REPERES - IREM . n°9 - octobre 1992

DEFI : OUTIL INFORMATIQUE DE REVELATION DU ROLE DE LA FIGURE ET D'APPRENTISSAGE DE LA DEMONSTRATION AU COLLEGE

Saddo AG ALMOULOUD
Irmar de Rennes

La résolution de problèmes constitue l'un des objets de l'enseignement dès le début de l'enseignement secondaire. Mais l'atteinte de cet objectif se heurte à des obstacles liés à la nature même de l'activité de résolution de problème et, en particulier, à celle de l'activité de résolution de problèmes de géométrie avec démonstration. Les obstacles liés à l'apprentissage de la démonstration se rencontrent à deux niveaux :

• l'enseignant qui a, en général, des difficultés, d'une part, à repérer et à identifier le type d'erreurs commises par les élèves afin de formuler des hypothèses sur leurs conceptions, et d'autre part, à construire des situations permettant l'émergence de certaines procédures et le déséquilibre des procédures erronées,

• l'élève qui a des difficultés à comprendre le sens et l'intérêt de la preuve, à trouver des arguments, à les formuler et à les articuler rationnellement.

La recherche présentée ici se situe dans le cadre d'une aide à l'apprentissage de la démonstration. L'ordinateur se présente, d'une part, comme un outil efficace de revélation des conceptions des élèves et, d'autre part, comme un outil d'aide à la découverte de la solution et de son organisation déductive.

Dans le cadre d'une recherche sur une aide logicielle à la résolution de problèmes de géométrie avec démonstration en classes de quatrième et de troisième, les travaux décrits ici sont menés au moyen du logiciel **DEFI** (**D**émonstration et **E**xploration de la **F**igure **I**nteractives) élaboré à l'Institut de recherche mathématique de Rennes par Italo Giorgiutti, avec la collaboration du groupe de didactique, dans le cadre du GR. "Didactique et acquisition des connaissances scientifiques". [1]

I — Description du logiciel

DEFI est un logiciel d'aide à la résolution de problèmes de nature affine susceptibles d'être plus complexes que ceux classiquement proposés aux élèves de quatrième et de troisième. Il est constitué de deux modules principaux : le module 'Exploration de la figure' et le module 'Démonstration'. La version actuelle du logiciel fonctionne sur Macintosh.

1 - Choix didactiques ayant conduit à la réalisation du logiciel

La conception du logiciel est fondée essentiellement sur le souci de séparer l'activité de *résolution de problème de géométrie* qui s'appuiera sur la figure, de celle

(1) DEFI : Démonstration et Exploration de la Figure Interactives. DEFI peut être testé par des enseignants de collège disposant de matériel informatique approprié. Pour plus d'informations s'adresser à Régis GRAS ou Ittalo GIORGIUTTI, IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex.

de la *structuration de la démonstration.* Aussi fallait-il :
• mettre les élèves en véritable activité de résolution de problème,
• intégrer, dans cette résolution de problème, un travail de nature heuristique sur la figure,
• réagir en temps réel, aux erreurs de type logique,
• neutraliser au maximum les variables de nature linguistique,
• faire réfléchir l'élève sur sa propre activité,
• travailler plus au niveau de la représentation des connaissances en jeu que des stratégies plus ou moins algorithmiques de la solution.

2 – Exploration de la figure

Le module "Exploration de la figure" a pour objectif de faire prendre conscience aux élèves du rôle et du statut de la figure dans la résolution d'un problème de géométrie. Il est de nature et de fonction essentiellement heuristiques.

Ce module propose successivement les décompositions possibles du problème en sous-problèmes, parmi lesquelles l'élève retient celle qui lui paraît juste. Puis il réitère sur ces sous-problèmes, jusqu'à ce que l'élève se dise capable de démontrer les sous-buts obtenus, mais sans réaliser effectivement cette démonstration. Cette décomposition est faite par une suite de questions plus ou moins ordonnées en une remontée vers des hypothèses à partir de la conclusion à démontrer.

Différentes observations faites par le GR de didactique en classe de quatrième (cf. [12] et [14]) font ressortir le fait que les élèves font une figure (très soignée et très souvent correcte), et puis la mettent de côté comme un travail achevé sans rapport avec la suite du problème. C'est la raison pour laquelle, grâce au module "Exploration de la figure" du logiciel, la figure va être le lieu où l'on va trouver les propriétés et les relations entre les objets géométriques qui vont prendre place dans la démonstration.

Un exemple va montrer le statut de la figure dans **DEFI**. Voici un énoncé proposé par le logiciel :

On considère un triangle ABC *et on désigne par* D *et* E *les milieux de* [BC] *et* [AC], *par* G *et* H *les symétriques de* A *par rapport à* D *et de* B *par rapport à* E.

Démontrer que C *est le milieu de* [GH].

C'est un problème classique de démonstration, dont la conclusion est donnée (et non de type "que pensez-vous de... ?") et qui n'est pas découpé en une série de questions intermédiaires. Nous pensons qu'un tel choix mettra les élèves en véritable activité de résolution de problème, et leur permettra de ne pas s'engager dans des procédures ou des représentations qui n'ont rien à voir avec la démonstration des propriétés proposées. Si l'élève ne trouve pas seul ces propriétés, il y parvient à la suite de questions qui lui sont posées par le logiciel. Les réponses des élèves comportent deux volets :

• une conjecture dégagée de l'exploration de la figure ;

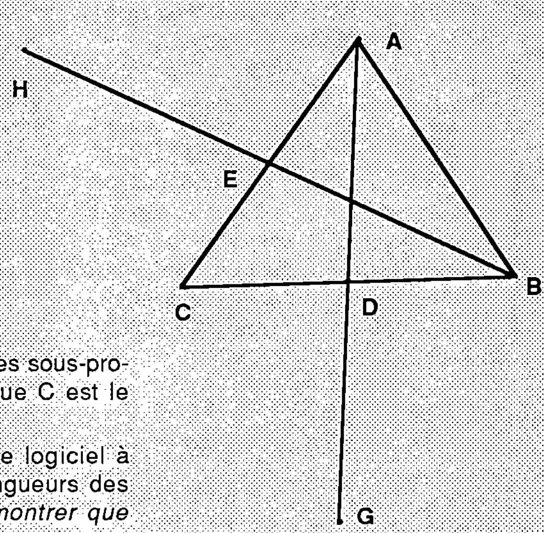
• une déclaration de capacité à apporter sa preuve, enregistrée dans un contrat-bilan.

Ces réponses sont obtenues à partir de figures tracées par l'élève sur papier. On trouvera dans l'encadré 1 un exemple de dialogue entre DEFI et un élève de troisième suivi de quelques commentaires. Les questions sont celles posées par le logiciel et les réponses sont celles de l'élève.

Encadré 1.

Question :
Sais-tu démontrer que le point C *est le milieu du segment* [GH] ?

Réponse : *NON*
[Si le binôme répond par l'affirmative, le logiciel l'invite à passer à la phase démonstration.]



Question : *Sais-tu démontrer que les points* G , C , H *sont alignés ?*

Réponse : *NON*
[Cette question vise à faire apparaître les sous-problèmes à résoudre pour démontrer que C est le milieu de [GH].
Une réponse affirmative conduirait le logiciel à poser la question sur l'égalité des longueurs des segments [CH] et [CG] : *Sais-tu démontrer que* [CG] *et* [CH] *ont même longueur ?*]

Question : *Existe-t-il une droite parallèle à* (CH) *et à* (GC) ?

Réponse : *OUI* [Cette question vise à centrer les élèves sur les conjectures permettant de découvrir les sous-problèmes à résoudre pour prouver que les points G, C et H sont alignés. A ce stade de l'exploration de la figure, si la réponse de l'élève est négative alors le logiciel l'invite à confronter les propriétés utilisées pour contruire la figure et les données du problème.]

Donne 2 points de cette droite **Réponse :** AB

Question : *Sais-tu démontrer que les droites* (AB) *et* (GC) *sont parallèles ?*

Réponse : *OUI* [Une réponse négative amène le logiciel à poser la question suivante : *Le quadrilatère* BACG *est-il un parallélogramme ?*]

Question : *Sais-tu démontrer que les droites* (AB) *et* (CH) *sont parallèles ?*

Réponse : *OUI*

Question : *Sais-tu démontrer que les segments* CG *et* CH *sont égaux ?*

Réponse : *OUI* [Les réponses positives aux dernières questions laissent penser que l'élève fait une conjecture sur la nature des quadrilatères ABCH et ABCG, et découvre une piste pour la preuve de cette conjecture.]

Tu peux passer à l'option Démonstration.

Il arrive que l'élève réponde aux questions posées par le logiciel sans s'assurer que les données du problème lui permettent de prouver ses afirmations. Le logiciel continue à poser une série de questions liées à la réponse de l'élève. Cette série de questions ne peut, dans la majorité des cas, aboutir à une conjecture adéquate. En cas de blocage, le logiciel le convie à une nouvelle exploration de la figure en l'invitant, de prime à bord, à comparer les hypothèses mises en jeu dans la construction de sa figure avec celles du problème proposé.

Ces questions incitent les élèves à un travail important sur la figure. Cette phase heuristique montrera à l'élève, dans bien des cas, la nécessité d'un traçage supplémentaire non indiqué dans l'énoncé d'un problème. Ce traçage peut aider à extraire de la figure des sous-figures permettant de ramener la résolution du problème à la résolution d'une suite de sous-problèmes. Les questions posées par le logiciel au cours de l'exploration de la figure sont déterminantes dans les stratégies de conjecture et de preuve.

