REPERES - IREM . n°9 - octobre 1992

HISTOIRE DES MATHEMATIQUES EN CLASSE DE TERMINALE

Monique NOUET
Irem des Pays de Loire
Centre du Mans

Il faut accoutumer les Hommes à voir eux-mêmes la vérité. Lorsque pour leur rendre les Sciences faciles, on ne les oblige point de la chercher eux-mêmes, de la découvrir, de la consulter, il se peut bien faire qu'à force de leur rebattre les choses, on les fasse entrer dans leur mémoire. On dirait même, à les entendre parler, qu'ils les savent ; mais la suite fait voir le contraire, outre que ce qui n'est que dans les mémoires se perd aisément .

Lamy. *Entretiens sur les Sciences*

I — Introduction

Pourquoi décide-t-on de faire, de l'histoire des mathématiques, un élément d'apprentissage ? Les libellés des programmes restent, à ce sujet, encore bien timides et ne semblent y voir qu'un élément culturel. Est-ce un luxe que l'on s'offre lorsqu'on a le sentiment que le programme est suffisamment avancé pour que l'on puisse détourner quelques heures sans compromettre le déroulement de ce programme ?

Au risque de paraître quelque peu simpliste je dirai que, dans un premier temps, j'ai proposé à mes élèves des activités à caractère historique parce que je voulais leur faire éprouver le plaisir que j'avais éprouvé moi-même à la lecture de textes originaux, activité récente à cette époque puisque, après avoir vécu une semaine d'immersion complète au cours d'une Université d'Eté, je venais de me joindre à un groupe de recherche en histoire des mathématiques. "Je découvre – j'aime – j'ai envie de faire partager". Voilà, brièvement exprimée, ma motivation première.

La première année de pratique (1986-1987) sur un nombre restreint de thèmes, m'a conduite à analyser les objectifs que l'on pouvait alors assigner à l'utilisation de l'histoire des mathématiques, à diversifier les formes de travail avec la classe suivant la difficulté des textes, à dégager des critères de sélection des textes proposés et à cerner les apports de cet élément d'apprentissage.

1 – Les objectifs

Après quelques années de recul, l'objectif premier que j'assigne à l'histoire des mathématiques concerne le regard que l'on porte sur cette discipline : il est possible de montrer que les mathématiques constituent une science en mouvement et que les concepts que l'on utilise ne se sont pas toujours constitués simplement. Leur élaboration est souvent le fruit d'un long parcours. Après une période de flou, le concept s'affine, se structure pour recevoir finalement une définition qui permettra alors une utilisation satisfaisant aux exigences de la rigueur mettant fin à toute polémique éventuelle. Citons en exemple le cas des nombres complexes, du calcul infinitésimal.

Sans dire que les élèves connaissent, dans l'assimilation des concepts, une démarche analogue et qu'il suffit de leur faire reconstruire les méandres de l'histoire pour qu'ils comprennent, faisons, de la prise de conscience de ces difficultés, un objectif ; l'apport de cette prise de conscience sera développé dans la dernière partie de cette introduction.

Science en mouvement ; il serait dommage que nos élèves quittent le lycée comme cette élève de Première, à une époque où l'histoire des mathématiques n'était pas envisagée comme composante de l'apprentissage, qui, venant d'étudier les équations du Second degré se demandait "ce que l'on peut encore chercher en mathématiques". Science achevée avec le second degré ! Souhaitons plutôt, sans tomber dans un manichéisme primaire, lire ce qu'écrivait plus récemment un élève de Terminale : "Les mathématiques sont pour moi... passées du statut de science morte à celui de science vivante, avec ses évolutions historiques, ses applications pratiques".

L'histoire permet aussi de montrer les divers aspects que peut prendre un même concept (exemples : la tangente à une courbe en un de ses points, la notion de courbe...) et leur champ de performance. Savoir choisir l'aspect (algébrique, géométrique, mécanique...) le mieux adapté au problème tel qu'il est posé peut être considéré comme un objectif d'enseignement. Il ne me paraît pas souhaitable de décréter qu'un aspect (le dernier mis en place ou encore celui que l'on maîtrise le mieux) est "omniperformant". Rapportons cette question, lue dans un mémoire présenté en fin de Seconde année d'IUFM à propos des équations de droites en Seconde (équation $ax + by + c = 0$ qui **doit** se substituer à l'équation $y = ax + b$) :

"Comment **imposer** aux élèves l'utilisation de l'équation $ax + by + c = 0$?"

Si les situations proposées aux élèves ne sont pas convaincantes et ne distinguent pas l'aspect fonctionnel de la notion d'équation de courbe, les élèves reviennent à la première forme rencontrée.

Elément culturel incontestable, l'histoire des mathématiques permet de sensibiliser à l'histoire des sciences d'une façon plus générale ; elle conduit à mieux connaître la culture d'une époque, l'évolution du langage scientifique, à dégager la notion de méthode de résolution. Sans prétendre, à l'aide de quelques textes, connaître la culture d'une époque, il est possible de sensibiliser les élèves à la lecture d'un texte en pensant l'époque et donc de souligner encore la notion de savoir qui évolue.

2 – Les procédures

Les procédures utilisées varient en fonction de la difficulté des textes proposés.

Ces textes sont sélectionnés suivant deux critères dont l'un est très subjectif : je choisis parmi les textes que je connais ceux que je pense pouvoir bien exploiter. Ensuite je retiens les textes qui sont en liaison avec les contenus de programmes que je dois traiter. Il n'y a donc pas d'étude systématique de textes. Leur intégration à l'étude d'un chapitre, comme un moment de cette étude, évacue pour moi le problème du temps consacré à l'histoire des mathématiques. Le problème est plus celui de la connaissance d'un texte et de la pertinence de son étude. Il sera aussi bien une source de problème, l'illustration d'une méthode de résolution, une situation apportant à l'élève un élément de construction d'une représentation d'un concept, une occasion d'utiliser un savoir, de réinvestir... L'exploitation d'un texte présente ainsi de nombreuses facettes.

Les exemples présentés ici montrent diverses procédures d'utilisation. Dans le cas des équations du Second degré, non rapporté ici, le travail sur un texte de Diophante n'a proposé que quelques exercices parallèles permettant la compréhension du texte et dégageant la méthode de résolution utilisée par Diophante. En revanche, un texte d'Euclide, (voir les Actes de l'Université d'Eté - Lille - 1990 - à paraître) a nécessité un travail de préparation de plus grande ampleur : lecture du texte, découpage des phrases, transcription en termes modernes... Ce travail a permis aux élèves (1ère S) de travailler seuls, sans aide supplémentaire.

