REPERES - IREM . n°8 - juillet 1992

# LE SECRET DE LEONHARD

Michèle MUNIGLIA
Irem de Lorraine

*... à Rudolf Bkouche*

"Le secret de Leonhard", sous forme de course au trésor, est une tentative pour proposer une activité de synthèse mettant en jeu pratiquement tout le programme de géométrie de Quatrième.

On peut la concevoir comme une longue séquence de révisions de fin d'année ou on peut la traiter, chemin faisant, de façon fragmentée. C'est d'ailleurs ainsi qu'elle est proposée dans le fichier « Géométrie Quatrième » de l'Irem de Lorraine et on pourra se reporter à celui-ci pour avoir des précisions sur le découpage et les *prérequis* nécessaires à chacune des étapes.

Bien entendu, cette activité doit être modulée selon le niveau des élèves ou de la classe ; elle peut être partielle et traitée en classe où à la maison.

Plutôt que de donner ici un commentaire détaillé des exercices, il me semble préférable d'inviter chacun à se plonger dans cette course au trésor. J'espére que l'intérêt personnel du professeur lui permettra d'en faire la meilleure adaptation possible dans ses classes.

Je signalerai simplement ici les éléments indispensables pour que l'élève puisse commencer la première partie : celle-ci ne fait appel qu'à l'utilisation du repérage (niveau sixième-cinquième), à la propriété concernant la somme des angles d'un triangle (niveau cinquième), ainsi qu'à des considérations simples sur l'alignement de points donnés dans un quadrillage.

Les diverses autres notions auxquelles il est fait appel au cours des différents épisodes sont indiquées (à l'intention du lecteur-professeur) au début de chacune de ces parties.

Comme l'on sait : "l'intérêt d'une activité ne peut se décréter *a priori* sur la seule base d'une analyse théorique. L'expérimentation et l'observation des élèves sont des méthodes indispensables et décisives pour juger si une activité est "provisoirement" au point, si elle doit être améliorée, ou encore si elle doit être définitivement "mise au panier" ... " (Cf. page 68) Je laisse donc le lecteur se forger une opinion sur celle-ci et voir par lui-même si elle remplit ou non les critères qui pourraient faire d'elle une "bonne" activité ...

Que l'on me permette cependant de citer pour conclure Jean-Claude Duperret :

" ... si je devais donner quelques conseils à un collègue avant de s'embarquer dans cette activité avec sa classe :

— la faire avant à fond en imaginant les questions des élèves,

— insister sur la qualité du graphique et des constructions obtenues,

— mettre en évidence pourquoi, pour un marin sur la mer, il est si important de travailler sur les angles,

— valoriser l'aller et retour constant entre le graphique et le calcul et raisonnement,

— ne peut-être pas vouloir aller au bout de l'activité,

— et surtout ... laisser le temps aux élèves de faire "leur" cette activité ... "


Par 48° 40' Sud et 173° 48' Ouest, perdue au fond des mers australes, une poussière d'îlots oubliés de tous recèle un fabuleux trésor.

De tous temps en effet, l'*archipel des Rascasses* servit de repaire à tous les forbans des mers du Sud. Mais c'est surtout au XVIIIème siècle que la *baie de San Miguel,* bien à l'abri de ses récifs, devint le centre de la piraterie universelle.

Le *Capitaine Harckoss* — qui domine l'histoire de l'époque par l'ampleur de ses forfaits — y avait installé son quartier général et il avait même fait édifier une forteresse imprenable surplombant la rade.

En 1781, pendant la campagne de pacification des mers du Sud, le *Capitaine Harckoss* décida de soustraire son trésor aux convoitises et l'immergea par cent quarante pieds de fond, en un point de la *baie de San Miguel* qu'il serait le seul à pouvoir retrouver ...

Bien lui en prit.

Le 22 août 1785, l'archipel fut investi par les Marines royales. Le *village de San Miguel* tomba le 8 septembre, les pirates furent tous décimés et le fort fut presque entièrement détruit après un siège qui dura plus de trente cinq jours.