Notons qu'au fur et à mesure que s'effectue l'exploration de la figure, les dialogues (les questions posées par le logiciel et les réponses des élèves) sont enregistrés dans un fichier à des fins de consultation d'analyses ultérieures.

3 – Module de démonstration

La réalisation technique du module "Démonstration" s'appuie sur les hypothèses suivantes (s'appuyant elles-mêmes sur diverses observations) :

- la démonstration n'apparaît véritablement comme un processus de validation que lorsqu'elle est complètement maîtrisée,
- la démonstration est un objet profondément culturel,
- les enseignants ont (nous l'avons déjà dit), en général, des difficultés, d'une part, à repérer et à identifier le type d'erreurs commises par les élèves afin de formuler des hypothèses sur leurs conceptions, et d'autre part, à batir des situations permettant l'apparition de certaines procédures et le déséquilibre de celles erronées,
- il faut d'abord faire travailler les élèves avec le modèle le plus simple de la démonstration qui soit (déroulement linéaire des hypothèses vers la conclusion en pas de démonstrations, logique minimale avec "entraîne" et "et") ; une fois ce modèle assimilé, l'élève ne devrait plus se heurter qu'à des difficultés techniques, le contrat de la démonstration étant compris. Notons que dans les rédactions demandées aux élèves, ils sont libres de leurs stratégies,
- un message d'erreur (ou de réussite) a chaque pas de démonstration semble nécessaire.

L'élève dispose d'un fichier informatique de théorèmes propres au champ conceptuel considéré, d'un fichier de spécifications du type : *"Le point ... est milieu du segment ..."*. Un pas de démonstration consiste pour l'élève à désigner ce qu'il veut démontrer, ainsi que le, ou les théorèmes adéquats et leurs spécifications parmi les données (ou hypothèses) du problème. Voyons sur un exemple comment se fait un pas de démonstration à l'aide du logiciel : les deux premières phases sont présentées dans l'encadré 2 ci-contre.

Le choix de l'élève s'étant porté sur le théorème (5) pour le cas considéré, l'ordinateur passe à la *troisième phase* : choix de(s) l'hypothèse(s). Le logiciel pose la question suivante : *sur quelles hypothèses t'appuies-tu ? Choisis dans la liste suivante :*

Encadré 2.

première phase : choix de la propriété à démontrer

Quelles propriétés vas-tu démontrer ? Choisis dans la liste suivante :

1 - *Les points ... sont alignés.*
2 - *Le point ... est le milieu de [...].*
3 - *Les droites (..) et (..) sont parallèles.*
4 - *Le quadrilatère .... est un parallélogramme.*
5 - *La longueur de [..] est égale à celle de [..].*
6 - *La longueur de [..] est égale au double de celle de [..].* "

[Si l'élève souhaite démontrer le parallélisme de droites alors il clique sur la spécification (3), puis le logiciel l'invite à désigner les droites concernées. Pour l'exemple que nous avons pris l'élève choisit les droites (AB) et (GC).]

deuxième phase : choix de la règle d'inférence (théorème ou définition)

"Quel théorème vas-tu utiliser ? Choisis dans la liste suivante :

1 - *Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme*
2 - *Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.*
3 - *Un parallélogramme a ses côtés opposés égaux et parallèles.*
4 - *Si un quadrilatère a ses côtés parallèles, c'est un parallélogramme.*
5 - *Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.*
6 - *Par un point il passe une parallèle et une seule à une droite donnée.*
7 - *Un quadrilatère qui a deux côtés opposés égaux et parallèles est un parallélogramme.*
8 - *Le segment qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et sa longueur est égale à la moitié de celle de ce côté.*

Sur quelles définitions t'appuies-tu ?

Le point M *est le milieu de* [AB] *si et seulement si* M, A *et* B *sont alignés et* MA=MB.

Sur quels calculs t'appuies-tu ?

Egalités sur des longueurs

Ici la liste des spécifications est la même que celle relative à la question de la première phase. Le travail de l'élève se compose de deux parties. La première consiste en la désignation de la spécification et la seconde dans le choix de(s) l'hypothèse(s). Après chaque choix d'une hypothèse, DEFI réitère la question suivante : *"Y a-t-il une autre hypothèse ?"* Cette question a pour but d'amener l'élève à tenir compte de la nature et du nombre d'hypothèses choisies conformément au théorème utilisé.

Voici pour notre exemple les hypothèses choisies :

• *les droites (AB) et (CH) sont parallèles*
• *les segments CG et CH ont même longueur*

Au cours d'un pas de démonstration, l'élève peut consulter le fichier "Etat de la démonstration" qui lui donne à tout moment l'état d'avancement de ce pas. Nous donnons ci-dessous le contenu du fichier à la fin du pas de démonstration :

Tu souhaites démontrer que :
Les droites AB et GC sont parallèles.

En appliquant le theorème suivant :
Deux parallèles à un même troisième sont parallèles entre elles.

En utilisant les hypothèses suivantes :
Les droites AB et CH sont parallèles.
Les segments CG et CH ont même longueur.

A la fin d'un pas de démonstration le logiciel vérifie la validité de l'interaction hypothèse(s)-théorème-conclusion. Un message d'erreur est émis dès qu'une anomalie est décelée. Dans le cas qui nous concerne le message suivant est émis :

"Compare les hypothèses que tu as données et celles du théorème choisi"

Le module "Démonstration" est d'une importance capitale dans l'organisation déductive de la preuve. Par la sanction immédiate de l'erreur commise au niveau de l'articulation hypothèse-théorème-conclusion, il doit permettre à l'élève d'identifier progressivement le statut de chacun de ces trois termes. Toute propriété démontrée peut être utilisée comme hypothèse dans l'un des pas de la démonstration suivante.

Notons qu'on ne peut démontrer qu'une propriété à la fois dans l'environnement du logiciel.

Signalons en outre l'adjonction d'un module "Bilan" dans lequel sont enregistrés et mis à jour les conjectures, les engagements à preuve et les propriétés démontrées. Il est donc personnel à un élève ou un groupe d'élèves, et est accessible à tout moment. Notons enfin que les différents pas (bons et mauvais) de la démonstration produits par un élève ou un groupe d'élèves sont sauvegardés dans un fichier.

II — Evaluation

Nous parlerons essentiellement des évaluations faites en 1989-90 (brièvement) et en 90-91. Nous mettrons l'accent surtout sur la méthodologie choisie, les résultats obtenus et les réactions des élèves de troisième après la séquence d'enseignement de la démonstration à l'aide du logiciel.

1 – Evaluation 89-90

Pour l'évaluation faite en 89-90 avec une moitié de classe de 4ème normale, nous notons que la presque totalité (tous sauf deux) rendaient des démonstrations correctes après passage sur logiciel (cf [1]). Sans l'aide du logiciel (situation papier-crayon), les performances étaient nettement supérieures à la moyenne. Cette année (1991), la majorité de ces élèves sont favorablement jugés dans leurs classes de 3ème. Les élèves ont considéré comme déterminants, soit l'exploration de la figure, soit les messages d'erreurs au cours de l'option démonstration.

2 – Expérimentation 90-91

L'expérimentation de 89-90 menée à l'aide de **DEFI** nous a permis d'avoir quelques éléments de réponse quant à l'aide qu'il peut apporter aux élèves au niveau de l'acquisition de la preuve. Elle a permis, semble-t-il, aux élèves, à partir de l'exploration de la figure, de mieux comprendre le rôle et le statut de la figure dans la résolution d'un problème de géométrie.

La phase de démonstration est d'une très grande utilité dans l'organisation déductive de la preuve. Par la sanction immédiate de l'erreur commise au niveau de l'interaction hypothèse-théorème-conclusion, elle permet à l'élève de comprendre progressivement ce qu'est une démonstration.

L'analyse des procédures d'élèves de quatrième sur **DEFI** a fait ressortir un certain nombre de procédures qui sont, pour la majorité, standard. Les obstacles rencontrés au niveau de l'identification du statut des hypothèses et de celui de la conclusion sont autant de nature linguistigue que logique [14]. Citons en quelques-uns :

• *absence d'une ou plusieurs bonnes hypothèses,*
• *présence d'une ou plusieurs hypothèses fausses,*
• *surabondance d'hypothèses (hypothèses superflues parmi lesquelles figurent la ou les bonne(s) hypothèse(s)),*
• *théorème inadapté à la transition sans être réciproque,*
• *conclusions intermédiaires utilisées dans leur ensemble comme hypothèses, etc.*

a) Les objectifs de l'expérimentation

Nous désirons évaluer l'aide que peut apporter **DEFI** aux élèves de troisième au niveau des stratégies de conjecture et de preuve d'une part, et de l'organisation déductive de la preuve d'autre part. Aussi, suivons-nous l'évolution des élèves avant (prétest) et après (post-test) l'apprentissage de la démonstration à l'aide de **DEFI**. Cette surveillance s'appuie sur les différents pointeurs (procédures erronées ou non) déterminés à partir des productions d'élèves de quatrième de 89-90 ainsi que sur les textes rendus par les élèves.

Sans entrer dans une analyse approfondie des procédures des élèves, nous nous contentons de donner les objectifs des séances d'enseignement ainsi que la situation-problème proposée aux élèves à chacune d'elles.

L'expérimentation se déroule en trois phases. La première phase est un prétest qui a pour but d'avoir des éléments de validation sur la nature des différents pointeurs que nous avons dégagés. La deuxième phase est l'apprentissage de la démonstration à l'aide de **DEFI**. La troisième phase est une phase d'évaluation. Elle a pour but d'évaluer les compétences des élèves après l'acquisition de la preuve à l'aide de **DEFI**.

b) Séquence d'enseignement : méthodologie

— b.1) Objectifs

Elle a pour but d'améliorer les compétences des élèves au niveau de l'exploration de la figure aux fins de réalisation d'un processus de preuve et d'une organisation déductive de cette dernière. Elle s'effectue essentiellement à partir du logiciel **DEFI**. Les tâches qui sont proposées sont les problèmes intégrés au logiciel.

