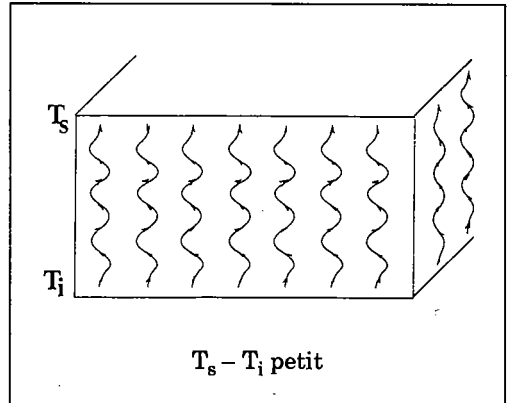
- la transition continue, en fonction d'un seul paramètre, d'un régime régulier à un régime périodique, puis chaotique, par une cascade de bifurcations.
- l'existence d'intermittences périodiques au sein d'un régime chaotique.
- l'existence d'autosimilarités à diverses échelles.

Outre le fait qu'il pose de très jolis et très intéressants problèmes mathématiques, cet exemple a eu une importance considérable en physique, où il fournit un nouveau modèle pour l'étude de phénomènes réels.

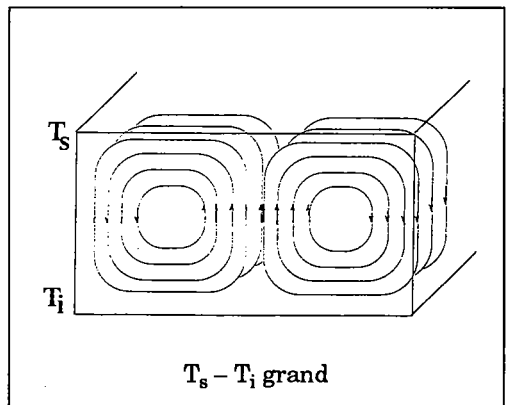
Intermède physique : convection et cascades

La mise en évidence la plus précise, et la plus spectaculaire, de cascades de dédoublements, est certainement l'expérience de Libchaber et Maurer (ENS, Paris, 1980) sur la convection (cellules de Rayleigh-Bénard).

Une mince couche de fluide, chauffée à sa partie inférieure, est soumise à une différence de température. Quand la différence est faible, la chaleur est transmise à la face supérieure par simple conduction.



Si la différence augmente, la conduction ne suffit plus, il apparaît alors un mouvement de convection et la formation de rouleaux : la chaleur est alors transportée par le mouvement du fluide.



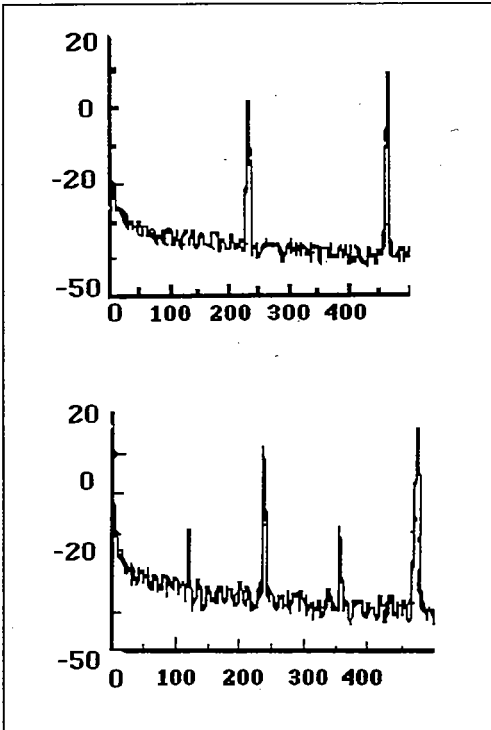
Si la température augmente encore, les rouleaux eux-mêmes se déforment alors de façon périodique.

Chaque goutte du fluide est soumise à la pesanteur, à la poussée d'Archimède due à la différence de densité entre la goutte et son milieu ambiant, et à des forces de visco-

ITERATIONS ET SYSTEMES DYNAMIQUES

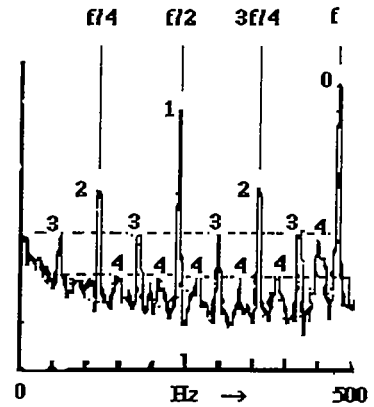
sité. Le déséquilibre éventuel entre ces forces est caractérisé par un nombre sans dimension : le nombre de Rayleigh Ra , qui varie proportionnellement à la différence de température $T_g - T_l$.

