A PROPOS DE GEOMETRIE AU BAC

Nicole VOGEL
Irem de Strasbourg

En juin 1990, l'énoncé reproduit ci-contre a été proposé aux candidats aux bacs C et E du groupement des académies de l'est[1]. Cet exercice a été très mal réussi [2], je voudrais essayer d'expliquer ici pourquoi les questions posées sont difficiles pour un sujet d'examen.

Exercice 2 : *(5 points)*

Soient Γ le cercle de centre O et de rayon R, [AA'] un diamètre fixé de Γ, P le milieu de [OA']. Une droite Δ distincte de la droite (AA') et de la perpendiculaire en P à [AA'] pivote autour de P et coupe Γ en B et C.

1) Déterminer l'ensemble E_1 des milieux M de [BC] lorsque Δ varie.

2) a. Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. La droite (A'M) coupe (AH) en D. Déterminer l'ensemble E_2 des points D lorsque M décrit E_1.

b. Montrer que A'BDC est un parallélogramme. En déduire que D est l'orthocentre du triangle ABC.

3) La droite (AM) coupe (OD) et I. Montrer que $2.\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{ID} = O$. Que représente I pour le triangle ABC ? Déterminer l'ensemble E_3 des points I lorsque M décrit E_1.

A — Etude de la figure

La situation à étudier devient très vite compliquée. Mais surtout, les heuristiques utiles sont presque toutes associées à des sous-figures sur lesquelles rien n'attire notre attention, détournée par d'autres objets.

Les figures que je propose (cf. page suivante) ne comportent pas les ensembles E_1, E_2, E_3 qui les compliquent davantage sans fournir de nouvelle idée pour les démonstrations. A cette exception près, j'y ai placé tous les éléments mentionnés par l'énoncé et seulement ceux-là. Toutefois, les droites sont limitées à leurs segments nommés ou nécessaires pour trouver un point d'intersection, afin de ne pas alourdir davantage les schémas.

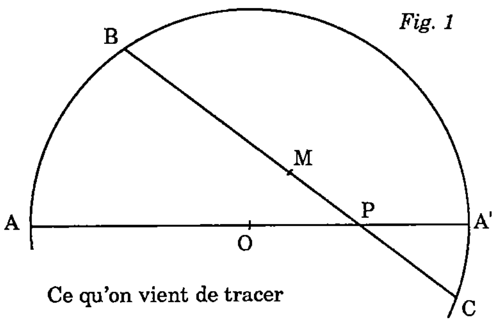
Nous allons examiner les différentes étapes du problème (les différentes hypothèses et conclusions sont codées sur les figures).

[1] Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims et Strasbourg.

[2] Sur le paquet de 60 copies que j'ai corrigées, la moyenne pour cet exercice était de 1,4 / 5 malgré un barème très avantageux.

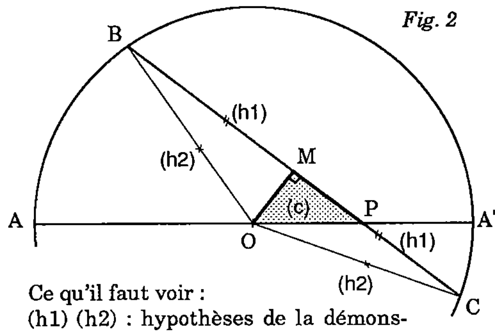
Question 1 : Quel est l'ensemble des points M ?

Fig. 1



Ce qu'on vient de tracer

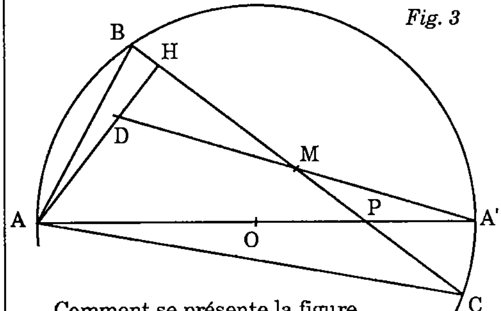
Fig. 2



Ce qu'il faut voir :
(h1) (h2) : hypothèses de la démonstration. (c) : conclusion.

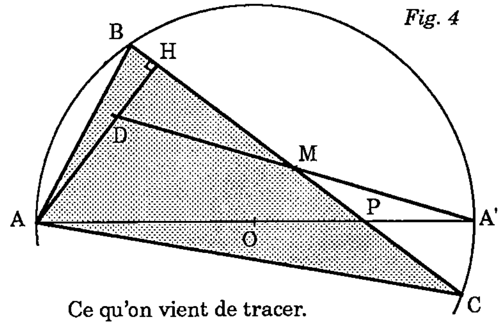
Question 2. a : Quel est l'ensemble des points D ?