Emporté par un boulet, le *Capitaine Harckoss* mourut sans avoir révélé à quiconque l'emplacement du trésor.

Pour être sûr que personne ne trahirait son secret, il avait même fait emprisonner son pilote *Eulerus* ; celui qui l'avait aidé à jeter le coffre au milieu de la baie.

Plus d'un siècle durant, les occupants de l'*archipel des Rascasses* fouillèrent la *baie de San Miguel* à la recherche du trésor.

En vain. Car personne, jusqu'alors, ne réussit à perçer le mystérieux secret du *Capitaine Harckoss* ...

En 1895, à peine élu Président de la République, *Félix Faure* fut mis au courant de l'existence du trésor par son Ministre de l'Instruction.

Il décida d'envoyer sur le champ une mission compétente, capable de trouver enfin le mot de l'énigme.

Et c'est ainsi que le *Général Bourbaki,* accompagné de son fidèle aide de camp *Leonhard,* arriva le 23 septembre 1895 en rade de *San Miguel,* à l'extrême Est de l'*archipel des Rascasses,* par 48° 40' de latitude Sud et 173° 48' de longitude Ouest, au fond des mers australes ...

LE SECRET DE LEONHARD

A peine débarqués, le Général et son fidèle aide de camp allèrent s'installer au petit village de *San Miguel*. Le lendemain, *Bourbaki* chargea *Leonhard* de relever soigneusement la carte de la baie laissée dans l'église par le *Capitaine Harckoss* ; puis il s'en alla explorer lui-même le vieux fort, là où avait été jadis emprisonné le pilote *Eulerus*.

On peut dire aujourd'hui que c'est ce jour-là qu'ils firent, chacun de leur côté, des découvertes livrant la clé de l'énigme ...

— regarde *Leonhard*, dit *Bourbaki* en revenant de son expédition, regarde ce que j'ai trouvé gravé sur une pierre, dans ce qui devait être la cellule du pilote *Eulerus* ...

— *"De mêmes distances du* **phare,** *de* **San Miguel** *et de la* **maison du pêcheur,** *... Va à mêmes distances du* **fort,** *de l'***ancienne tour** *et du* **récif rouge** *... Tu auras fait trois fois la moitié du chemin qui mène au trésor d'Harckoss ... Aligne-toi pour cela ... "*

— c'est clair : il faut partir du point situé à égale distance du *phare*, de l'*église de San Miguel* et de la *maison du pêcheur* ; et aller vers le point situé à égale distance du *fort*, de l'*ancienne tour* et du *récif rouge* ...

— dommage que le message soit inachevé ! constata *Leonhard*. Mais regardez Mon Général, ces six endroits sont précisément les six points importants de ma carte ! Et vérifiez vous-même ce que je viens justement de découvrir : les trois points que j'ai appelés **a** , **b** et **c** sont ...

A l'extrême ouest de l'archipel des Rascasses :
**La baie de San Miguel, où a été caché le trésor du Capitaine Harckoss.**
Au fond, *l'église dédiée à San Miguel* (St Michel), le *phare* signalant l'entrée de la rade et les ruines de la *vieille tour* ... Plus près : le *fort de Santa Anna* (Ste Anne) où fut enfermé *Eulerus* et, fermant la baie, le *récif rouge*. Au premier plan : la *maison du pêcheur* (note qu'elle n'est pas visible de la mer ...)

**1** Construis ta propre carte de la baie. Elle t'aidera pour comprendre ... Et, peut-être, pour faire mieux que le Général et son ami ...

Prends une grande feuille double à petits carreaux et place un repère en bas à gauche (*unités* : 1 carreau). Place soigneusement les points découverts par *Bourbaki* et *Leonhard* :

| | | |
|---|---|---|
| **A** | le **phare** | ( 3 ; 56 ) |
| **B** | l'église de **San Miguel** | ( 45 ; 50 ) |
| **C** | la **maison du pêcheur** | ( 21 ; 2 ) |
| **a** | le **fort** | ( 33 ; 26 ) |
| **b** | le **récif rouge** | ( 12 ; 29 ) |
| **c** | l'**ancienne tour** | ( 24 ; 53 ) |

Quelle est la découverte faite par le fidèle aide de camp *Leonhard* ?