3 – Les réactions des élèves

Les élèves, d'abord surpris par ce travail, sont en général plutôt réceptifs et manifestent une certaine curiosité. "Ca change". Dans un premier temps ils ont le sentiment de ne pas faire de mathématiques, de vivre en marge du programme, une sorte de récréation. L'intégration de ces textes au déroulement du programme fait perdre ce sentiment. Restent alors les réactions devant les textes eux-mêmes. De la capitulation après la lecture de quelques lignes (avec certains textes d'Euclide) au sourire, voire au rire, avec des textes plus récents (Roberval) en passant par l'indifférence, toutes les réactions sont exprimées. Les élèves se demandent pourquoi l'expression est si lourde, pourquoi le symbolisme, les vecteurs, ne viennent pas faciliter la communication. On se reportera au commentaire accompagnant la construction de la tangente à une parabole par la méthode de Roberval.

Je précise qu'il n'est procédé à aucune évaluation spécifique à l'histoire des mathématiques. Elément d'apprentissage, c'est sur les apprentissages que portera l'évaluation.

4 – Les apports

Les apports de l'utilisation de l'histoire des mathématiques sont variés.

Personnellement, je pense que le plus important, dans ma relation avec les élèves, concerne la remise en cause de mon rapport au temps : laisser aux élèves le temps de construire progressivement, de connaître des moments d'errance, de reconstruire. Des réajustements peuvent intervenir continuellement au cours de l'année scolaire. De même, l'expression s'améliore au fur et à mesure que s'élabore la maîtrise d'un concept.

Les élèves peuvent comprendre que l'on accepte leurs balbutiements puisque ceux-ci, l'histoire le prouve, peuvent être porteurs de savoirs bien compris. Les élèves sont rassurés ; les moins performants peuvent reprendre confiance, agir à nouveau, sachant que la recherche peut ne pas être fructueuse nécessairement dès le premier essai.

La présentation d'un même concept sous divers aspects conduit l'élève à s'interroger sur l'adéquation de la forme utilisée au problème posé, élargissant ainsi son champ de performance.

Source de problèmes, l'histoire des mathématiques enrichit notre domaine d'investigation au moment de l'élaboration d'énoncés tout en donnant l'occasion de porter un regard sur la construction de l'édifice mathématique.

Il semble intéressant aussi d'entendre les élèves justifier par la non existence de l'objet vecteur la formulation du texte de Roberval sur la tangente à la parabole. Toute référence à la chronologie, même grossière, les laissera sensibles au problème de la construction progressive des mathématiques, aux apports des nouveaux concepts, tant dans l'expression que dans les méthodes de résolution.

Les deux paragraphes suivants développeront deux exemples : construction de la tangente à une courbe en un de ses points et calcul de l'aire d'une surface.

II — TANGENTES AUX COURBES : LA METHODE DE ROBERVAL

La représentation de courbes à l'aide d'un paramétrage :

$$x = f(t)\,,$$
$$y = g(t)\,.$$

figure au programme de Terminale C avec notamment la construction de la tangente à la courbe en un de ses points.

Si l'on regarde ces courbes comme des trajectoires de points mobiles, passage d'un point de vue statique à un point de vue cinématique, en introduisant la notion de mouvement, alors il est possible de déterminer, à l'aide de la méthode de Roberval, les tangentes à des courbes en composant des mouvements. Le travail sur la *parabole* et la *cycloïde* présenté ici a été réalisé avec une classe de Terminale C en application du cours sur les courbes paramétrées.

1 – Tangente à la parabole

Voici la fiche présentée aux élèves, fiche qui avait pour objectif, outre la présentation de la méthode de Roberval, de prouver l'existence d'une tangente en chaque point de la parabole et de dégager une propriété de cette tangente (cf. encadrés ci-contre).

Cette fiche telle qu'elle est présentée ici a été travaillée en 1990-91 après l'étude des courbes paramétrées et de la parabole. La séance a duré une heure. Les élèves ont d'abord travaillé individuellement sur la première partie de la fiche : exercice, puis nous avons lu ensemble le texte de Rober-

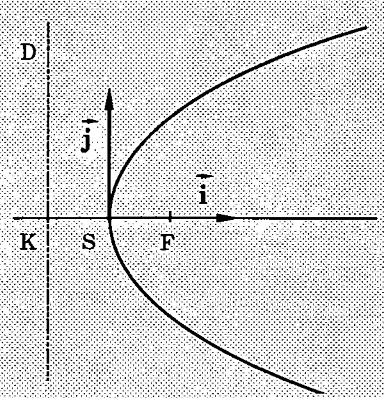
Encadré 1. *Etude des tangentes à la parabole.*

Exercice

Une équation de la parabole de foyer F et de directrice D dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ est :

$$y^2 = 2px,$$

(p paramètre de la parabole, égal à FK).



Pour paramétrer la parabole, posons :

$$x = \frac{1}{2p}t^2, \quad y = t,$$

(t nombre réel).

1 a) Calculez $x'(t)$ et $y'(t)$.

b) Le vecteur $\vec{v}(t)$, de coordonnées $x'(t)$ et $y'(t)$ peut-il s'annuler ?

c) Qu'en déduit-on pour la parabole ?

2 Notons $M(t)$ un point de la parabole, $H(t)$ son projeté orthogonal sur D , et soit $\vec{v}(t) = x'(t).\vec{i} + y'(t).\vec{j}$, le vecteur directeur de la tangente en M à la parabole. Calculez le produit scalaire $\overrightarrow{FH} . \vec{v}(t)$. Quelle propriété en déduisez-vous pour la tangente à la parabole ?

3 Soit $M(x_0, y_0)$ un point de la parabole. Démontrez que la tangente en M à la parabole a pour équation cartésienne $yy_0 = p(x + x_0)$.