Au cours des séances d'enseignement nous tentons :

• d'amener les élèves à déterminer leurs procédures correctes et erronées ;
• de déterminer pour chaque problème proposé les variables attachées à la figure ;
• de déterminer les variables didactiques(2)

(2) Des variables, affirme Guy Brousseau, sont didactiques lorsqu'elles provoquent un changement qualitatif des procédures et de la stratégie de l'élève. Leur pertinence permet d'expliquer des résultats et leur commande de les contrôler et agir sur eux.

plus particulièrement attachées à l'environnement du logiciel (bilan, démonstration à un pas, fichier théorèmes, état de la démonstration, etc.) et d'indiquer comment leurs différentes valeurs peuvent provoquer une modification des procédures des élèves.

La séquence d'enseignement donnent lieu à six séances avec une classe de troisième de 25 élèves (élèves de 14-15 ans) en très grande difficulté en mathématique ; le premier contact que nous avons avec eux laisse penser qu'ils présentent une attitude négative à l'égard des mathématiques. Elle est repartie en deux groupes de 14 (groupe 1) et 11 (groupe 2) élèves chacun. Les deux groupes suivent les différentes séquences en des jours différents de la semaine. Notons que la répartition des groupes était déjà établie dans le cadre de l'enseignement de l'informatique prévu au cours de cette année scolaire.

Les séances se déroulent aux heures prévues pour l'enseignement de l'informatique autour de cinq postes constitués de cinq Macintosh Plus. Les élèves sont répartis en cinq trinômes (dont quatre pour le premier groupe) et cinq binômes (dont cinq pour le second groupe) et chacun des binômes ou trinômes dispose d'une console et de deux ou trois brouillons selon le cas. Le nombre d'observateurs est de deux (I. GIORGIUTTI et moi-même) pendant toute la durée de la séquence d'enseignement.

A chaque séance, le travail sur ordinateur est suivi d'une tâche de rédaction de la démonstration en situation papier-crayon en classe ou à la maison au choix de l'élève. Aussi le travail sur ordinateur dure-t-il effectivement une heure ou une heure et demie.

Signalons enfin que, pendant toute la séquence d'enseignement, les élèves disposent individuellement de la liste des théorèmes figurant dans l'environnement du logiciel. Ce choix didactique s'explique par le fait, d'une part que le fichier des théorèmes n'est pas accessible aux élèves à l'option "exploration de la figure", et que d'autre part il faut minimiser les efforts mnémoniques.

— b.2) Première séance

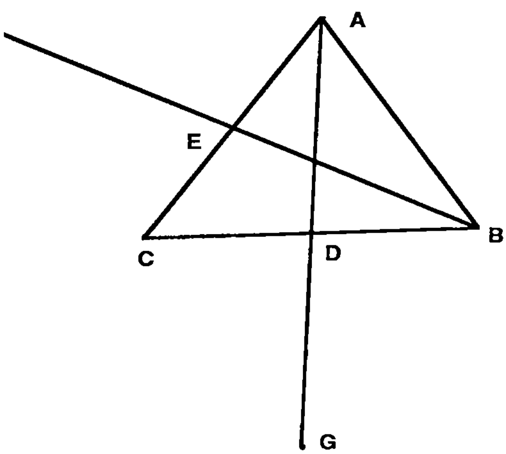
L'objectif principal visé est de familiariser les élèves à l'outil informatique avec lequel ils auront à travailler. Il s'agit de leur apprendre à utiliser les menus déroulants, notamment :
• la signification des icônes,
• les menus : navigation, information, aide,
• exploration de la figure, démonstration, remise à zéro.

Cette phase de familiarisation s'effectue en même temps qu'un début d'acquisition des phases heuristique et déductive. Elle est conduite à l'aide de la situation-problème suivante donnée sans la figure :

On considère un triangle **ABC** *et on désigne par* **D** *et* **E** *les milieux de* **[BC]** *et de* **[AC]**. *Le point* **G** *est le symétrique de* **A** *par rapport à* **D**. *Le point* **H** *est le symétrique de* **B** *par rapport à* **E**.
Démontrer que le point **C** *est le milieu de* **[GH]**.

Analyse a priori (Elle vise à identifier la tâche proposée aux élèves et à prévoir les stratégies possibles.)

Dans l'environnement du logiciel il est possible de mettre à l'œuvre au moins deux stratégies de conjecture et de preuve. La mise en œuvre de la première stratégie nécessite l'identification du segment [ED] ainsi que celle de son statut en relation avec celui des segments [CG] et [CH]. Aussi, l'élève doit-il faire ressortir les triangles ACG et BCH, puis penser à l'application du théorème des milieux(3).



La deuxième stratégie nécessite le traitement correct des informations mathématiques formelles et intuitives suivant un contexte légèrement différent que celui de la première stratégie. Le traitement correct des informations intuitives impose l'identification du rôle du segment [AB] en relation avec celui des segments [CG] et [CH]. Aussi, faut-il découvrir les quadrilatères ABGC et CBAH et émettre des conjectures sur leur propriété. Démontrer cette propriété demande le traitement correct des informations mathématiques formelles suivantes :

- statut des points E et D,
- statut du théorème :*"Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme"*.

(3) Le segment qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et sa longueur est égale à la moitié de celle de ce côté.

Les questions suivantes peuvent favoriser l'une ou l'autre stratégie :

"Existe-t-il une droite parallèle à (CH) et (CG) ?"

"Existe-t-il un segment dont la longueur soit égale à (le double de, la moitié de) celle de [CH] et [CG] ?"

Remarques

1) Si le point I est le milieu d'un segment [AB] nous avons alors les égalités suivantes :

a) AI = IB b) AB = 2AI c) AB = 2IB
d) IA = 1/2 AB e) IB = 1/2 AB.

Dans l'environnement du logiciel les égalités b), c), d) et e) sont implicitement reconnues alors que l'égalité a) doit être prouvée à partir de la définition du milieu d'un segment ou des égalités citées précédemment. Cette contrainte peut être mal perçue par des élèves non avertis.

2) La transitivité de l'égalité se traduit dans l'environnement du logiciel par l'écriture d'une suite d'égalités aux extrémités desquelles sont placées les longueurs dont on veut prouver l'égalité. Par exemple, sachant que CG = 2ED et HC = 2ED , l'usage de la transitivité pour prouver l'égalité de CG et HC se traduira sur l'écran par l'écriture " CG = 2ED = HC " qui n'est pas habituelle aux élèves.

Analyse a posteriori (Cette analyse vise à rendre compte de ce qui se passe effectivement et de comparer avec ce qui était prévu.)

Nous notons qu'à la suite de la phase heuristique, la majorité des élèves n'a pas eu de grandes difficultés à émettre des conjectures et se dire capable de prouver ces dernières. L'obstacle essentiel rencontré par les élèves réside dans l'identification du statut des faits et des théorèmes et définitions. L'obstacle le plus persistant apparaît au niveau de la décomposition d'un théorème en ses différents composants. Il semble que les élèves, lors du choix d'une règle d'inférence, ne se posent pas les questions suivantes :

> *"Qu'est-ce qui représente les hypothèses de la propriété choisie? Ces hypothèses sont-elles données ou démontrée lors d'un pas de démonstration précédent?"*
>
> *"Ce que je cherche à démontrer instancie-t-il bien la conclusion de la propriété choisie?"*

La recherche de réponses adéquates à ces questions doit pourtant permettre à l'élève de comprendre, à moyen ou long terme, les règles qui président au jeu de la déduction.

Au cours de cette séance de familiarisation, la majorité des élèves n'exploite pas toutes les facilités qu'offrent le logiciel *(consultation du bilan général, du bilan "état de la démonstration, reprise de l'exploration de la figure en cas de blocage à la de démonstration)*. Une partie du contrat didactique[4] assigné aux observateurs (ou l'enseignant) est justement d'aider les élèves à comprendre le jeu de la déduction.

Dans le cadre de notre activité, le rôle de l'observateur est une variable didactique d'une importance capitale, surtout lors d'émission de messages d'erreur par le logiciel. Aussi, insistons-nous sur le fait qu'il faut profiter des messages d'erreur pour consulter le bilan général et le bilan "Etat de la démonstration". Cette consultation et une analyse des éléments mis en interaction permettent, sans doute, de déterminer la nature exacte de l'erreur au niveau de l'interaction hypothèse-théorème-conclusion. L'obstacle lié à la variable "bilan" montre la différence entre le "bilan à l'écran" et le "bilan en situation papier-crayon". Il est, en effet, plus coûteux de quitter l'écran sur lequel on travaille pour aller consulter un bilan qu'on est obligé d'aller chercher.

— *b.3) Deuxième séance*

L'objectif principal est de résoudre un problème de géométrie et de structurer sa solution à l'aide du logiciel **DEFI.**

Au cours de cette séance les différents binômes ont à traiter un problème à l'aide du logiciel. Ils ont comme contrat didactique de mettre à l'œuvre la phase d'exploration de la figure et celle de démonstration. Ils font le bilan et une correction des erreurs d'interaction hypothèse-théorème-conclusion qu'ils ont commises. Une rédaction de la preuve est demandée à chaque élève à la fin de la phase démonstration. La situation-problème ci-dessous est proposée à tous les binômes ou trinômes.