Les points a , b , c sont les :

.......................................................

.......................................................

.......................................................

*De mêmes distances
du phare,
de San Miguel
et de la maison du
pêcheur, ...*

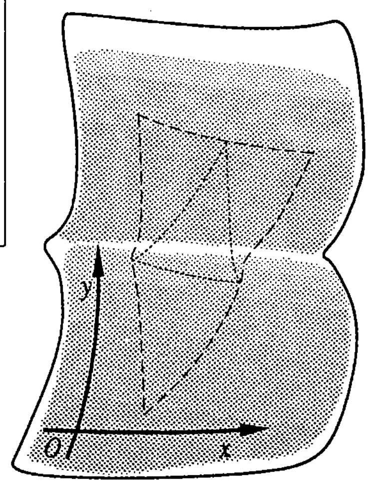
*Va à mêmes distances
du fort,
de l'ancienne tour
et du récif rouge*

*Tu auras fait trois fois
la moitié du chemin qui
mène au trésor
d'Harckoss*

*Aligne toi pour cela*

**à gauche :**

*le texte incomplet gravé dans la cellule du pilote Eulerus.*




**à droite :**

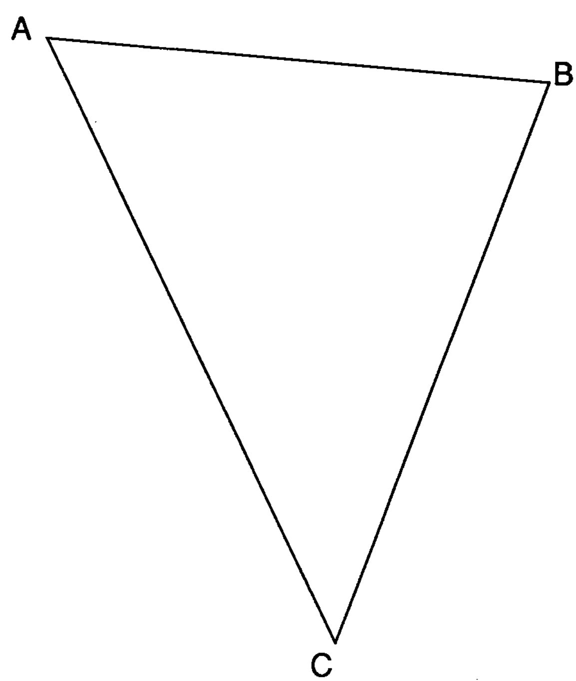
*la carte que tu as dessinée, indiquant les 6 points importants*

**2** *« Il faut partir du point situé à égale distance du phare, de l'église et de la maison du pêcheur ; c'est-à-dire du point* ***équidistant*** *des points* **A**, **B** *et* **C** *... »*

Nous appellerons ce point **H** . Tu as étudié ses propriétés en cinquième :

> Le point *équidistant des sommets* d'un triangle s'appelle le :
>
> ..................................................
> ..................................................
> ..................................................
>
> à ce triangle.
>
> C'est le *point d'intersection des*
>
> ..................................................
> ..................................................
> ..................................................
> ..................................................

Construis le point **H** **avec ta règle et ton compas** sur la figure ci-contre.



**3** *Tu vas construire le point* **H** *sur ta carte sans compas ... Auparavant, observe le quadrillage ci-contre. Indique sur la figure les égalités qui existent entre les côtés et les angles des triangles* **BDC** *et* **KHB**.