La méthode de Roberval

— **Histoire et principe :** *"Il semble que Roberval ait inventé sa méthode pour rechercher les tangentes, vers 1635, à l'époque où il travaille sur la cycloïde. Elle est publiée en 1693 dans un traité intitulé Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes.*

La paternité de l'invention fut l'objet de disputes entre Roberval et Torricelli. Dans son traité, Roberval considère une courbe comme la trajectoire d'un point en mouvement. Son "principe d'invention" est le suivant : "la direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point là". D'où il déduit la règle générale pour trouver de manière directe la tangente en un point d'une courbe "par les propriétés spécifiques de la courbe (qui vous seront données) examinez les divers mouvements qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante ; de tous ces mouvements composez en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe". Roberval applique avec succès ce principe à treize courbes, celles connues des anciens et celles introduites par les géomètres du XVIIème siècle ".[1]

[1] Irem du Mans, *Mathématiques, arts et techniques au XVIIème siècle*, p. 134.

— Texte de Roberval : Extrait des *Observations sur la composition des Mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes*. Rec. de l'Acad., t.VI, p. 24/28 & 76/80.

PROBLEME I.

Propoſition cinquiéme.

DONNER les touchantes des lignes courbes par les mouvemens mêmes mêlez.

Mais nous ſuppoſons qu'on nous en donne aſſez de proprietez ſpécifiques, qui nous faſſent connoître les mouvemens qui les décrivent. [1]

Axiome, ou principe d'invention.

LA direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, eſt la touchante de la ligne courbe en chaque poſition de ce point-là.

Le principe eſt aſſez intelligible, & on l'accordera facilement dès qu'on l'aura conſideré avec un peu d'attention.

Regle générale.

PAR les proprietez ſpécifiques de la ligne courbe (qui vous ſeront données) examinez les divers mouvemens qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvemens compoſez en un ſeul, tirez la ligne de direction du mouvement compoſé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.

La démonſtration eſt mot à mot dans notre principe. Et parce qu'elle eſt très-générale, & qu'elle peut ſervir à tous les exemples que nous en donnerons, il ne ſera point à propos de la répeter.

Vous trouverez dans les exemples ſuivans les touchantes des ſections coniques, celles des autres lignes principales qu'ont connu les anciens, & celles de quelques-unes que l'on a décrit depuis peu, comme du Limaçon de Monſieur Paſchal, de la Roulette de Monſieur Rob. de la Parabole du ſecond genre de Monſieur Deſc. &c.

Premier exemple des touchantes de la parabole.

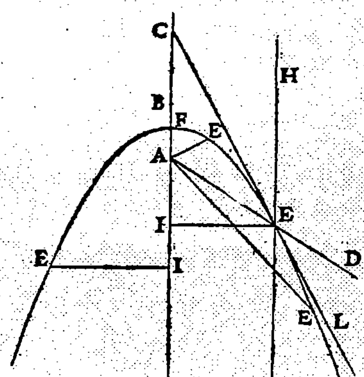
SOIT que l'on nous ait donné la parabole EFE, & le moyen de le décrire par la cinquiéme methode générale de Monſieur Mydorge livre ſecond, propoſition 25. qui eſt telle.

Le ſommet & le foyer de la parabole étant donnez de poſition, trouver dans le même plan tant de points

[1] lire : *Mais nous supposons qu'on nous en donne assez de propriétés spécifiques, qui nous fassent connaître les mouvements qui les décrivent.*

qu'on voudra par lesquels la parabole est décrite.

Soit A le foyer, & F le sommet. soit tirée la ligne AF & prolongée de F vers B, & soit FB égale à AF la même ligne BFA sera l'axe de la parabole. Prenez dans FA autant de points I qu'il vous plaira, tirez par ces points des lignes perpendiculaires à FA; du centre A & de l'intervale d'entre chaque perpendiculaire, & le point B comme BI, décrivez des arcs de cercle dont chacun coupe une de ces perpendiculaires comme en E, la parabole passera par les points E.



Cela posé si l'on demande la touchante de la Parabole au point E, soit tiré la ligne AE prolongée comme en D, & la ligne EI perpendiculaire à AB, & encore la ligne HE parallele à l'axe FAI, alors il est clair par la description ci-dessus, que le mouvement du point E décrivant la Parabole, est composé de deux mouvemens droits égaux, dont l'un est la ligne AE, & l'autre est la ligne HE sur laquelle il se meût de même vitesse que le point I dans la ligne BA, laquelle vitesse est pareille à celle de la ligne AE par la construction, puisque AE est tôujours égale à BI. Partant puisque la direction de ces mouvemens égaux est connuë, sçavoir suivant les lignes droites AED, HE données de position, si vous divisez l'angle AEH en deux également par la ligne LEC qui est le diamètre d'un rhombe autour de l'angle AEH, (& par conséquent la direction du mouvement composé des deux HE AE,) la ligne LEC sera la touchante. [1]

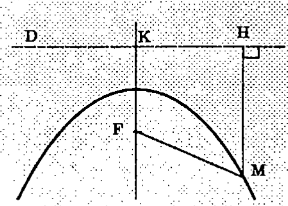
[1] Rhombe = *losange*.

— Lecture du texte

1 Déterminez la directrice de la parabole.

2 Que représente, pour les notations traditionnelles rappelées ici, *"l'intervalle d'entre chaque perpendiculaire et le point B"* ?

3 Justifiez la construction de Roberval.



val afin de retrouver dans la construction la caractérisation de la tangente mise en place dans la première partie. A condition d'établir un parallèle entre la caractérisation de la parabole donnée par Roberval et celle que les élèves ont apprise (foyer et directrice) donc de resituer dans le texte les éléments connus (foyer A et directrice perpendiculaire à (AB) en B) le texte est relativement bien compris par les élèves. Ils sont quelque peu surpris par l'utilisation d'une même lettre pour désigner des points différents dans la figure (la notation ne représentant que la propriété du point : E point quelconque de la parabole). Un élève s'est aussi étonné de voir des droites désignées à l'aide de trois points alors que depuis le collège on impose aux élèves de ne donner que deux points pour désigner une droite.

Signalons que le vieux français étonne toujours et ne facilite pas la lecture du texte, mais cela semble un exercice de transcription intéressant, il souligne notamment la non fixité de l'orthographe.

2 – Tangente à la cycloïde

Cette activité sur les tangentes peut être complétée par les fiches suivantes consacrées à la détermination de la tangente à la cycloïde par Blaise Pascal (cf. encadré 2 ci-dessous).