> ***ABCD** est un quadrilatère. On désigne par **M, N, P** et **Q** les milieux respectifs des segments **[AB], [BC], [CD]** et **[AD]**.*
>
> *Démontrer que le quadrilatère **MNPQ** est un parallélogramme.*

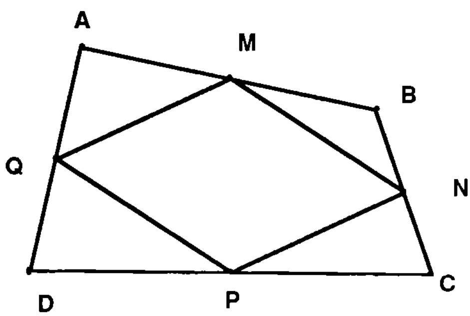
Analyse a priori

La résolution du problème nécessite la mobilisation de concepts supposés connus par les élèves. Il s'agit des concepts de parallélogramme et de milieu d'un segment.

Pour la résolution du problème posé, nous espérons que le logiciel, par le jeu de questions, amènera, les élèves à découvrir l'un au moins des segments [AC] et [BD],

(4) Guy Brousseau affirme que le contrat didactique est ce qui détermine, explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement, ce que chaque partenaire va avoir à charge de gérer et dont il sera, d'une manière ou d'une autre, comptable de vant l'autre.

ainsi que le statut particulier de ces derniers en relation avec celui des points M, N, P et Q. Les règles d'inférence doivent s'appuyer sur le théorème des milieux, ainsi que sur la transitivité du parallélisme et (ou) l'inférence transitive de la relation d'égalité.



L'entrée des élèves dans le jeu de la déduction peut se faire dans l'environnement du logiciel suivant deux stratégies différentes. La première peut prendre appui sur la définition suivante de parallélogramme : *"un quadrilatère qui a deux côtés parallèles et de même longueur est un parallélogramme"*.

La seconde stratégie, quant à elle, peut s'appuyer sur la règle d'inférence suivante : *"un quadrilatère qui a les côtés deux à deux parallèles est un parallélogramme"*.

Analyse a posteriori

Si la solution parait évidente à démontrer après le traçage de la figure liée aux données du problème, le binôme qui manifeste cette impression est invité à rédiger immédiatement en situation papier-crayon sa démonstration. Ensuite, il passe au module "démonstration" de DEFI afin de déceler ses erreurs éventuelles. Seuls deux binômes passent par cette option. La confrontation des procédures des deux situations montre que l'organisation déductive produite par l'un des binômes est parfaite tandis que celle de l'autre binôme est entachée d'une seule erreur, erreur due semble-t-il à une inversion des sommets du quadrilatère MNPQ.

Les autres binômes et trinômes, procèdent, pour la majorité, à une exploration rapide dans l'environnement du logiciel. Mais ils sont irrémédiablement bloqués à la phase de démonstration. La reprise de la phase heuristique et une prise en compte des hypothèses et des règles d'inférence mobilisables leur permettent de comprendre l'importance du rôle, par exemple, des points M et N et du segment [AC] dans la production de la preuve via le théorème des milieux. Les observateurs contribuent à cette prise de conscience. En effet, leur rôle consiste, entre autre, à amener les élèves à prendre conscience de l'enjeu de l'activité de résolution de problèmes de géométrie et de comprendre que le but visé est de les aider à surmonter leurs difficultés. Aussi fallait-il atteindre les objectifs suivants :

• faire une exploration complète de la figure en essayant de découvrir des segments utiles non encore tracés sur la figure. Grâce aux questions posées par le logiciel et une réflexion approfondie sur les hypothèses et la liste des théorèmes, ils arrivent à identifier les segments, par exemple [AC] et [MN] ainsi que le théorème des milieux qui permet de démontrer, par exemple que (MN)// (AC) et AC=2MN,

• comprendre comment se fait l'interaction hypothèses-théorème-conclusion. A la phase démonstration, l'obstacle le plus persistant est l'identification des différents éléments qui composent un théorème, à savoir les hypothèses, la (ou les) conclusion(s). Ils désignent la propriété à démontrer, le théorème adéquat, mais le choix des hypothèses est en général inadéquat. A chaque émission de message d'erreur, ils sont invités à refléchir sur leur pas de démonstration : comparer la conclusion à démontrer et les hypothèses choisies avec celles du thorème appliqué. Nous cherchons à travers ce message qu'ils découvrent d'eux-mêmes où se trouve l'incompatibilité.

A la fin de la séance, le problème est résolu à l'aide de DEFI et une rédaction est faite en situation papier-crayon.

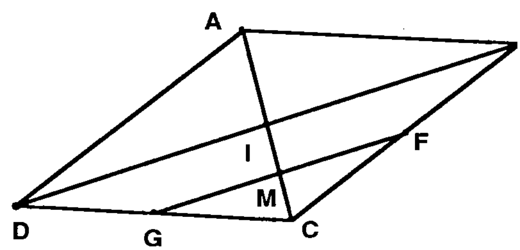
— *b.4)Troisième séance*

L'objectif reste le même que celui de la seconde séance. La seule différence réside dans l'exploration de la figure. Nous voulons, à travers la tâche proposée, mettre en évidence le module "Exploration de la figure". Le prétest que nous avons réalisé semble indiquer que le statut de la figure dans la démonstration est acquis par les élèves de troisième. Nous avons émis une hypothèse possible de la cause de cette situation. En effet, nous avons signalé, dans les analyses faites sur les différentes procédures des élèves au prétest, que la découverte des différentes sous-figures lors de l'exploration de la figure est en corrélation forte avec l'existence ou non de traçages supplémentaires non annoncés dans l'énoncé du problème. Aussi proposons-nous la situation-problème ci-dessous dont la résolution demande des traçages supplémentaires sur la figure.

*On considère un parallélogramme **ABCD**. Soit **I** le centre de ce parallélogramme, soient **F** et **G** les milieux de [BC] et de [DC], et soit **M** le point d'intersection de (AC) et de (FG).*
*Démontrer que **M** est le milieu de [IC].*

Analyse a priori de la situation

L'étape la plus difficile de la phase heuristique sera vraisemblablement la découverte de la solution. Celle-ci se fait par l'intermédiaire de l'exploration de la figure dans l'environnement du logiciel. Nous espérons, lors de cette phase heuristique, que le logiciel aidera les élèves dans la découverte des différentes sous-figures et sous-problèmes nécessaires à la production de la démonstration. La clé des différentes stratégies se situe dans la découverte de la nature du quadrilatère IGCF et dans le bon usage du théorème des diagonales(5).



Deux stratégies de conjecture et de preuve peuvent être mise à l'œuvre pour démontrer que le quadrilatère IGCF est un parallélogramme. La première peut s'appuyer sur la définition suivante : *"Un quadrilatère qui a les côtés deux à deux parallèles est un parallélogramme"*, l'autre prendra appui sur la définition : *"Un quadrilatère qui a deux côtés parallèles et de même longueur est un parallélogramme"*.

La mobilisation de la première stratégie impose deux applications correctes du théorème des milieux. Le résultat obtenu en passant par ce théorème est le parallélisme des droites ((IF) et (GC), et celui des droites (IG) et (CF)). Cela suppose que les

(5) Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

élèves identifient le triangle DBC et le statut des segments [GI] et [IF] en relation avec celui du segment [DB].

La deuxième nécessite deux applications du théorème des milieux : l'une pour obtenir le parallélisme de droites (par exemple, (GI) et (BC)), l'autre pour démontrer l'égalité de longueur (par exemple 2GI et BC). De plus, il faut utiliser l'inférence transitive de la relation d'égalité pour prouver l'égalité des longueurs de deux côtés du parallélogramme (par exemple [GI] et [CF]).

Analyse a posteriori

Au cours du traçage de la figure, nous remarquons que tous les élèves du groupe 2 mettent en relief le parallélogramme IGCF. Ce traçage supplémentaire semble découler d'une conjecture ouvrant le chemin de la découverte de la solution. Mais la suite des évènements montre que cela n'est que le résultat d'un réflexe naturel ou la copie de la figure du voisin. La majorité des élèves ne met pas suffisamment à profit la phase heuristique du logiciel pour décomposer le problème en une suite de sous-problèmes. Cet état de fait a pour conséquence un blocage irrémédiable des élèves à la phase démonstration.

Une deuxième exploration de la figure permet de découvrir le triangle DBC, ainsi que le statut des segments [GI] et [CF]. Les réponses aux questions posées par le logiciel conduisent les différents trinômes et binômes à adopter la stratégie de conjecture et de preuve qui consiste:

• à constater, d'une part, le parallélisme des droites (GI) et (CF), et d'autre part, l'égalité entre les longueurs des segments [GI] et [CF] via la longueur du segment [BC],

• à utiliser les régles d'inférence suivantes pour les différents pas de démonstration :

— le théorème des milieux

— *"un quadrilatère qui a deux côtés parallèles et de même longueur est un parallélogramme"*

— le théorème des diagonales.

La difficulté liée à la découverte du triangle DBC peut s'expliquer en partie par l'encombrement de la figure dû au traçage du quadrilatère IGCF.

Notons que la phase heuristique dure pratiquement les 3/4 du temps prévu pour la séance.

L'obstacle majeur dans la production de la démonstration se situe dans la reconnaissance du statut du point I et de l'usage du théorème des diagonales. Aussi les causes probables de la difficulté d'application du théorème se trouvent à deux endroits.

La première cause est au niveau des hypothèses du problème. En effet, le point I est annoncé dans le problème comme étant le centre du parallélogramme ABCD. Ce point est considéré par certains élèves comme un centre de symétrie (ce qui est vrai) de la figure et par conséquent milieu des diagonales. Cela confère au point I milieu le statut d'hypothèse, statut non reconnu comme tel dans l'environnement du logiciel. Cette confusion entre statut *d'hypothèse* et celui de *conclusion* semble être liée à la lecture que font les élèves de l'énoncé du problème.