L'expérience de Libchaber et Maurer utilise de l'hélium liquide, dans un parallélépipède de $3 \times 1,5 \times 1,25$ mm, afin de limiter à deux le nombre de rouleaux, et mesure les variations périodiques de températures aux sommets des rouleaux, en fonction du nombre de Rayleigh. Cette expérience très délicate, en particulier pour minimiser les bruits de fond parasites dans les mesures, met en évidence l'apparition progressive de cycles périodiques, par dédoublement de fréquences, comme on peut le voir sur les spectres ci-dessous obtenus pour des nombres de Rayleigh respectivement égaux à 40,5 et 42,7.



Sur le spectre suivant, ($Ra = 43$), les lignes pointillées indiquent les prédictions d'un scénario "à la Feigenbaum".

Dans cette expérience, le nombre de Rayleigh joue donc le rôle du paramètre c et les valeurs critiques de Ra où se déroulent les fréquences correspondent aux λ_i .



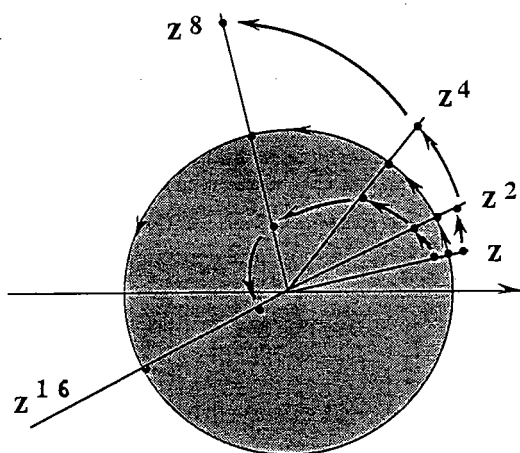
Cette expérience a été renouvelée depuis avec des liquides plus conventionnels comme l'eau ou le mercure. Par ailleurs, cette "voie vers le chaos" a été observée dans de nombreux autres domaines : acoustique, mécanique, électronique, optique cohérente, etc., ce qui constitue une raison supplémentaire d'étudier et de comprendre des modèles "simples".

Des réels aux complexes.

L'existence de points fixes, ou de cycles périodiques dépend, on l'a vu, des solutions des équations $x = f(x)$, ou $x = f^n(x)$, d'où l'intérêt d'étudier ces itérations dans le plan complexe.

En particulier, pour chaque valeur de c il existe toujours deux points fixes à distance finie. Par ailleurs, si le module de z est grand par rapport à celui de c , son orbite tend vers l'infini. Cela a donc un sens d'étudier, pour chaque valeur de c , l'ensemble des points dont l'orbite reste à distance finie, et notamment sa frontière, appelée **ensemble de Julia**, et notée J_c .

Le cas le plus simple est certainement le cas $c = 0$, qui a entr' autre l'avantage de pouvoir être décrit même à des élèves qui ignorent ce qu'est un nombre complexe : on repère un point z du plan par sa distance à l'origine r et l'angle $\theta = xOz$. Pour obtenir le transformé de z , on élève la distance au carré et on double l'angle.



Il est alors aisé de voir comment se comporte l'orbite d'un point z donné :

- si $r > 1$, son orbite s'éloigne vers l'infini en spirale.
- si $r < 1$, l'orbite tend vers l'origine, toujours en spirale.
- enfin si $r = 1$, l'orbite reste sur le cercle unité. Ce cercle est J_0 , l'ensemble de Julia pour $c = 0$.

Si les dynamiques, à l'extérieur ou à l'intérieur du cercle sont très simples (les points s'éloignent ou se rapprochent de l'origine en spirale) il n'en va pas de même sur le cercle : le point 1 est fixe ; le point -1 est un pré-point fixe (en une itération, il donne 1) ; le point tel que θ est égal à un tiers de tour est périodique de période 2 ; en effet :

$$1/3 \rightarrow 2/3 \rightarrow 4/3 = 1/3$$

(à un tour près)

De la même façon, les points pour lesquels $\theta = 1/q$, avec q premier, sont périodiques de période $q - 1$. Il existe donc des points périodiques arbitrairement près de n'importe quel point donné à l'avance sur le cercle.