HISTOIRE DE LA ROULETTE (Appelée autrement *trochoïde* ou *cycloïde* où l'on rapporte par quels degrés on est arrivé à la connaissance de la nature de cette ligne) (2)

"La Roulette est une ligne si commune, qu'après la droite et la circulaire, il n'y en a point de si fréquente ; et elle se décrit si souvent aux yeux de tout le monde qu'il y a lieu de s'étonner qu'elle n'ait point été considérée par les anciens, dans lesquels on n'en trouve rien : car ce n'est autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de son mouvement ordinaire, depuis que ce clou commence à s'élever de terre, jusqu'à ce que le roulement continu de la roue l'ait rapporté à terre, après un tour entier achevé : supposant que la roue soit un cercle parfait, le clou un point dans sa circonférence, et la terre parfaitement plane.

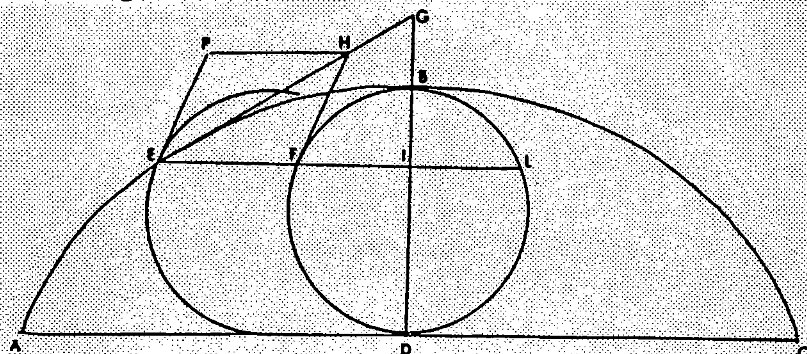
[...] *C'est là que j'ai fini de considérer la nature de cette ligne. Et pour reprendre, en peu de mots, toute cette histoire, il paraît :*
Que le premier qui a remarqué cette ligne en la nature, mais sans en pénétrer les propriétés, a été le P. Mersenne. Que le premier qui en a connu la nature, trouvé les touchantes, mesuré les plans et les solides, et donné le centre de gravité du plan et de ses parties, a été M. de Roberval. Que le premier qui en a mesuré la ligne courbe, a été M. Wren. Et qu'enfin j'ai trouvé le centre de gravité des solides et demi-solides de la ligne et de ses parties, tant autour de la base, qu'autour de l'axe ; le centre de gravité des surfaces, demi-surfaces, quarts de surface, etc., décrites par la ligne et par ses parties, tournées autour de la base et autour de l'axe ; et la dimension de toutes les lignes courbes des Roulettes allongées ou accourcies ".

Ce 10 Octobre 1658.

Encadré 2.

(2) PASCAL, *Œuvres complètes*, Bibliothèque de la Pléïade, p. 194, p. 200.

Construction de la tangente (3)



"Un point de la cycloïde est soumis à un mouvement droit et à un mouvement circulaire ; les directions de ces deux mouvements étant trouvées, la direction du mouvement composé sera la touchante. Considérons un point E *de la cycloïde* ABC *de base* AC *et d'axe* BD. *La direction de la tangente* FH *au cercle de diamètre* BD *est la direction du mouvement circulaire auquel est soumis* E. *La direction de la droite* EF *est celle du mouvement droit. Soit* H *le point de* EG *tel que* EF = FH, *alors* HE *est la tangente de la cycloïde en* E *car sa direction est la direction composée des deux mouvements* ".

Justification de la construction

Le roulement sans glissement du cercle sur la base (AC) conduit à l'égalité $MA = \overset{\frown}{ME}$, M étant le point de contact du cercle passant par E et de la base (AC) et $\overset{\frown}{ME}$ la longueur de l'un des arcs de ce cercle. Dans le mouvement de translation du cercle sur (AC), les points E, M et Ω, centre du cercle ont la même vitesse.

Puisque, à chaque instant, $MA = \overset{\frown}{ME}$, la vitesse de E sur le cercle est égale à la vitesse de M donc à la vitesse de E sur la droite (EF). On porte donc sur (EF) et sur la tangente au cercle en E (directions des deux mouvements) deux longueurs égales EF et EP. La diagonale du losange construit sur [EF] et [EP] donne la direction de la tangente à la cycloïde en E.

Questions

Soit $(A, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal direct du plan ; $\vec{i}$ directeur de (AC).

1 En utilisant une représentation paramétrée de la cycloïde ($\theta = (\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega M})$), déterminez les coordonnées d'un vecteur $\vec{V}(\theta)$ directeur de la tangente en E à la cycloïde.

2 Posant $\vec{u}(\theta) = R\,\vec{i}$; $\vec{v}(\theta) = -R'.\cos\theta\,\vec{i} + R.\sin\theta\,\vec{j}$ retrouvez les éléments de la construction de Roberval.

(3) J.P. CLERO, E. LEREST, *La naissance du calcul infinitésimal au XVIIème siècle*, p. 70.

III — CALCUL D'AIRES

Dans le cadre de l'étude du calcul d'aires, en application ou en introduction du calcul intégral, nous présentons quelques méthodes, utilisées au cours des temps, pour déterminer des aires de figures classiques : le *cercle* (Archimède - Arnauld) et la *cycloïde* (Roberval).

Tout ou partie, suivant les années, a été travaillé en Terminale C. Le texte d'Archimède a été lu collectivement puis les aides ont été fournies lors du travail individuel. Après résolution des exercices proposés en aides, l'analyse du texte a été reprise collectivement.

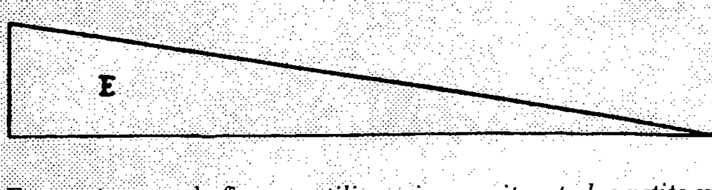
Aire du disque : la méthode d'Archimède. (Extrait du traité *De la mesure du cercle d'Archimède*)[4]

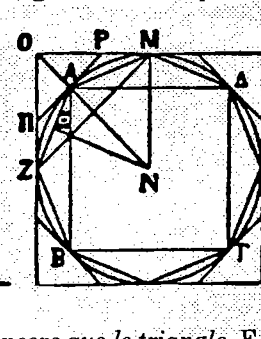
Proposition 1. "*Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.*

Que le cercle ΑΒΓΔ *soit tel qu'on le suppose par rapport au triangle* Ε *; je dis qu'il lui est équivalent.*