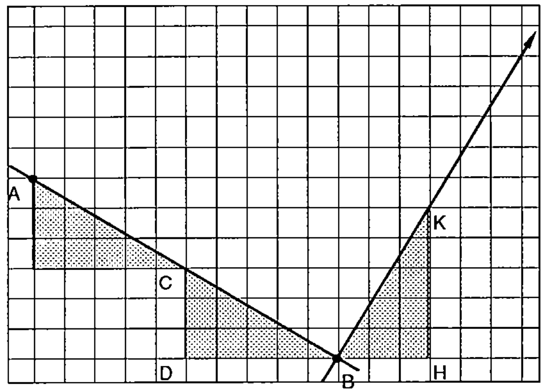
— Calculons $\widehat{CBK}$ :

$$\widehat{CBK} = 180° - (\widehat{DBC} + \widehat{KBH})$$

$$\widehat{CBK} = 180° - \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$

— Utilise la propriété précédente pour trouver les perpendiculaires à AB aux points C et A.

— Toujours en utilisant la propriété précédente, trace soigneusement **sur ta carte** les *médiatrices* des côtés du triangle ABC.




— Observe sur ta construction les triangles rectangles correspondant à **aH** et à **bc**. Ces droites sont ........................................................ .

— Vérifie aussi sur **bH** et **ac**, puis sur **cH** et **ab**. Dans le triangle abc, les droites aH, bH et cH sont les ............................................ .

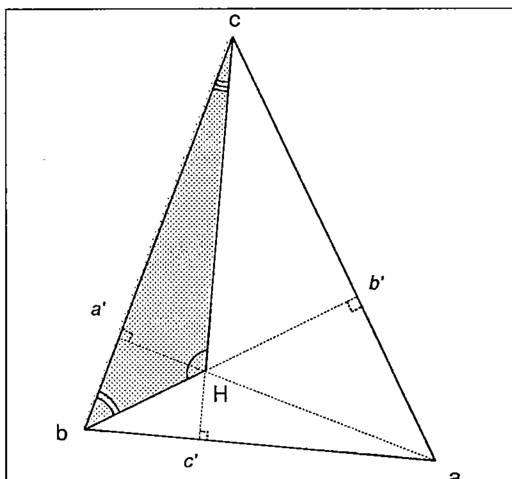
Une fois en mer, pour savoir si nous sommes bien au point **H**, dit *Bourbaki*, il nous faut pouvoir *viser des points de repère ...*

Nous allons **chercher les angles** sous lesquels on voit, depuis le point **H**, le *fort*, le *récif rouge* et l'*ancienne tour ...*

— c'est très facile si on connaît les angles $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ et $\widehat{c}$ du triangle **abc**, répondit *Leonhard* !

Regardez Mon Général : le triangle **bb'c** est un triangle *rectangle*, je peux donc calculer l'angle cbb' en fonction de $\widehat{c}$.

Je ferai de même avec le triangle **bcc'**, j'en déduirai l'angle $\widehat{bcc'}$ en fonction de $\widehat{b}$ ... Je pourrai alors calculer $\widehat{bHc}$ !




**4** *Trouve, toi aussi ces angles en fonction de* $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$ :

$\widehat{bHc}$ = ...........................................

$\widehat{aHb}$ = ...........................................

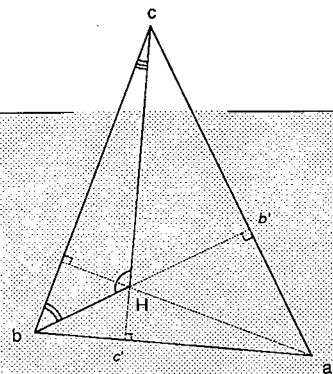
$\widehat{cHa}$ = ...........................................

***... à suivre***

*Prérequis :* théorème de Pythagore, cosinus d'un angle, algébrisation d'un problème (à titre d'introduction ou d'application).

*Remarque :* cet épisode ne permet pas d'aboutir à la solution ; c'est un simple prétexte au travail sur les angles ...