La deuxième cause est directement liée à l'application du théorème cité ci-dessus. Comme nous l'avons déjà signalé, la grande difficulté se situe dans la décomposition du théorème choisi comme règle d'inférence :

identifier les hypothèses et la (ou les) conclusion(s). L'analyse qu'ils font des différentes erreurs commises ne leur permet pas toujours de déceler l'incompatibilité des hypothèses ou conclusion(s) avec celles du théorème choisi. Par exemple, pour le cas qui nous concerne, dans l'application du théorème : *"Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu"*, une seule des hypothèses est prise en compte : *"ABCD est un parallélogramme"*. La pratique en classe aidant, la majorité des élèves manquent de nommer les diagonales du parallélogramme concerné.

Nous notons également une autre difficulté liée à la désignation des diagonales du parallélogramme dans l'environnement du logiciel. En situation papier-crayon, on annonce les segments en question, à savoir [BD] et [AC], tandis que dans l'environnement du logiciel on donne l'alignement des points A, I, C, puis celui des points B, I, D. Ces deux types de désignation sémantiquement différents n'ont pas le même degré de complexité quant à leur emploi. Il est beaucoup plus difficile (et l'expérience le montre) que l'élève pense à utiliser la deuxième désignation. A cette étape de la démonstration, le rôle du maître consistera justement à aider les élèves à passer de la première désignation à celle reconnue par le logiciel.

Les difficultés rencontrées par les élèves sont les mêmes que celles citées ci-dessus. Mais nous notons une nette différence de comportements entre cette séance et la deuxième. Cette différence se manifeste au niveau de la compréhension des messages d'erreur. L'obstacle lié à la décomposition des règles d'inférence s'amenuise progressivement.

— b.5) Quatrième séance

L'objectif visé reste le même que celui de la troisième séance, à savoir la résolution d'un problème dont la découverte de la solution nécessite des traçages supplémentaires. De plus, nous voulons tester le degré de résistance des stratégies des élèves autres que celles mises en place à l'aide du logiciel. Par exemple, supposons qu'un binôme souhaite appliquer une des propriétés de la symétrie centrale autre que l'équivalence : (*M symétrique de G par rappport à I*) équivalent à (*I est le milieu de [GM]*). Sachant qu'il peut résoudre le problème en situation papier-crayon, quelle sera son attitude face à l'ordinateur ? Nous pensons que, pour des raisons de certitude des résultats à obtenir, il préfèrera l'environnement du logiciel où les erreurs commises sont décelées et corrigées au fur et à mesure que s'effectue la structuration de la démonstration.

La particularité de la situation-problème proposée réside dans le fait que l'élève peut utiliser, en situation papier-crayon, les propriétés du centre de gravité d'un triangle ou celles de la symétrie centrale pour faire la démonstration de la question posée. Notons que ces propriétés ne sont pas disponibles dans le fichier des théorèmes du logiciel.

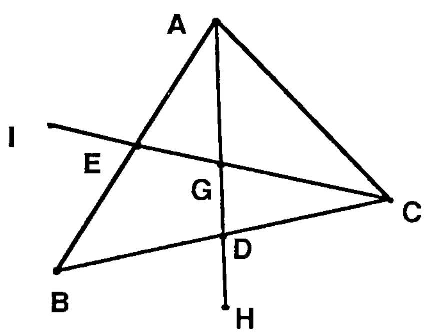
*On considère un triangle **ABC** et on désigne par **D** et **E** les milieux respectifs de **[BC]** et de **[AB]**. Soit **G** le point d'intersection des droites **(AD)** et **(CE)**. Le point **H** est le symétrique de **G** par rapport à **D**. Le point **I** est le symétrique de **G** par rapport à **E**.*

*Démontrer que **G** est le milieu de **[AH]**.*

Analyse a priori

Au cours de la phase heuristique trois stratégies peuvent être mises à l'œuvre.

La première stratégie s'appuie sur les propriétés du centre de gravité d'un triangle. Elle sera mobilisée par les élèves manifestant une aptitude à se servir des propriétés du centre de gravité d'une figure comme règles d'inférence (AG=2/3AD et GD=1/3AD pour notre situation-problème). Elle ne nécessite aucune exploration de la figure dans l'environnement du logiciel.



L'option "exploration de la figure" du logiciel peut constituer un obstacle à la mobilisation de cette stratégie. En effet, les questions posée par le logiciel ne portent pas sur les propriétés du point G en tant que centre de gravité du triangle ABC. Cela peut conduire les élèves à changer leur stratégie. Or cette stratégie est gagnante dans l'environnement papier-crayon.

Les deux autres stratégies nécessitent l'emploi d'une ou plusieurs des propriétes et définitions suivantes :

• *"Un quadrilatère qui a deux côtés parallèles et de même longueur est un parallélogramme"*;

• l'inférence transitive de la relation d'égalité,

• l'inférence transitive de la relation de parallélisme,

Elles s'appuient toutes sur la conjecture suivante : *"Le quadrilatère IACH est un parallélogramme"* et le théorème des diagonales. Mais la preuve de cette conjecture peut se faire suivant deux pistes.

La première piste repose sur l'identification du statut du segment [ED], du quadrilatère IACH, des triangles ABC et GHI, ainsi que sur leur rôle dans la production de la démonstration. La découverte de ces sous-figures fera référence au théorème des milieux.

La difficulté à ce niveau de la phase heuristique réside dans l'identification du rôle que peuvent jouer les triangles ABC et IGH, ainsi que celui des points E et D. Il est probable que les traçages supplémentaires à effectuer rendent l'exploration de la figure plus complexe, surtout au niveau de la découverte du triangle IGH.

La deuxième piste passe par le parallélisme des droites (AI) et (HC) ainsi que sur l'égalité des longueurs des segments [AI] et [HC]. La démonstration de ces deux conjectures prend sa source dans la découverte de la nature des quadrilatères IAGB et CHBG.

Analyse a posteriori

Dans notre analyse a priori nous avons fait ressortir trois stratégies possibles pour la découverte de la preuve et la structuration de la démonstration. Une analyse rapide des stratégies adoptées par les différents binômes et trinômes montre qu'une très forte majorité, contrairement à nos prévisions, met en œuvre la troisième stratégie.

La première stratégie s'appuie sur les propriétés du centre de gravité du triangle ABC. L'organisation déductive est basée sur des calculs de distance ainsi que sur l'inférence transitive de la relation d'égalité. Un seul élève du groupe 2 esquisse une certaine approche de cette stratégie. Mais cette esquisse ne permet pas d'aller plus loin à cause sans doute des relations à mettre en place, à savoir AG=2/3AD et GD=1/3AD. Cette stratégie est abandonnée faute d'arguments solides convainquant l'autre élève du binôme.

La deuxième stratégie est adoptée par quatre binômes du groupe 2. Elle est la conséquence de la réponse positive donnée à la question:*"Existe-t-il une droite parallèle à (IH) et (CA) ?"*. En effet, cette question favorise la découverte du segment [ED] ainsi que l'émission d'une conjecture sur le parallélisme des droites (ED) et (IH), et celui des droites (ED) et (CA).

Tous les trinômes et le binôme du groupe 1, et un seul binôme du groupe 2 mettent en œuvre la troisième stratégie. Elle est la conséquence de la réponse positive donnée à la question : *"Existe-t-il une droite parallèle à (AI) et (HC)?"*. En effet, cette question favorise la découverte du segment [GB] ainsi que l'émission d'une conjecture sur la nature des quadrilatères ACHI et BGCH.

D'une façon générale, la communication entre les élèves qui constituent un binôme se fait bien. La réalisation d'un pas de démonstration s'effectue après accord entre les éléments du binôme sur la conclusion à démontrer ainsi que sur les hypothèses et le théorème à choisir. Le bilan général est régulièrement consulté pour faire l'état des propriétés démontrées et celles qui restent à démontrer. Les messages d'erreur sont bien analysés aux fins de la découverte de l'élément ou des éléments non valide(s) de l'articulation *hypothèses-théorème-conclusion.*

— *b.6) Cinquième séance*

Seule l'exploration de la figure à l'aide du logiciel est autorisée au cours de cette séance. Chaque élève fait le bilan de(s) la question(s) qui a (ont) été déterminante(s) dans ses stratégies de conjecture et de preuve. L'exploration est suivie d'une rédaction individuelle de la démonstration sur place ou à la maison. L'objectif visé est de voir le comportement des élèves à la phase démonstration en situation papier-crayon après avoir résolu un problème à l'aide du module "exploration de la figure" du logiciel. Tous les binômes ou trinômes travaillent sur le problème suivant (sans la figure) :

__ABC__ est un triangle et __M__ un point à l'intérieur de ce triangle. __I__ et __J__ sont les milieux respectifs des côtés __[AB]__ et __[AC]__. Les points __D__ et __E__ sont tels que __I__ est le milieu de __[ME]__ et __J__ le milieu de __[MD]__.

Démontrer que __DCBE__ est un parallélogramme.

Analyse a priori

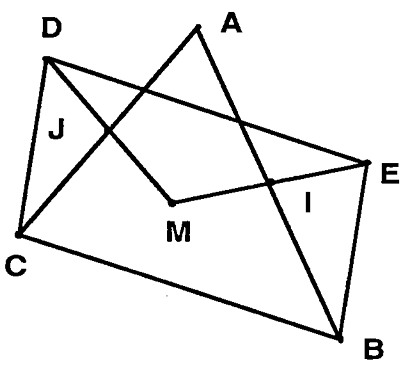
Deux pistes au moins sont mobilisables dans l'environnement du logiciel pour résoudre et structurer la solution de la question posée. Toutes deux nécessitent l'application correcte des propriétés suivantes :

- *"Si un quadrilatère a deux côtés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme,"*
- l'inférence transitive de la relation d'égalité,
- l'inférence transitive de la relation de parallélisme.