En effet, que le cercle soit plus grand, s'il se peut. Inscrivons-lui le carré ΑΓ *, divisons les arcs en deux parties égales, et que les segments soient finalement moindres que l'excédent du cercle sur le triangle. Dès lors, la figure rectiligne est plus grande encore que le triangle. Prenons le centre* Ν *et menons la perpendiculaire* ΝΞ *; dès lors,* ΝΞ *est plus petit que le côté du triangle. Or, le périmètre de la figure rectiligne est aussi plus petit que le côté restant, puisqu'il est plus petit que la circonférence du cercle ; par conséquent, la figure rectiligne est plus petite que le triangle ; ce qui est absurde.*

D'autre part, que le cercle soit, s'il se peut, plus petit que le triangle Ε *; circonscrivons-lui un carré, divisons les arcs en deux parties égales et menons les tangentes aux points. Dès lors, l'angle sous* ΟΑ *,* ΑΡ *est droit ; par conséquent,* ΟΡ *est plus grand que* ΜΡ *; car* ΜΡ *est égal à* ΡΑ *, et le triangle* ΡΟΠ *est donc aussi plus grand que la moitié de la figure* ΟΖΑΜ *. Il reste un ensemble de segments, pareils au segment* ΠΖΑ *, qui est moindre que l'excédent du triangle* Ε *sur le cercle* ΑΒΓΔ *.*





En conséquence, la figure rectiligne circonscrite est plus petite encore que le triangle Ε *; ce qui est absurde, car elle est plus grande, parce que* ΝΑ *est égal à la hauteur du triangle, tandis que le périmètre est plus grand que la base du triangle. Dès lors, le cercle équivaut au triangle* Ε ".

Encadré 3.

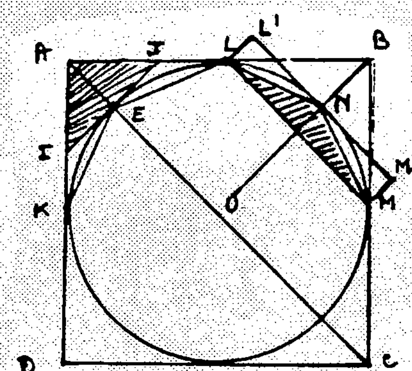
(4) ARCHIMEDE, *La mesure du cercle*, in Collection des Universités d
France, *Archimède* Tome 1, traduction C. Mugler, Edition Les Belle
Lettres, 1970.

Quelques aides

1 L'axiome d'Archimède énoncé au livre X des *Eléments* d'Euclide est le suivant : "En soustrayant de la plus grande de deux grandeurs données plus de sa moitié, du reste plus de sa moitié, etc. on peut arriver à une grandeur moindre que la plus petite grandeur".(5)

En termes modernes, cela signifie que si a et b sont des nombres réels positifs, avec $a > b$, alors il existe toujours un nombre naturel m tel que $m\,b > a$.

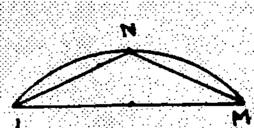
2 Polygones réguliers inscrits et exinscrits à un cercle.



a) Polygone inscrit dans le cercle.

— on note ℓ le périmètre du polygone (KELNM...) inscrit dans le cercle et h son apothème. Exprimez l'aire du polygone à l'aide de ℓ et h.

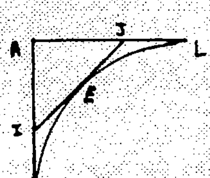
— en utilisant le rectangle LL'M'M démontrez que l'aire du triangle LMN est supérieure à la moitié de l'aire du segment de cercle $\overset{\frown}{LNM}$.



b) Polygone exinscrit au cercle.

— on note ℓ' le périmètre du polygone (carré ou polygone KIJL... ou tout autre polygone régulier exinscrit au cercle). Exprimez l'aire du polygone à l'aide de ℓ' et R.

— Démontrez que l'aire du triangle AIJ est supérieure à la moitié de l'aire du triangle mixtiligne KAL, noté $\overset{\frown}{AKL}$ (les côtés sont [AK], [AL] et l'arc de cercle $\overset{\frown}{KL}$).



— Comparez les distances JE, JA, JL.

— Comparez les aires des triangles AEJ et AEL.

— Démontrez les inégalités :

$$\text{Aire (AEJ)} > \frac{1}{2}\,\text{aire (AEL)},$$

$$\text{Aire (AIJ)} > \frac{1}{2}\,\text{aire }(\overset{\frown}{AKL}).$$

(5) EUCLIDE, *Eléments*, Livre X, Prop. 1.

Lecture et compréhension du texte

Notons :

$\mathcal{A}c$ l'aire du cercle,

$\mathcal{A}t$ l'aire du triangle rectangle dont un côté est égal au rayon et l'autre égal au périmètre du cercle,

$\mathcal{A}p$ l'aire d'un polygone inscrit ou exinscrit au cercle.

1 Supposons $\mathcal{A}c > \mathcal{A}t$.

Posons $e = \mathcal{A}c - \mathcal{A}t$, excédent du cercle sur le triangle.
Inscrivons des polygones dans le cercle ; d'un polygone à l'autre on double le nombre de côtés.
En passant du polygone P au polygone suivant P' on enlève à $\mathcal{A}c - \mathcal{A}p$ plus de la moitié de $\mathcal{A}c - \mathcal{A}p$. En procédant ainsi un certain nombre de fois on peut obtenir un polygone pour lequel $\mathcal{A}c - \mathcal{A}p$ est inférieur à e (Axiome d'Archimède).

Pour un tel polygone P on a :

$$\mathcal{A}c - \mathcal{A}p < e$$

donc $\mathcal{A}c - \mathcal{A}p < \mathcal{A}c - \mathcal{A}t$

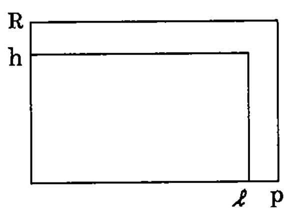
par suite $\mathcal{A}t < \mathcal{A}p$

or $\mathcal{A}p = \frac{1}{2} h \ell$

(h apothème du polygone, ℓ périmètre du polygone)

et $\mathcal{A}t = \frac{1}{2} Rp$.

Puisque $h < R$
et $\ell < p$, on a :
$\ell h < Rp$,
d'où :
$\mathcal{A}p < \mathcal{A}t$.