Fig. 3



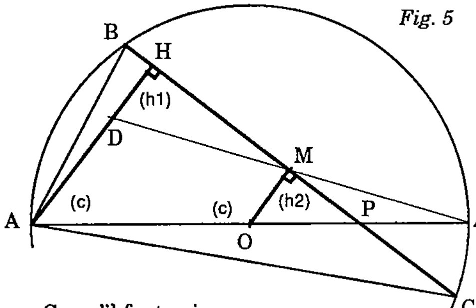
Comment se présente la figure.

Fig. 4



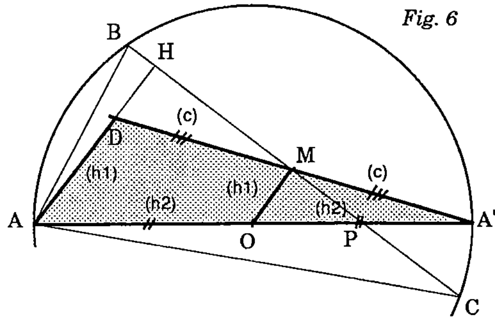
Ce qu'on vient de tracer.

Fig. 5



Ce qu'il faut voir :
(h1) (h2) : hypothèses ; on ne dispose de (h2) que si on a trouvé la question 1
(c) conclusion...

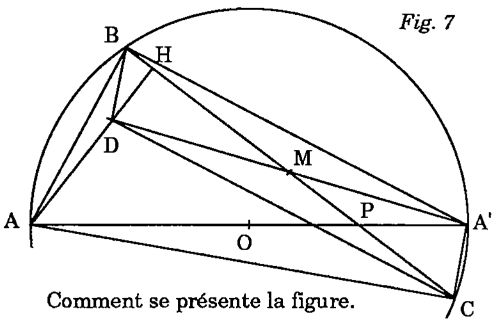
Fig. 6



(h1) (h2) : hypothèses
(h1) est une conclusion intermédiaire
(c) : conclusion

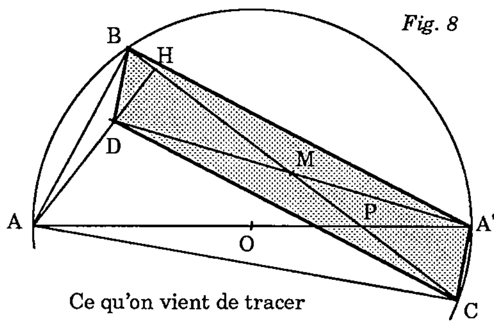
Question 2. b : *"Montrer que A'BDC est un parallélogramme"* ne semble pas poser de problème aux élèves qui ont traité les questions précédentes. La situation est effectivement assez simple si on se réfère au tableau présenté plus loin. Voyons donc comment en déduire que D est orthocentre de ABC :

Fig. 7



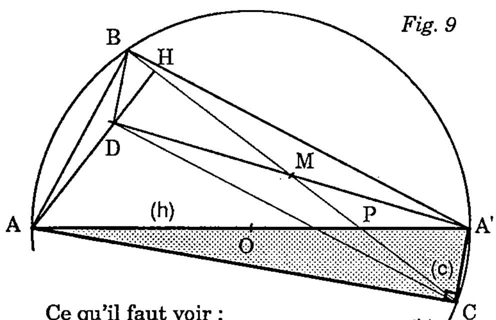
Comment se présente la figure.

Fig. 8



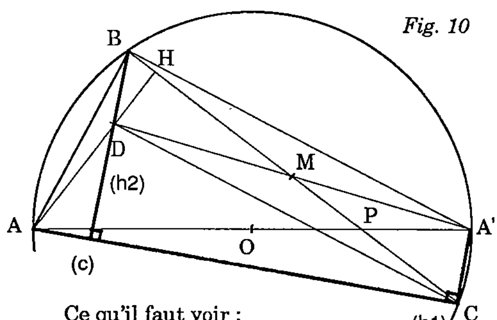
Ce qu'on vient de tracer

Fig. 9



Ce qu'il faut voir :
(h) : C est sur le cercle de diamètre [AA']
(c) conclusion...

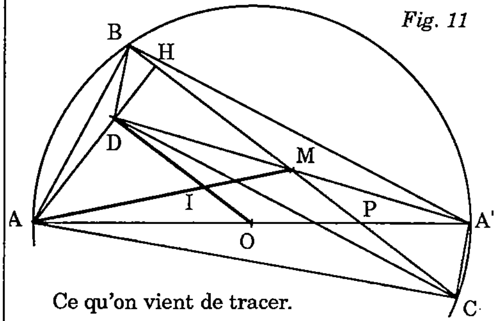
Fig. 10



Ce qu'il faut voir :
(h1) est une conclusion intermédiaire.
(h2) est une conclusion intermédiaire du fait que A'BDC est un parallélogramme.
(c) : conclusion

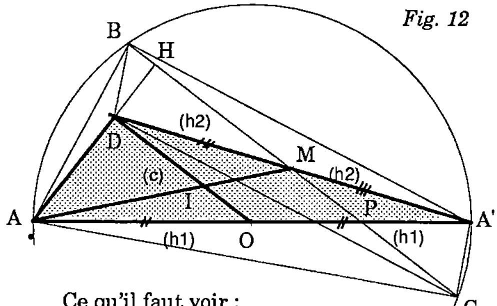
Question 3 : Montrer que $2\,\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{ID} = 0$.