La première stratégie prend appui essentiellement, en plus des propriétés citées ci-dessus, sur le théorème des milieux. La mise en œuvre de cette stratégie nécessite de la part des élèves une étude sérieuse du rôle que peuvent jouer le segment [IJ] et les triangles ABC et DME dans la découverte de la solution du problème. Nous espérons évidemment que, par le jeu de questions posées par le logiciel, les élèvent soient amenés à identifier la relation qui existe entre, d'une part, les segments [DE] et [IJ], et d'autre part, les segments [IJ] et [BC]. Les questions suivantes doivent favoriser cette identification :

• *"Existe-t-il une droite parallèlle à (BC) et (DE) ?"*

• *"Existe-t-il un segment dont la longueur soit la moitié de celle des segments [BC] et [DE] ?"*



La deuxième, quant à elle, repose essentiellemnt, en plus des propriétés citées au début de cette analyse a priori, sur les règles d'inférence suivantes :

• *"Si les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme."*

• *"Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux et parallèles"*

La mobilisation de cette stratégie suppose que l'élève ait étudié le rôle du segment [AM] dans la résolution du problème, et ait découvert les quadrilatères AMCD et AMBE, cette découverte devant être suivie d'un engagement à démontrer les propriétés conjecturées (*AMCD et AMBE sont des parallélogrammes*).

Nous espérons que le jeu de questions posées par le logiciel amène certains élèves à découvrir la relation qui existe entre, d'une part, les segments (CD) et (AM), et d'autre part, les segments [AM] et [BE]. Les questions suivantes favorisent cette découverte :

• *"Existe-t-il une droite parallèlle à (CD) et à (BE)?"*

• *"Existe-t-il un segment dont la longueur soit égale à celle de [CD] et [BE]?"*

Analyse a posteriori

L'exploration de la figure se déroule d'une façon rapide et elle permet de conjecturer le parallélisme des droites (AM) et (BE), ainsi que celui des droites (AM) et (CD) à partir des engagements à preuve sur les propriétés des parallélogrammes AMBE et AMCD. Seule une minorité des binômes adopte la seconde stratégie.

Tous les élèves, à l'exception de six, produisent, en situation papier-crayon, des démonstrations satisfaisantes. Nous notons que sept élèves appliquent les propiétés suivantes pour réaliser leur démonstration :

• théorème des milieux pour démontrer le parallélisme de (IJ) et (DE),

• théorème des diagonales pour démontrer que AMCD et AMBE sont des parallélogrammes,

• la propriété relative au parallélisme des côtés d'un parallélogramme,

• l'inférence transitive de la relation de parallélisme pour démontrer que les côtés du parallélogramme DCBE sont deux à deux parallèles.

Deux quelconques de ces élèves exclusivement centrés sur le parallélisme n'appartiennent pas forcément au même binôme de travail sur logiciel. Ce comportement semble être la conséquence de la liberté d'initiative accordée aux élèves durant toute la séquence d'enseignement.

Les textes de démonstration rendus sont très satisfaisants. Nous sommes particulièrement frappés par l'un dont l'auteur combine les chaînage arrière et avant. Cette attitude nous amène à nous poser les questions suivantes:

• "Ce comportement est-il la conséquence de l'influence du module "exploration de la figure" ou une volonté de faire une structuration de la solution correcte mais différente de celles qu'impose le logiciel ?"

• "Quelle est la part du maître dans ce comportement ?" La stratégie d'enseignement de la démonstration suivie par l'enseignant titulaire repose sur le chaînage avant. Tout laisse penser que l'élève ayant compris le jeu de la déduction manifeste plutôt une volonté de faire différemment. Il semble donc qu'à cette étape de la séquence d'enseignement la véritable difficulté réside dans la découverte de la solution.

— *b.7) Sixième séance*

Elle a pour but la correction pour certains binômes de leurs procédures erronées commises au cours de la phase de rédaction de la solution du problème exploré à la séance 5. Il s'agit de montrer aux élèves l'impact de la variable "Usage du module démonstration" sur leurs organisations déductives, et aussi de les amener à identifier et corriger leurs procédures erronées à l'aide du logiciel. Seuls trois binômes reprennent la démonstration dans l'environnement du logiciel. Notons qu'aucune nouvelle exploration n'est autorisée.

Aux autres est proposée une tâche identique à celle qui leur était assignée à la séance 5 avec en plus la liberté de faire la phase heuristique en situation papier-crayon ou dans l'environnement de **DEFI**. Le problème ci-dessous leur est proposé :

*Soit **ABCD** un parallélogramme. Les points E, F, G et H sont les milieux respectifs des segments **[AB]**, **[BC]**, **[CD]** et **[DA]**. La droite **(DE)** coupe les droites **(HC)** et **(AF)** respectivement en **N** et **P**. La droite **(BG)** coupe les droites **(AF)** et **(HC)** respectivement en **Q** et **M**.*

*Démontrer que le quadrilatère **MNPQ** est un parallélogramme.*

Analyse a priori

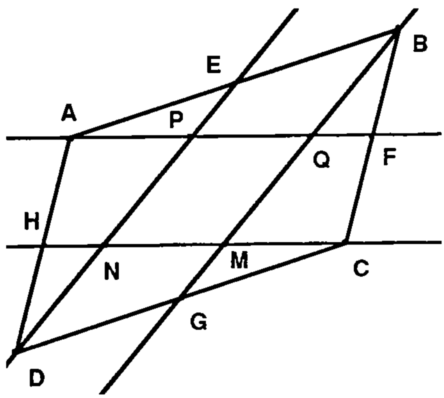
Les concepts mobilisés dans ce problème sont supposés connus par les élèves. Il s'agit des concepts de parallélogramme, de milieu d'un segment et d'intersection de droites. Pour la résolution du problème posé, l'usage adéquat des propriétés du parallélogramme et de celles du milieu d'un segment est indispensable.

Dans leurs stratégies de conjecture et de preuve nous espérons que le logiciel amènera les élèves :

• à extraire les sous-figures EBGD et AFCH,

• à identifier leurs propriétés et avoir une idée de leur démonstration.

La découverte de ces deux sous-figures doit être le déclic indispensable à la découverte des sous-problèmes à résoudre.



Les questions suivantes doivent favoriser cette découverte :

"Existe-t-il un parallélogramme dont les sommets sont sur les droites (NP) et (MQ) ?"

"Existe-t-il un parallélogramme dont les sommets sont sur les droites (PQ) et (MN) ?"

Analyse a posteriori

L'exploration de la figure révèle la difficulté liée à la résolution du problème posé. La solution du problème repose sur la découverte des sous-figures EBGD et AFCH. La majorité des élèves voit comme sous-problème à résoudre le parallélismme de deux côtés du quadrilatère MNPQ soit, suivant le cas, en passant par les propriétés du quadrilatère EBGD ou celles de AFCH. Mais la découverte de l'une des sous-figures n'a pas forcément une influence sur celle de l'autre. La question suivante : *"Existe-t-il un parallélogramme dont les sommets sont sur (MN) et (PQ) (resp (PN) et (QM))* ?" est déterminante dans la découverte de la solution.

Notons que parmi ceux qui font l'exploration de la figure en situation papier-crayon, certains désignent le centre du parallélogramme ABCD par I. Mais cette stratégie est abondonnée car ils ne savent pas exploiter les propriétés du point I dans la production de la démonstration. Leur phase heuristique commencée en situation papier-crayon se continue dans l'environnement du logiciel.

L'analyse des copies des élèves montre pour la majorité une construction et une rédaction rigoureuses de la preuve. Nous remarquons également la diminution de la charge des implicites.

Remarque :

Après la séquence d'enseignement nous faisons un test d'évaluation destiné à évaluer le degré d'acquisition des compétences heuristiques et déductives des élèves ayant suivi un enseignement de la démonstration à l'aide de DEFI. L'analyse de leurs copies montre pour la majorité un net progrès par rapport au prétest que nous avons réalisé avant le début de la séquence d'enseignement.

III — Rôle du maître

Le rôle du maître sera celui joué par les observateurs (I. Giorgiutti et moi-même) tout au long de la séquence d'enseignement de la démonstration à l'aide du logiciel. En voici les points principaux.

Pendant toute la durée de la séance d'initiation, *mettre l'accent* sur l'objectif visé et le fonctionnement du logiciel en essayant de focaliser l'attention des élèves sur l'enjeu du contrat didactique qui leur est assigné. *Insister notamment*, au cours de l'exploration de la figure, sur l'utilité d'observer attentivement la figure et de tenir compte des hypothèses du problème avant de donner une réponse à la question posée par le logiciel. Cette nécessité s'appuie sur le fait, d'une part, que les stratégies initiales des élèves ne sont pas toujours applicables face à l'ordinateur, d'autre part, qu'il faut un processus d'adaptation ou d'évolution des stratégies des élèves dans le contexte de leur confrontation avec le logiciel utilisé, basé sur des systèmes de connaissance et de traitement de l'information qui ne suivent pas nécessairement la même logique de fonctionnement que la leur.

Demander aux élèves de consulter les bilans en cas de blocage ou de contestation. Ainsi la variable *"consultation des bilans"* qui n'était pas didactique en début d'évaluation, le devient peu à peu.