Il y a donc contradiction avec l'inégalité $\mathcal{A}p > \mathcal{A}t$ précédemment établie, si bien que $\mathcal{A}c > \mathcal{A}t$ est impossible.

2 Supposons $\mathcal{A}c < \mathcal{A}t$.

Posons $e = \mathcal{A}t - \mathcal{A}c$. Circonscrivons des polygones au cercle, d'un polygone à l'autre on double le nombre de côtés.

En passant du polygone P au polygone suivant P' on enlève à $\mathcal{A}p - \mathcal{A}c$ plus de la moitié de $\mathcal{A}p - \mathcal{A}c$. On peut ainsi obtenir un polygone pour lequel $\mathcal{A}p - \mathcal{A}c$ est inférieur à e .

Pour un tel polygone P on a :

$$\mathcal{A}p - \mathcal{A}c < e$$
$$\mathcal{A}p - \mathcal{A}c < \mathcal{A}t - \mathcal{A}c$$
$$\mathcal{A}p < \mathcal{A}t$$

or $\mathcal{A}p = \frac{1}{2} R \ell$

$$\mathcal{A}t = \frac{1}{2} R p$$

Puisque $\ell > p$, on a $\mathcal{A}p > \mathcal{A}t$. Il y a contradiction avec $\mathcal{A}p < \mathcal{A}t$, donc l'inégalité $\mathcal{A}c < \mathcal{A}t$ est impossible .

Par suite $\mathcal{A}c = \mathcal{A}t$,
$\mathcal{A}c = \frac{1}{2} Rp$.

L'aire du cercle selon la méthode des indivisibles (cf. encadré 4).

Exploitation du texte : Nous avons procédé à une lecture collective du texte en apportant, au fur et à mesure des besoins, les éléments nécessaires à la compréhension du texte :

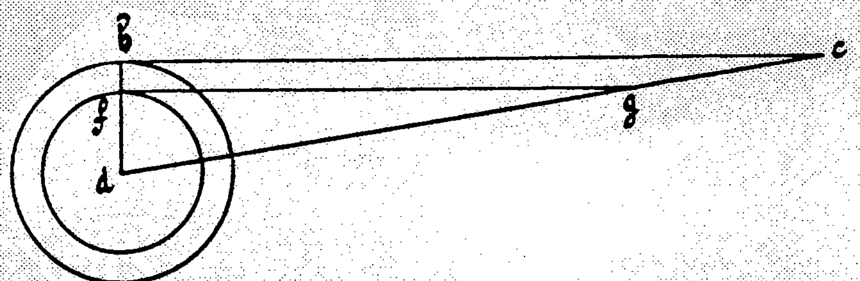
- *"Le cercle est égal au triangle rectangle" :* le cercle et le triangle ont la même aire, Encadré 4.

Aire du cercle : Arnauld et la méthode des indivisibles. Extrait des *Nouveaux éléments de géométrie* d'Arnauld (1667) (6)

Cinquième théorème

"Le cercle est égal au triangle rectangle, qui a pour côtés de son angle droit le rayon du cercle, et une ligne égale à la circonférence du cercle.

Soit le centre d, *le rayon* db, *la tangente* bc, *égale à la circonférence et l'hypoténuse .*



Si on tire de tous les points du rayon des circonférences concentriques au cercle, elles rempliront tout le cercle, et elles seront parallèles entre elles, en la manière que les circonférences le peuvent être, et coupées perpendiculairement par le rayon.

Si on tire aussi de tous ces mêmes points du rayon par lesquels auront passé ces circonférences des parallèles à bc, jusques en dc, ces parallèles rempliront le triangle. Et ainsi la somme de ces circonférences et de ces parallèles sera égale, étant déterminée de part et d'autre par les points du même rayon, étant clair que l'on ne saurait tirer une circonférence par aucun point, qu'on ne tire aussi une parallèle à dc *par ce même point, et au contraire.*

Or, la circonférence et la parallèle tirées du même point sont égales, comme on peut voir en examinant laquelle on voudra : par exemple celle du point b.

Car : bd : df :: circonf b : circonf f
bc : fg

Donc : circonf b : circonf f :: bc : fg .

Donc alternando : circonf b : bc :: circonf f : fg .

Or la circonférence passant par le point f, *est égale à* fg, *parallèle à* bc ".

(6) ARNAULD, *Nouveaux éléments de géométrie*, 1667, réédition Irem de Dijon, 1985.

- *"Si on tire de tous les points du rayon des circonférences concentriques au cercle"* : un point (f) du rayon db étant choisi tracer le cercle de centre d passant par f. Faire varier f dans le segment [db].
- *"Or la circonférence et la parallèle tirées du même point sont égales...*

bd : df :: circonf b : circonf f
bc : fg "

Ces dernières lignes se lisent :

bd est à df comme la circonférence b est à la circonférence f et bd est à df comme bc est à fg.

Elles se notent actuellement :

$$\frac{bd}{df} = \frac{\text{circonf. b}}{\text{circonf. f}} \quad \text{et} \quad \frac{bd}{df} = \frac{bc}{fg}.$$

La première, écrite :

$$\frac{\text{circonf. b}}{bd} = \frac{\text{circonf. f}}{df}$$

traduit l'invariance du rapport de la longueur de la circonférence du cercle à la longueur du rayon. La deuxième traduit la similitude des triangles dbc et dfg, (exprimable aussi à l'aide du théorème de Thalès ou d'une homothétie).

Ainsi : $$\frac{\text{circonf. b}}{\text{circonf. f}} = \frac{bc}{fg}$$

Et comme bc = circonf. b, on a bien :

$$fg = \text{circonf. f}.$$

L'aire d'une arche de cycloïde par la méthode des indivisibles.

Le calcul de l'aire d'une arche de cycloïde est étudié suivant les années dans le cadre d'une leçon sur les courbes paramétrées ou au cours de l'étude des applications du calcul intégral. L'étude de la cycloïde a porté sur :

— une histoire de la cycloïde (lecture de textes de Pascal extrait des *Oeuvres Complètes* de Pascal) permettant de définir la cycloïde et de proposer une recherche du paramétrage (1 h en travaux dirigés, en introduction aux courbes paramétrées).

— une détermination de la tangente en chaque point par la méthode de composition des mouvements de Roberval (séance d'une heure qui suit l'introduction de la cycloïde puis un travail personnel, à la maison, sur la recherche des tangentes à des courbes connues (droites, cercles, C(y =f(x)) et enfin un cours sur les courbes paramétrées).