Fig. 11



Ce qu'on vient de tracer.

Fig. 12



Ce qu'il faut voir :
(h1) (h2) [on ne dispose de (h2) que si on a trouvé la question 2.a].
(c) : I est centre de gravité de ADA'. (3)

(3) (c) est une conclusion intermédiaire qui permet de démontrer les trois items de la question 3. Bien sûr, on peut aussi commencer par prouver que les triangles IOM et IDA sont homothétiques en utilisant les résultats de la question 2a) puis en déduire les trois conclusions demandées.

B — Objectifs de l'exercice

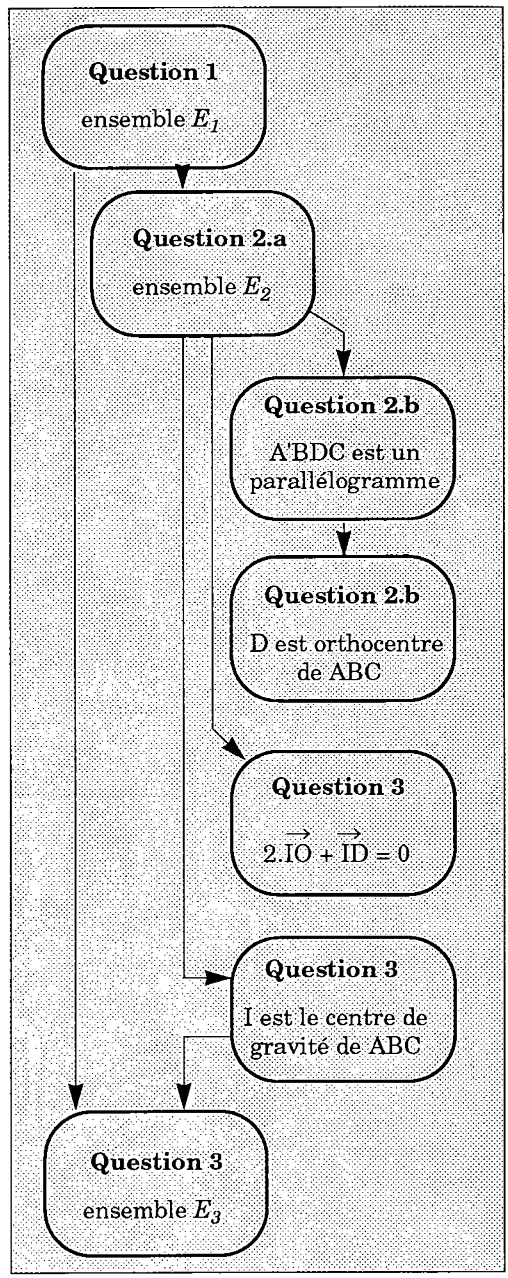
Remarquons que l'énoncé poursuit un double objectif qui ne peut pas apparaître aux élèves :

1) on détermine les ensembles de points E_1, E_2, E_3 dans les questions 1) et 2.a) et à la fin de la question 3) ;

2) on étudie la droite d'EULER du triangle ABC dans la question 2.b) et au début de la question 3).

La question *"montrer que A'BDC est un parallélogramme"* est la seule qui ne se rattache qu'indirectement à l'un de ces objectifs puisqu'elle n'est qu'une aide pour prouver que D est l'orthocentre de ABC. Mais l'élève qui a reconnu les objectifs du premier type est naturellement tenté de penser que les autres questions vont toutes l'aider à les atteindre, ce qui est faux.

En résumé, en suivant le raisonnement évoqué dans la partie A, on obtient le graphe de dépendance des différentes questions donné ci-contre.



C — Comparaison des éléments présents dans chaque question et des éléments utiles à la résoudre

Nous les avons présentés de façon non exhaustive dans un tableau (voir page 65), toujours en suivant le raisonnement que nous avons retenu dans la partie A ci-dessus.

Les références de la forme :

① , ② , ③ , etc.

renvoient aux figures de même numéro des deux pages précédentes.