Montrer aux élèves comment le bilan général peut être utilisé pour démarrer et continuer leurs démonstrations. De plus, *répèter* oralement ce qui est écrit dans l'aide consultable et qu'en fait aucun élève ne consulte.

L'obstacle lié à la variable "bilan" montre la différence entre le "bilan à l'écran" et le "bilan en situation papier-crayon". Il semble plus coûteux de quitter l'écran sur lequel on travaille pour aller consulter un bilan à partir des menus déroulants.

Mais au fur et à mesure que les élèves acceptent puis maîtrisent l'exploration de la figure, cette aide devient inutile, et les observateurs (ou le maître) se concentrent uniquement sur les bilans des pas de démonstration où la grosse difficulté reste pour les élèves l'analyse des textes des théorèmes.

Une partie du contrat didactique assigné aux observateurs (ou à l'enseignant) est justement d'aider les élèves à comprendre le jeu de la déduction. Dans le cadre de l'enseignement de la démonstration, le rôle de l'observateur est une variable didactique d'une importance capitale, surtout lors d'émission de messages d'erreur par le logiciel. En effet, nous avons fait remarquer, dans les analyses des procédures des élèves de quatrième, que les élèves ne comprenaient pas toujours les messages émis par le logiciel. La compréhension de ces messages peut faciliter l'analyse des textes des théorèmes ou définitions qui entre dans la structuration de la solution.

Notons qu'en général ces messages portent sur la validité des éléments en jeu dans l'articulation *hypothèses-théorème-conclusion* (exemple de message "telle propriété n'est pas une hypothèse ou n'a pas été démontrée").

Nous devons donc amener les élèves, d'une part, à une lecture plus attentive des dialogues, et d'autre part, en cas d'erreur, à analyser leur pas de démonstration afin d'identifier l'élément ou les éléments non valides de l'ensemble *hypothèses-théorème-conclusion*. En cas d'échecs répétés, leur *rappeler* la nécessité d'une exploration plus approfondie de la figure liée aux données de la situation-problème proposée.

IV — Comment les élèves utilisent le logiciel

Au cours des différentes séances d'enseignement de la démonstration, nous (I. Giorgiutti et moi-même) avons été fortement impressionnés par la grande diversité des procédures des élèves. Aussi convient-il, au cours de l'utilisation du logiciel pour l'enseignement de la démonstration, de voir comment les élèves en disposent.

Certaines procédures sont de caractère général :

• refus sytsématique de travailler. Nous laissons le binôme évoluer vers la seule acceptation de travailler à quelques pas de démonstration qu'il croit avoir compris,

• refus d'utiliser le logiciel ou certaines options du logiciel soit parce que cela n'a aucun intérêt, soit parce que le binôme veut savoir ce qu'il est capable de faire seul.

Un élève nous a avoué qu'il n'aimait pas faire l'exploration de la figure à l'aide du logiciel parce que *"ça n'allait pas dans le même sens que la démonstration"* et qu'il voulait voir ce qu'il était capable de faire sans l'aide du logiciel,

Nous nous contentons alors de vérifier sa démonstration pour déceler d'éventuelles fautes d'argumentation.

• utilisation systématique des "essais" sans phase heuristique sérieuse dont le binôme s'aperçoit qu'ils sont peu rentables,

• certains jouent le jeu : il y a ceux qui s'arrêtent dès qu'ils ont compris, et ceux qui par contre vérifient tout.

D'autres stratégies sont liées à la situation: plusieurs figures, déplacement de règles parallèlement à elles-mêmes, report de longueurs au double-décimètre et au compas (un véritable travail sur la figure), début d'analyse des pas de démonstration et des textes de théorèmes à la suite de messages d'erreur. Chaque message d'erreur est analysé par les élèves avec minutie afin de découvrir l'élément non valide au niveau de la règle d'inférence. Le bilan général est consulté pour faire le point des propriétés déjà démontrées, donc qui ont changé de statut. Nous constatons la mise en place de la reconnaissance du statut des faits donnés ou démontrés et des règles d'inférence.

Le travail sur DEFI semble plus passionnant que celui en situation de classe. L'élève semble être devant un ... défi à relever avant la fin de la séance. En effet, l'ordinateur qui s'obstine à ne pas céder tant qu'une faute dans la structuration d'un pas de démonstration subsiste place les élèves devant un obstacle qu'ils doivent surmonter. Il les met ainsi devant le véritable enjeu qui est la résolution d'un problème et la structuration de sa solution. Aussi doivent-ils réfléchir aux voies et moyens qui permettent de défier leur adversaire: l'ordinateur. D'où la nécessité de se consacrer entièrement à la tâche qu'ils se sont assignée.

Nous pensons également que l'élève travaillant sur DEFI jouit d'une certaine économie mnémonique. En effet, disposant d'une liste de théorèmes et définitions, la gestion mentale de l'élève se fait à moindre coût par rapport à la situation de classse où il est obligé de se rappeler les théorèmes ou définitions candidats à un usage éventuel dans la production de la démonstration.

Signalons la difficulté liée à l'usage d'un théorème qui permet de conclure sur plusieurs résultats. En effet, dans l'environnement du logiciel, il n'est permis (nous l'avons déjà dit) de démontrer qu'une seule propriété à la fois. Cette contrainte peut présenter des avantages et peut-être aussi des inconvénients.

Elle présente des avantages dans la mesure où elle permet aux élèves faibles et moyens d'apprendre à décomposer un théorème en ses différents éléments: hypothèses (ce que je sais) et conclusion(s) (ce que je cherche à démontrer) et à éviter les courts-circuits et les implicites.

Elle présente des inconvénients pour les élèves qui, comprenant le fonctionnement de la démonstration et se trouvant ralentis dans leur progression déductive, risquent de perdre le fil de leur preuve mathématique. Mais elle peut aussi favoriser chez certains élèves une lecture partielle des textes de théorèmes et définitions concernés et donc les conduire à l'erreur.

De plus la question de savoir s'il faut découper les théorèmes à conclusions multiples reste posée. Nous pensons que la réponse dépendra du niveau (faible, moyen ou bon) des élèves concernés par l'enseignement.

Des divergences peuvent naître entre les membres d'un binôme au niveau de la stratégie à choisir pour la structuration de la solution. Ces divergences peuvent s'expliquer par la différence qui existe entre bon et moins bon élèves, ou encore par un conflit de compétence pouvant surgir du fait que chacun veut imposer sa stratégie. Autrement dit, ici, nous retrouvons plutôt la composante sociale de la démonstration qui doit conduire à un accord intersubjectif.

Nous notons au début de la séquence d'enseignement de la démonstration à l'aide de DEFI un certain blocage au niveau de l'exécution des pas de démonstration lié au traitement des erreurs. En effet, certains élèves souhaitent avoir des indications plus explicites au niveau des messages d'erreur. D'autres jugent l'exploration de la figure incertaine et souhaitent des précisions sur la justesse de leur stratégie. Voici une réaction d'un élève au sujet des messages d'erreur :

• *"quand on est bloqué l'ordinateur n'est pas d'un grand secours car il donne les erreurs mais c'est tout"*

La réaction de cet élève nous conforte dans nos convictions (la suite de l'expérience le confirme) selon lesquelles il est important d'amener l'élève à réfléchir sur ses erreurs et à doser l'importance du "coup de pouce" dans l'aide apportée par les messages.

Il arrive très rarement que les élèves que nous avons suivis aient l'idée de démonstrations utilisant des théorèmes non explicitement prévus dans le logiciel. Ils n'osent pas aller jusqu'au bout de leur emploi. L'une des raisons de ce comportement semble être l'impossibilité de mettre en œuvre des stratégies autres que celles prévues dans l'environnement du logiciel. C'est le cas des stratégies s'appuyant sur certaines propriétés de la symétrie centrale (par exemple: conservation du parallélisme et celle des longueurs) et celles du centre de gravité d'un triangle.

Cette remarque nous amène à penser qu'il serait intéressant d'ouvrir un fichier de théorèmes plus large acceptable informatiquement.(cf par exemple le logiciel MENTONIEZH que P.NICOLAS et D. PY ont développé)

V — Points de vue des élèves sur le logiciel

Après la séquence d'enseignement de la démonstration à l'aide de **DEFI**, nous faisons passer un questionnaire dont le but est de recueillir les impressions des élèves sur le logiciel. La passation du questionnaire a lieu le 25 mars 1991, une semaine après les séances d'enseignement de la démonstration.

L'interview est anonyme en ce sens que les seuls renseignements personnels demandés sont ceux relatifs à l'établissement fréquenté, le niveau d'étude et la date de passation du questionnaire, le but visé étant de minimiser l'influence du questionnaire et des observateurs (ici le professeur titulaire de la classe C. Boulard et moi-même) sur les réactions des élèves. La seule consigne donnée aux élèves est d'exprimer ce qu'ils ressentent après avoir travaillé sur le logiciel.

L'analyse des copies des élèves fait ressortir des indications intéressantes sur leur comportement vis-à-vis de la démonstration ainsi que sur le rôle de la figure dans la résolution de problèmes de géométrie. Indications d'autant plus intéressantes si l'on se souvient qu'au début de l'enseignement de la démonstration à l'aide du logiciel, la majorité des élèves était allergique à tout ce qui était mathématique.

Nous notons à travers leurs commentaires un changement important de leurs comportements vis-à-vis de la démonstration. Ils mettent l'accent sur le progrès apporté par le logiciel dans le domaine heuristique et dans celui de la preuve. Ils mettent, notamment, l'accent sur l'importance de l'exploration de la figure, exploration qui leur a permis, disent-ils, de mieux comprendre le rôle de la figure.