— une détermination de l'aire d'une arche de cycloïde par la méthode des indivisibles (séance d'environ 1/2 heure présentée soit avec les courbes paramétrées comme dernière étude sur la cycloïde soit dans les applications du calcul intégral : méthodes de calculs d'aires).

Pour ces deux derniers thèmes nous n'avons pas travaillé sur les textes originaux de Roberval, en général assez complexes, mais sur une analyse publiée dans *La naissance du calcul infinitésimal au XVIIème siècle* qui présentait, outre cette analyse, des éléments de synthèse sur les indivisibles. Nous reproduisons ici (encadrés 5 et 6) les textes originaux relatifs à la construction de la tangente à la cycloïde et à l'aire de la cycloïde.

Analyse du texte de Roberval concernant l'étude de l'aire de la cycloïde.(7)

Les élèves ont disposé, en plus d'une initiation à la méthode des indivisibles, de cette analyse de la méthode de Roberval (encadré 6) que nous avons lue collectivement et commentée afin d'en comprendre

(7) J. P. Clero, E. Le Rest, *La naissance du calcul infinitésimal au XVIIème siècle*, p. 50.

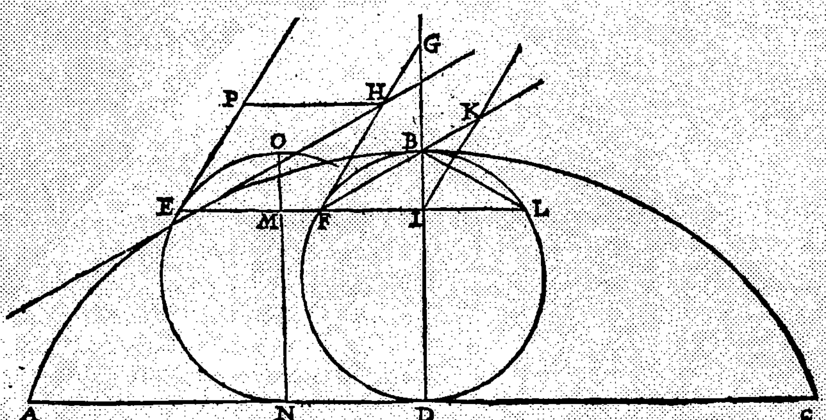
Encadré 5.

Tangente à la cycloïde

Onziéme exemple, de la Roulette ou Trochoïde de M. de Roberval.

Ces connoissances suffisent pour trouver les touchantes de la Roulette par les mouvemens composez ; car ayant pris un point de la Roulette, & ayant trouvé les deux directions de son mouvement droit & de son mouvement circulaire ; si l'on entend dans ces lignes de direction deux lignes qui soient entre elles comme la ligne BC ou la base de la Roulette, est au cercle de la Roulette, chacune de ces lignes étant prise dans la direction du mouvement homologue, la direction du mouvement composé de ces deux sera la touchante.

Car soit proposé la Roulette ABC de laquelle la base est ADC, le sommet B & l'axe BD, & que l'on en demande la touchante au point E. Décrivez le cercle BFD de la Roulette, soit autour de l'axe BD, soit sur quelque diamétre perpendiculaire à la ligne ADC ; du point



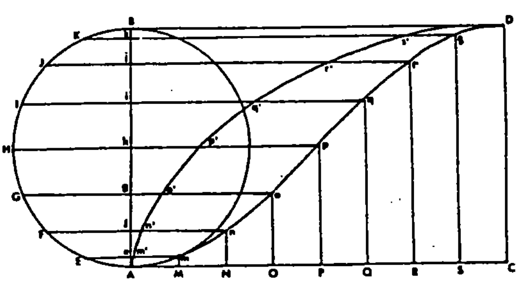
E tirez la ligne EF parallele à AC, & coupant en F la circonférence du demi-cercle de la Roulette (la plus proche du point E, si le point E étant pris entre A & B, vous avez décrit le cercle plus vers C que le point E, sinon au contraire &c.) tirez FG touchante du cercle, puis faites que comme AC est à la circonférence du cercle, ainsi EF soit à FH, prenant le point H dans la touchante FG, du point H tirez HE, ce sera la touchante de la Roulette.

M. de F. tire cette touchante en cette façon. Tirez la ligne EF, comme ci-deſſus. Tirez encore une ligne FB, & par le point E tirez EH parallele à FB, la ligne EH ſera la touchante.

Or il eſt facile de démontrer que cette méthode s'accorde avec la premiére, mais elle n'eſt pas ſi générale n'étant propoſée qu'au cas que la Roulette, ſoit du premier genre, c'eſt-à-dire que ſa baſe AC ſoit égale à la circonférence de ſon cercle, ce que vous remarquerez dans cette démonſtration que nous chercherons analytiquement, comme il s'enſuit.

les éléments et notamment voir comment intervient la définition de la cycloïde.

"Nous allons voir la méthode des indivisibles, appliquée par Roberval, à la quadrature de la cycloïde :