# le secret de Leonhard ( ...suite )




**Résumé :** Partis à la recherche du trésor immergé dans la baie de *San Miguel*, *Bourbaki* et *Leonhard* ont trouvé la carte laissée par le *Capitaine Harckoss* permettant de remarquer que le fort (**a**), le récif rouge (**b**) et l'ancienne tour (**c**) sont les *milieux des côtés* du triangle formé par le phare (**A**), l'église (**B**) et la maison du pêcheur (**C**).

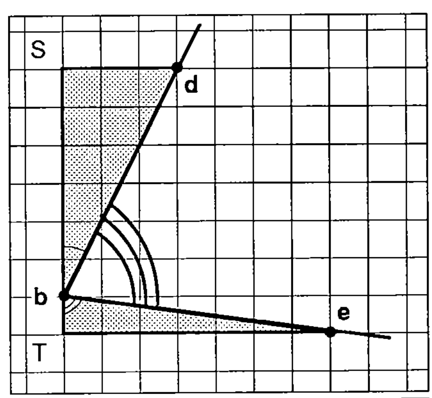
Ils ont trouvé aussi le message inachevé d'*Eulerus* :

*de mêmes distances du phare, de San Miguel et de la maison du pêcheur, va à mêmes distances du fort, de l'ancienne tour et du récif rouge, tu auras fait trois fois la moitié du chemin qui mène au trésor d'Harckoss. Aligne toi pour cela ...*

Ils ont donc décidé de partir du point **H** équidistant de **A**, **B**, **C** et de se diriger vers le point équidistant de **a**, **b**, **c** ... Tu as toi-même placé sur ta carte le point **H** et — pour pouvoir te repérer sur des points visibles de la mer — tu as commencé à calculer les angles sous lesquels on voit, depuis le point **H**, les points **a**, **b** et **c**. Tu as dû trouver : $\widehat{bHc} = \hat{b} + \hat{c}$, $\widehat{aHb} = \hat{a} + \hat{b}$, $\widehat{cHa} = \hat{c} + \hat{a}$.

**5** Nous avons reporté sur le schéma ci-contre la partie de ta carte qui correspond au point **b** et au début des côtés **bc** et **ba** du triangle **abc**.

Utilise cette figure pour calculer l'angle $\hat{b}$ à partir des deux angles $\widehat{Sbd}$ et $\widehat{Tbe}$ :




$bd^2$ = ...... + ...... = .......

bd = ......

$\cos \widehat{Sbd}$ = —— = .......

$\widehat{\mathbf{Sbd}}$ = ........

$be^2$ = ...... + ...... = .......

be = ......

$\cos \widehat{Tbe}$ = —— = .......

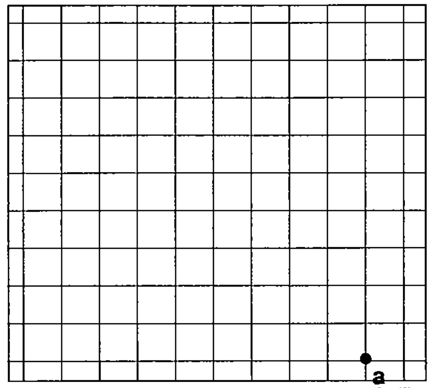
$\widehat{\mathbf{Tbe}}$ = ........

Je peux donc **calculer** :

$\hat{\mathbf{b}}$ = ........ ........ ......... = ..........

**6** Reporte soigneusement sur le schéma ci-contre la partie de ta carte qui correspond au point **a** et au début des côtés **ab** et **ac** du triangle **abc**. Marque sur ta figure des triangles rectangles convenables et utilise-les pour calculer l'angle en $\widehat{\mathbf{a}}$ :

| | |
|---|---|
| ....... ............................ | ....... ............................ |
| ................. | ................. |
| ....... ............................ | ....... ............................ |
| ................. | ................. |




Je peux donc **calculer** :

$\widehat{\mathbf{a}}$ = ........ ........ ......... = ..........