Quant aux points pour lesquels θ n'est pas une fraction de tour, on peut montrer que leur orbite est dense sur le cercle, c'est-à-dire qu'elle aussi passe arbitrairement près de n'importe quel point donné à l'avance.

Enfin on notera que le système est sensible aux conditions initiales : les orbites de deux points voisins s'éloignent l'une de l'autre, puisque l'écart initial est doublé à chaque itération.

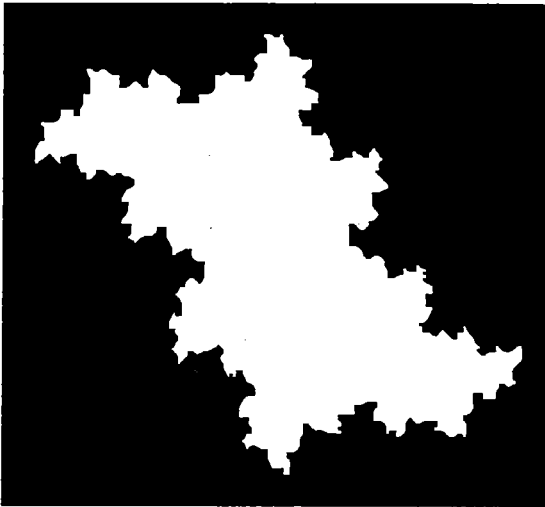
Ces propriétés, qui caractérisent les systèmes chaotiques, se retrouvent dans les ensembles de Julia J_c , pour $c \neq 0$, bien que leurs formes soient très variées et beaucoup moins simples qu'un cercle.

Dans les années 1920, c'est-à-dire bien avant les ordinateurs et les images de synthèse, les mathématiciens Fatou et Julia ont montré qu'il existait principalement deux familles d'ensembles de Julia :

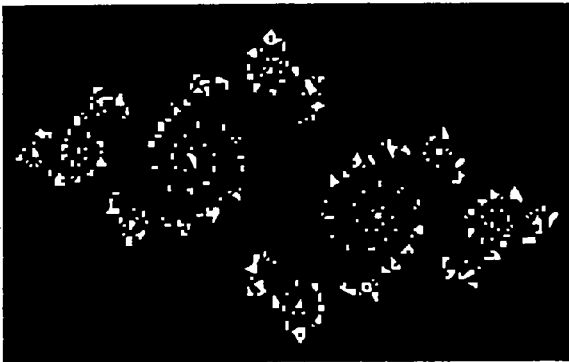
- soit ils sont connexes, c'est-à-dire d'un

ITERATIONS ET SYSTEMES DYNAMIQUES

seul morceau (c'est ici le cas pour $c = 0,6 i$)



- soit ils sont discontinus et les points dont l'orbite reste à distance finie forment un "nuage de poussières".
(ici $c = -0,75 + 0,32 i$)



Julia donne un critère très simple pour savoir si l'on est dans un cas ou dans l'autre : si, pour une valeur c , l'orbite de 0

reste à distance finie, J_c est connexe. Si l'orbite de 0 tend vers l'infini, J_c est discontinu.

L'ensemble de Mandelbrot

En 1979, Benoit Mandelbrot (IBM, Yorktown, USA) eut l'idée de dresser la carte des points c pour lesquels les 500 premières itérations du point 0 restent à une distance de l'origine inférieure à 1000, découvrant ainsi l'ensemble qui porte désormais son nom. Cet ensemble, à la géométrie extrêmement riche, se présente comme une cardioïde sur laquelle sont greffés des bourgeons ... qui eux-mêmes portent des bourgeons, etc. Mieux encore, on peut observer de petites taches (par exemple en A ou B) qui, convenablement agrandies, se révèlent être de minuscules copies de la partie principale, légèrement déformées.