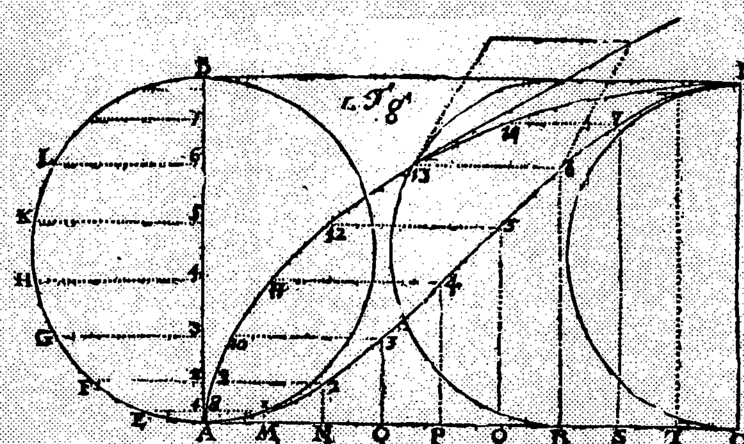


Considérons le segment AC égal à la demi-circonférence AGB du cercle générateur. Partageons ce segment et cette demi-circonférence en une infinité de parties égales telles que AM = AE . Soient m , n , etc. les points d'intersection des droites Ee , Ff , etc. avec les perpendiculaires menées de M , N , etc. à la droite AC ; ces points sont les points d'une courbe appelée par Roberval, la "compagne" de la roulette. Les points m' , n' , etc. des droites Em , Fn , etc. tels que Ee = m'm , Ff = n'n , etc. sont les points de la cycloïde ; en effet, lorsque le centre du cercle générateur est sur la perpendiculaire menée de M à AC alors $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{Mm'}$, etc. La compagne partage le rectangle ABCD en deux surfaces égales car chacun des segments Mm , Mn etc a son égal dans l'autre moitié. D'autre part l'aire entre les deux courbes est égale à l'aire du demi-cercle AGB car la somme des segments Ee , Ff , etc. est égale à la somme des segments m'm , n'n , etc. Par conséquent l'aire sous la demi-cycloïde est égale à la moitié de l'aire du rectangle ABCD plus la moitié du cercle générateur c'est-à-dire aux trois demis de l'aire du cercle générateur. L'astuce de ce calcul consiste en l'introduction de la courbe compagne qui est de toute évidence symétrique par rapport au centre du rectangle ABCD"

Encadré 6.

Aire de la cycloïde

NOus poſons que le diamétre AB du cercle AEFGB ſe meut parallelement à ſoy-même, comme s'il étoit emporté par quelqu'autre corps, juſques à ce qu'il ſoit parvenu en CD pour achever le demi-cercle ou demi-tour. Pendant qu'il chemine, le point A de l'extrémité dudit diamétre marche par la circonférence du cercle AEFGB, & fait autant de chemin que le diamétre, enſorte que quand le diamétre eſt en CD, le point A eſt venu en B, & la ligne AC ſe trouve égale à la circonférence AGHB. Or cette courſe du diamétre ſe diviſe en parties infinies & égales tant entr'elles qu'à chaque partie de la circonférence AGB, laquelle ſe diviſe auſſi en parties infinies toutes égales entr'elles & aux parties de AC parcouruës par le diamétre, comme il a été dit. En aprés je conſidére le chemin qu'a fait ledit point A porté par deux mouvemens, l'un diamétre en avant, l'autre du ſien propre dans la circonférence. Pour



trouver ledit chemin, je voy que quand il eſt venu en E il eſt élevé au-deſſus de ſon premier lieu duquel il eſt parti; cette hauteur ſe marque tirant du point E au diamétre AB un ſinus E1, & le ſinus Verſe A1 eſt la hauteur dudit A quand il eſt venu en E. De même quand il eſt venu en F, du point F ſur AB je tire le ſinus F2, & A2 ſera la hauteur de A quand il a fait deux portions de la circonférence, & tirant le ſinus G3, le ſinus Verſe A 3 ſera la hauteur de A quand il eſt parvenu en G ; & faiſant ainſi de tous les lieux de la circonférence que parcourt A, je trouve toutes ſes hauteurs & élevemens pardeſſus l'extrêmité du diamétre A, qui ſont A 1. A 2. A 3, A 4, A 5, A 6, A 7 ; donc, afin d'avoir les lieux par où paſſe ledit point A, ſçavoir la ligne qu'il forme pendant ſes deux mouvemens, je porte toutes ſes hauteurs ſur chacun des diamétres M, N, O, P, Q, R, S, T, &c. je trouve que M 1, N 2, O 3, P 4, Q 5, R 6, S 7 ſont les mêmes que celles qui ſont priſes ſur AB. Puis je prends les mêmes ſinus E 1, F 2, G 3, &c. & je les porte ſur chaque hauteur trouvée ſur chaque diamétre, & je les tire vers le cercle, & des extrémitez de ces ſinus ſe forment deux lignes, dont l'une eſt A 8 9 10 11 12 13 14 D, & l'autre A 1 2 3 4 5 6 7 D. Je ſçai comme s'eſt fait la ligne A 8 9 D ; mais pour ſçavoir quels mouvemens ont produit l'autre, je dis que pendant que AB a parcouru la ligne AC, le point A eſt monté par la ligne AB, & a marqué tous les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, le premier eſpace pendant que AB eſt venu en M, le ſecond pendant que AB eſt venu en N, & ainſi toûjours également d'un eſpace à l'autre juſques à ce que le diamétre ſoit arrivé en CD ; alors le point A eſt monté en B. Voilà comment s'eſt formée la ligne A 1 2 3 D. Or ces deux lignes enferment un eſpace, étant ſeparées l'une de l'autre par tous les ſinus, & ſe rejoignant enſemble aux deux extrémitez AD. Or chaque partie contenuë entre ces deux lignes eſt égale à chaque partie de l'aire du cercle AEB contenuë dans la circonférence d'icelui ; car les unes & les autres ſont compoſées de lignes égales, ſçavoir de la hauteur A 1, A 2, &c. & des ſinus E 1, F 2, &c. qui ſont les mêmes que ceux des diamétres M, N, O, &c. ainſi la figure A 4 D 12 eſt égale au demi-cercle AHB. Or la ligne A 1 2 3 D diviſe le parallelograme ABCD en deux également, parce que les lignes d'une moitié ſont égales aux lignes de l'autre moitié, & la ligne AC à la ligne BD ; & partant ſelon Archiméde, la moitié eſt égale au cercle, auquel ajoûtant le demi-cercle, ſçavoir l'eſpace compris entre les deux lignes courbes, on aura un cercle & demi pour l'eſpace A 8 9 D C ; & faiſant de même pour l'autre moitié, toute la figure de la cycloïde vaudra trois fois le cercle.

BIBLIOGRAPHIE

ARCHIMEDE, *La mesure du cercle* , in Collection des Universités de France, *Archimède* Tome 1, traduction C. MUGLER, Edition Les belles Lettres, 1970.

ARNAULD, *Nouveaux éléments de géométrie* , 1667, réédition Irem de Dijon, 1985.

CLERO et LE REST, *La naissance du calcul infinitésimal au XVIIème siècle*, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, n° 16, 1980.

EUCLIDE, *Eléments*, Ed. Peyrard, Blanchard, Paris.

Irem des Pays de Loire, Centre du Mans, *Mathématiques, Arts et Techniques au XVIIème siècle* , Publication de l'Université du Maine n° 4, 1987.

LAMY, *Entretiens sur les Sciences* , 3ème édition, 1706 à Lyon (chez Jean Certe).

PASCAL, *Oeuvres complètes* , Bibliothèque de la Pléïade, 1954.

ROBERVAL, *Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes* , Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, T. VI., 1666-1699.