	Objets qu'on vient de tracer et propriétés associées	Autres objets nouveaux cités dans la question	Eléments sur lesquels porte la conclusion de la question précédente	Objets et propriétés essentiels dans l'heuristique retenue	Objets et propriétés secondaires de la démonstration
question 1 ensemble *E1*	• le cercle Γ 1 • le point O, centre de Γ • le point P, milieu de [OA'] • M, milieu de [BC] • segm. [AA'], [BC]	• le nombre R • la droite Δ , • la droite perpendiculaire en P à (AA') • l'ensemble E_1		• l'angle droit $\widehat{OMP}$ 2	• le triangle isocèle OBC 2 • la droite (OM), médiane de OBC
question 2.a ensemble *E2*	• le point H, pied de la hauteur 4 • D intersection... • le segment [AH], hauteur de ABC • le segment [A'D] • le triangle ABC	• Ensemble E_2	• le point M, sur le cercle de diamètre [OP]	• les triangles A'AD et A'OM ; ils sont homothétiques dans le rapport 2 6	• les droites (AH) et (OM), perpendiculaires à (BC) 5 • le point O, milieu de [AA'] 6
question 2.b A'BDC est un parallélogramme	• le quadrilatère A'BDC 8		• ensemble E_2 • image de E_1 par l'homothétie de centre A' , et de rapport 2	• le point M, milieu de [A'D] et milieu de [BC]	
question 2.b D est orthocentre de ABC			• le quadrilatère A'BDC , parallélogramme	• le segment [BB'], [où B' est l'intersection de (BD) avec (AC)], perpendiculaire à (AC) 10	• l'angle droit A'CA 9 • les droites parallèles (A'C) et (BD) 10
question 3 2.IO + ID = 0	• les segments [AM] et [OD] • le point I, intersection...	• les vecteurs $\vec{IO}$ et $\vec{ID}$	• le point D, orthocentre de ABC	• le triangle ADA' • le point I,centre de gravité de ADA'	• le point M , milieu de [A'D] • le point O , milieu de [AA']
question 3 que représente I ?		• les vecteurs $\vec{IO}$ et $\vec{ID}$, tels que : $2.\vec{IO} + \vec{ID} = \vec{0}$	• le point I • le segment [AM] • la position de I sur [AM]	• le triangle ADA', I est son centre de gravité • la droite (AM) , médiane de ADA' et de ABC	
question 3 ensemble *E3*		• l'ensemble E_3	• le point I, centre de gravité du triangle ABC	• les points I , M et A , tels que : $\vec{AI} = (2/3)\,\vec{AM}$	

Remarques : • la question 1 nécessite une réciproque,
• la position de P sur [OA'] n'intervient que pour obtenir une définition simple des ensembles E_1, E_2, E_3 et pas du tout dans la démonstration.

Conclusions

Cette étude de l'énoncé et de la figure montre que tous les raisonnements élémentaires mis en œuvre sont très simples et à la portée d'un bon élève de seconde. Cette remarque a fait dire hâtivement à certains que l'exercice était très simple.

Mais nous voyons, en comparant les heuristiques utilisées aux hypothèses des questions qu'il n'est absolument pas évident de découvrir de bonnes stratégies de démonstration.

Pire, aucune des méthodes naturellement associées au programme des terminales C et E (utilisation d'une similitude, de la composée de transformations planes, interprétation dans le plan complexe, barycentres...) n'est utile ici. J'ai observé de nombreux élèves qui cherchaient une transformation simple donnant M dans la première question. Je trouve cette tentative honorable. Malheureusement, ces jeunes ont souvent abandonné entièrement l'exercice lorsqu'ils ont constaté que les questions suivantes dépendaient toutes de la première. Ils se sont retrouvés ainsi au même niveau que ceux qui n'avaient pas du tout travaillé la géométrie en terminale.

Certes, cet exercice est un sujet intéressant pour un travail en classe. De plus, il est sûrement souhaitable que l'épreuve de math des bacs C et E comporte un peu de géométrie pure. Cependant, il me semble indispensable de cerner les compétences que nous pouvons évaluer en temps limité. Qu'attendons-nous de nos élèves dans le domaine des heuristiques ? Quelles sont celles que nous les aidons à acquérir ? Quelles sont celles qui sont implicitement associées au programme ?

Pour terminer, je voudrais évoquer un dernier problème : combien de temps *"l'élève moyen, rédigeant posément après avoir réfléchi posément"* — vous savez, celui qui est déposé au pavillon de Breteuil depuis la note de service n° 86-331 du 3 novembre 1986 et auquel on soumet tous les sujets de bac — a-t-il mis pour trouver et rédiger cet exercice ? Et s'il l'avait très bien traité le jour du bac, peut-être même parce que ses professeurs auraient su lui faire aimer la géométrie, aurait-il été raisonnable de ne lui attribuer que cinq petits points en récompense ? Ne risque-t-il pas de dire à ses camarades actuellement en terminale qu'il vaut mieux faire des molts croisés que de la géométrie ?