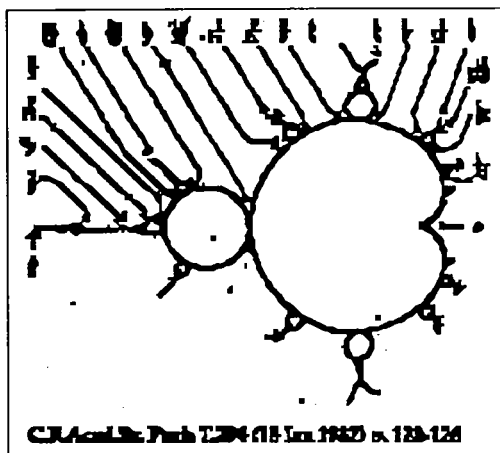


Le long de l'axe réel, le cœur de la cardioïde est le point $c = 0,25$, et les racines

des bourgeons, de droite à gauche, correspondent aux valeurs λ_i que nous avons rencontrées plus haut dans les cascades de Feigenbaum. La copie située en A correspond à l'intermittence citée également plus haut, où apparaît un cycle de période 3.

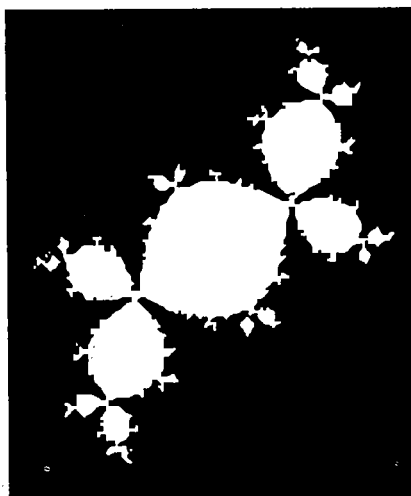
L'ordinateur et les images de synthèse ont joué un grand rôle dans l'exploration de l'ensemble de Mandelbrot, dans la compréhension de la dynamique des ensembles de Julia et des relations entre les deux. En fournissant une perception **globale** de plusieurs millions de résultats numériques, ces images ont mis en évidence des analogies de formes, suggéré des théorèmes à démontrer et mêmes des voies de démonstration.

Par exemple, en 1982, Adrien Douady (ENS, Paris) et John Amal Hubbard (Univ. Cornell, USA) ont montré que l'ensemble M est **connexe**, et que les minuscules copies sont reliées aux bourgeons par des filaments. Ils ont même montré que ces filaments, ou ces dendrites, dont on peut soupçonner l'existence sur les images, ne pourraient jamais être vus à l'aide d'un ordinateur. En effet les coordonnées des points qui les constituent sont toutes irrationnelles.

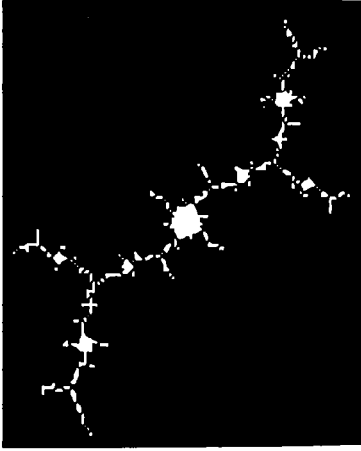


Leur méthode utilise la Théorie du Potentiel et revient à savoir répondre à la question suivante : si l'ensemble M était chargé électriquement, que pourrait-on dire des équipotentiels et des lignes de champ ?

Des considérations similaires, jointes à ce qu'on appelle maintenant les arbres de Hubbard, ont permis d'analyser et de comprendre la dynamique des ensembles de Julia, la variété de leurs formes, la périodicité des cycles, la géométrie des bassins d'attraction, etc.



Le lapin de Douady : lorsque le point c est pris dans le bourgeon supérieur de l'ensemble de Mandelbrot, l'orbite de 0 tend vers un cycle de période 3, et l'ensemble de Julia correspondant ressemble au lapin ci-dessus.



Lorsque c est choisi à l'intérieur de la petite cardioïde de la première copie située sur la dendrite attachée au bourgeon supérieur, l'ensemble de Julia correspondant se présente **lui aussi** comme une dendrite de forme très similaire, parsemée de "gouttes de rosée".

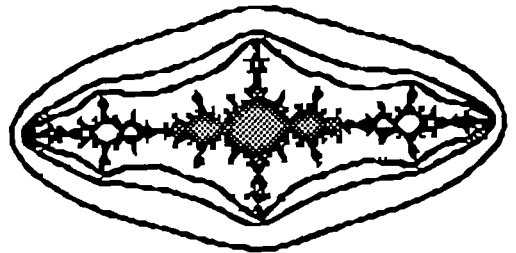
Cette similitude de forme entre le voisinage d'un point situé sur le bord de l'ensemble de Mandelbrot (c'est-à-dire dans le plan des c) et l'ensemble de Julia correspondant (qui, **lui**, se trouve dans le plan des z) était très surprenante et a fait l'objet d'un théorème du à Tan Lei.