Ils notent également, l'apport important du module démonstration, importance mise en évidence par l'intérêt que les élèves accordent aux messages émis en cas d'erreurs.

Quelques élèves notent, tout de même, l'insuffisance des capacités pédagogiques de DEFI, notamment au niveau de son aptitude à conseiller et de son aptitude à expliquer. En effet, au cours de la démonstration les élèves ne comprennent pas toujours le message émis en cas d'interaction hypothèse-théorème-conclusion fausse. Au niveau de l'exploration de la figure, le logiciel ne donne aucun moyen apparent à l'élève d'avoir une certitude sur la réponse qu'il a donnée.

Vingt-trois élèves souhaitent changer leur façon de résoudre un problème de géométrie et de rédiger la démonstration. L'un des deux élèves qui répondent négativement, est un bon élève qui ne s'est pratiquement pas servi du logiciel, l'autre semble rester allergique à tout ce qui est mathématique.

Tous ceux qui répondent positivement pensent que dans l'avenir ils accorderont une grande importance aux points suivants :

- observer la figure pour produire des conjectures,
- faire un plan pour la démonstration,
- utiliser les hypothèses du problème et les théorèmes de façon adéquate,
- faire ensuite une bonne rédaction de la démonstration.

Voici des commentaires de quelques élèves:

- *"mieux rédiger la démonstration et mettre les bons théorèmes"*
- *"faire l'exploration de la figure en se posant des questions"*
- *"faire un plan pour la démonstration, puis employer les hypothèses"*
- *"mieux utiliser les théorèmes"*

• *"Oui, j'essayerais de me poser des questions, de faire un bilan de ce que je sais démontrer puis je passerais à la démonstration tout en respectant mon bilan et mes théorèmes."*

• *"Trouver d'abord ce que l'on veut démontrer puis le théorème grâce à quoi on va le démontrer puis les hypothèses."* (Nous voyons à travers ce commentaire la démarche apprise à l'aide du logiciel.)

VI — Conclusion

L'exploration de la figure se fait, de prime abord, sans une exploitation profonde de la figure liée aux données du problème. Certains élèves répondent aux questions posées par le logiciel sans mesurer véritablement la portée contractuelle de leur réponse. Au début de l'expérimentation, la contrainte de la démonstration à un pas n'est pas toujours comprise et admise par tous les élèves.

Nous notons , cependant, un changement progressif de leurs comportements vis-à-vis de la démonstration. L'"exploration de la figure" permet pour la majorité des élèves de mieux comprendre le rôle de la figure dans la résolution d'un problème de géométrie. Le module "Démonstration" est d'un apport très important dans l'organisation déductive de la preuve, importance mise en évidence par *la sanction immédiate de l'erreur* dans l'articulation hypothèses-théorème-conclusion, bien supérieure à la sanction décalée qui se pratique en général dans l'enseignement (correction de devoir sur la copie ou au tableau). Les bilans sont consultés en cas de besoin et les erreurs d'articulation des inférences sont analysées et corrigées.

Cependant, pendant la rédaction de la démonstration à l'aide du logiciel, l'élève peut commettre des erreurs telles que: erreurs de frappe, d'inattention, de planification, confusion sémantique. Le logiciel ne donne pas, dans tous les cas, une explication satisfaisante de leur cause.

La gestion d'une séance d'exercices à l'aide de logiciel présente des différences notables avec celle de la classe ordinaire. Les élèves s'engagent dans une activité individuelle ou en groupe dès qu'ils sont en présence de la situation-problème. L'ordinateur devient le seul interlocuteur priviligié[2] ; on ne fait appel à l'enseignant, en général, qu'en cas de fausse manœuvre ou de blocage. Chaque élève ou groupe d'élèves travaille à son rythme et vit dans son micro-monde. Aussi, l'enseignant se trouve-t-il presque privé des modes d'action habituellement utilisés, consciemment ou non, en temps réel pour la dévolution progressive de la situation-problème prévue pendant la séance.

Dans cet environnement informatique, la classe tend à paraître comme une classe active mais éclatée, non homogène, rencontrant plus de difficultés qu'une classe ordinaire, avançant à un rythme plus lent. L'enseignant peut être insatisfait de cette situation par rapport à celle de classe ordinaire où il peut, après avoir éventuellement laissé chercher un moment les élèves, accélerer fortement la progression du temps didactique, en s'appuyant sur les réponses de quelques bons élèves. Cette impression d'inefficacité de l'outil informatique dans les situations d'enseignement éprouvée par certains enseignants contribue sans doute à l'indifférence voire à l'hostilité qu'ils manifestent à son égard [2].

Nous notons que la communication avec le logiciel, dans des conditions normales de fonctionnement, permet à l'élève de travailler à son rythme et de recevoir une aide rapide et individualisée. Dans une situation de classe ordinaire, cela est quasi-irréalisable.

De plus, les conditions de travail en binôme favorisent semble-t-il :

• une compréhension plus facile du contrat de communication avec le logiciel,

• une croissance de l'esprit critique du partenaire qui anticipe quelquefois la censure du logiciel.

A travers les commentaires des élèves, nous notons la présence permanente des mots "hypothèse" et "théorème". Ces commentaires expriment, semble-t-il, le souci qui est le leur,d'une part, de bien distinguer désormais les faits donnés ou démontrés de ceux qui doivent d'abord être démontrés pour acquérir le statut des premiers, et d'autre part, de faire un travail heuristique s'appuyant sur la figure. Nous prenons le risque (mesuré puisqu'il s'appuie sur les réactions des élèves ainsi que sur leurs différentes productions) d'affirmer que l'ensemble de la classe (tout au moins les 95%) savent maintenant ce qu'est une démonstration. Ceci ne signifie pas, certes, qu'ils soient capables de résoudre n'importe quel problème de niveau 4ème ou de 3ème.

Il semble que dans l'état actuel des choses, avec une intervention du maître parfaitement codifiée, il soit possible en quelques séances de faire mieux comprendre aux élèves le rôle de la figure dans la résolution d'un problème de géométrie et le fonctionnement de la démonstration, mais également de leur faire rendre des rédactions satisfaisantes et à moyen terme, les faire se passer du logiciel. Nous pensons que DEFI est surtout un logiciel d'aide à l'apprentissage de la démonstration pour des élèves en difficulté.

Bibliographie

[1] S. AG ALMOULOUD, *Aide logicielle à la résolution de problèmes avec preuve: des séquences didactiques pour l'enseignement de la démonstration,* Actes du séminaire de Didactique de l'institut Mathématique de Rennes 1991 (à paraître).

[2] M. ARTIGUE, J. BELLOC, S. TOUATY, *Une recherche menée dans le cadre du projet Euclide,* IREM Paris VII, novembre 1989.

[3] G. ARSAC, *Thèses contemporaines sur l'apparition de la démonstration dans les mathématiques,* Séminaire de Didactique des mathématiques et de l'informatique Grenoble, n° 61, 1984-1985.

[4] G. ARSAC, *L'origine de la démonstration: essai d'épistémologie didactique,* Recherche en didactique des mathématiques. Vol. 8 - 1987.

[5] N. BALACHEFF, *Preuve et démonstration en mathématiques au collège,* Recherche en didactique des mathématiques. Vol. 33 - 1982.

[6] N. BALACHEFF, *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves de collège,* Thèse de Doctorat publié à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1988.

[7] E. BARBIN, *La démonstration mathématique, significations épistémologiques et questions didactiques,* Bulletin de l'APMEP. N° 366. Dec. 88

[8] E. BARBIN, *Heuristique et démonstration en mathématiques : la méthode des indivisibles au XVIIème siècle,* Fragments d'histoire des mathématiques II- L'A.P.M.E.P. 1987.

[9] F. BELLEMAIN, M. GERENTE, G. LETHY, B. RIOU, *Géométrie et informatique: vers la médiatrice. L'expérimentation: lieu d'interaction entre problématique du chercheur et celle de l'enseignant*, 24, Petit x , IREM de Grenoble, 1990.

[10] R. DUVAL & M.-A. EGRET, *L'organisation déductive du discours,* Annales de didactique et de sciences cognitives, 2, IREM de Strasbourg, 1989.

[11] R. DUVAL, *Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence,* Annales de didactique et de science cognitives, 1, IREM de Strasbourg, 1988.

[12] I. GIORGIUTTI & R. GRAS, *The modeling student knowledge, the case of geometry. Computer aided proofs in school geometry,* Actes du colloque NATO, Grenoble 1989 (à paraître dans Springer Verlag)

[13] I. GIORGIUTTI & Y. BAULAC, *Interaction micromonde/tuteur en géométrie: mise en commun des possibilités de Cabri-géométrie et de DEFI,* Actes des 2emes Journées EIAO de CACHAN des 24 et 25 janvier 1991

[14] R. GRAS, *Aide logicielle aux problèmes de démonstration géométrique dans l'enseignement secondaire,* 17, Petit x, IREM de Grenoble, 1988

[15] J. HOUDEBINE, *Démontrer ou ne pas démontrer, voilà la question,* REPERES-IREM, n°1, octobre 1990.

[16] I. OSTA, *L'ordinateur comme outil d'aide à l'enseignement. Une séquence didactique pour l'enseignement du répérage dans l'espace à l'aide de logiciels graphiques* , Thèse de l'Université Joseph FOURIER Grenoble 1, 1988.

[17] P. NICOLAS, *Construction et vérification de figures géométriques dans le système MENTONIEZH,* Thèse d'Université Rennes I, 1989.

[18] D. PY, *Reconnaissance de plan pour l'aide à la démonstration dans un tuteur intelligent de la géométrie,* Thèse de l'Université de Rennes I, IFSIC. 1990.