Chirurgie et lapins

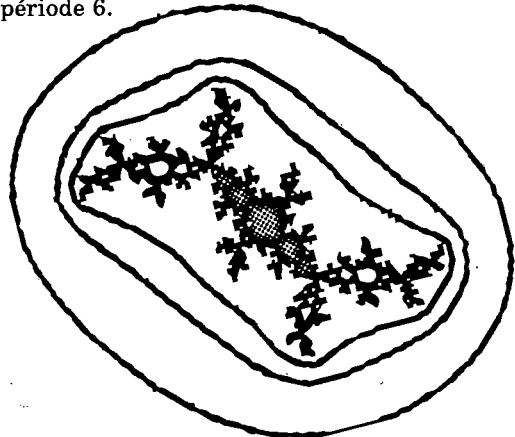
Plus récemment, A. Douady et Bodil Branner (Lingby, Danemark) ont montré comment, par **chirurgie**, on pouvait étendre ces analyses à d'autres fonctions

que $z \rightarrow z^2 + c$. Voici quelques exemples qualitatifs :

- Ensemble de Julia pour une valeur de c prise dans le bourgeon immédiatement à gauche du gros bourgeon de gauche, c'est-à-dire $l_2 < c < l_3$. Cette valeur conduit à un cycle de période 4.



- Ensemble de Julia pour une valeur de c prise dans le bourgeon immédiatement au-dessus du bourgeon supérieur. On reconnaît une variante "maigre" du lapin de Douady, conduisant à un cycle de période 6.

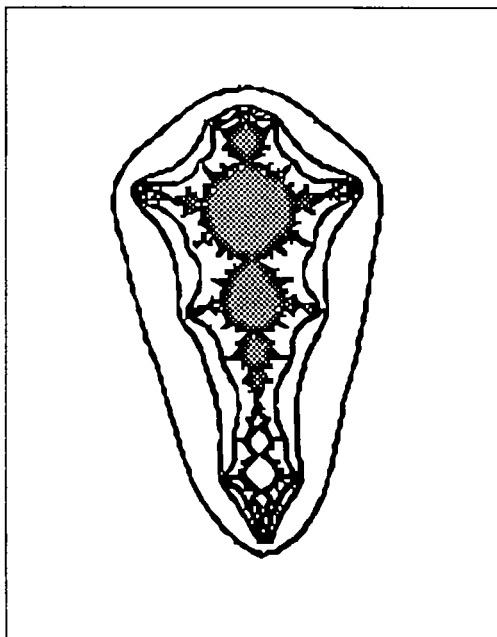


On notera la similitude des parties centrales de ces deux figures, et le fait que la première est une déformation d'un lapin amputé qui n'aurait qu'"une seule oreille et

une seule patte arrière". Suivant le bourgeon choisi sur la cardioïde, on peut ainsi rencontrer des lapins et des lapins maigres (voire squelettiques) possédant un nombre quelconque d'oreilles (et le même nombre de pattes).

Enfin, l'ensemble ci-dessous est l'ensemble de Julia pour une fonction du 3ème degré. Il correspond à un lapin maigre à une oreille ... dont on a coupé l'oreille (tout en gardant la patte!) et légèrement gonflé l'estomac.

De nombreux mathématiciens et physiciens étudient aujourd'hui ces phénomènes, ou des problèmes similaires, quoiqu'avec des préoccupations différentes. Les méthodes développées pour leur étude permettront peut-être de mieux comprendre les transitions vers le chaos, et la nature des "attracteurs étranges" rencontrés en physique, chimie, mécanique céleste, économie, etc.



Bibliographie (très) sommaire.

- [1] H.O.Peitgen et P.H.Richter : The beauty of fractals. Springer (1986)
- [2] H.O.Peitgen et J.Saupe : Fractal images. Springer (1988)
- [3] A.Douady et J.A.Hubbard : Itérations des polynômes quadratiques complexes. CRAS , t.284 , 1982
- [4] A.Douady : Itérations de polynômes complexes. Courrier du CNRS, 1985
- [5] I. Ekeland : Le calcul, l'imprévu, Seuil, Paris 1984.
- [6] A.Chenciner : Systèmes dynamiques, Encyclopedia Universalis, 2ème Ed. 1982