**7** En résumé ; les trois angles de **abc** sont :

$\widehat{\mathbf{a}}$ = ...... $\widehat{\mathbf{b}}$ = ...... $\widehat{\mathbf{c}}$ = ......

Du point **H** , on voit donc les trois points **a** , **b** , **c** sous des angles qui valent :

$\widehat{\mathbf{bHc}}$ = ..........

$\widehat{\mathbf{aHb}}$ = ..........

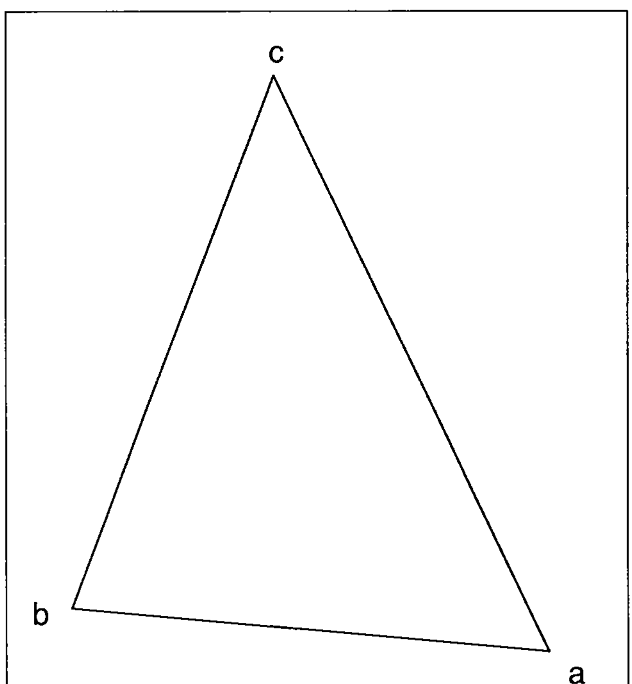
$\widehat{\mathbf{cHa}}$ = ..........

**8** Trace sur ta carte (**à la règle et au compas**) le point **O** *équidistant* de **a** , **b** et **c** .

C'est **un point du quadrillage.**

Vérifie ta construction en calculant les distances **Oa** , **Ob** et **Oc** .

*(unité : 1 carreau).*




**9** *Construis à la règle et au compas le centre* **O** *du cercle circonscrit au triangle ci-dessus. Trace à l'encre les segments* **aO** , **bO** *et* **cO** *; puis gomme les tracés inutiles.*

Pour nous repérer depuis la mer, il ne nous reste plus qu'à trouver les angles qui nous permettront de viser le *fort* (**a**), le *récif rouge* (**b**) et l'*ancienne tour* (**c**) ... »

— ... Mououi !! ... grommela *Leonhard*, seulement ça m'a l'air bigrement plus compliqué pour **O** que pour le point **H** !

— ... Mais non ! répondit *Bourbaki*. Regarde, j'appelle **x** l'angle $\widehat{Oba}$ , j'utilise les triangles isocèles pour exprimer tous les autres angles en fonction de **x** , et j'en déduis l'équation donnant **x** ...

— ... la clâaasse !!! , s'exclama *Leonhard* ébloui.

— ... tss !! ... tss !! allons *Leonhard* ! le reprit modestement le général ...

**10** Place l'angle **x** sur le triangle **abc** de la page précédente et marque toutes les égalités d'angles ou de segments que tu connais ; puis en te servant des valeurs que tu as trouvées pour les angles de **abc** , exprime les autres angles de la figure en fonction de **x** :

$\widehat{baO}$ = ...... $\widehat{cbO}$ = ...... ....... $\widehat{bcO}$ = ...... .......

$\widehat{acO}$ = ...... ....... $\widehat{caO}$ = ...... .......

Lesquels de ces angles doivent-ils être égaux ? déduis-en l'*équation* donnant **x** , puis détermine **x** :

.......................................................................................

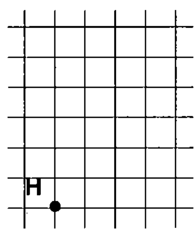
.......................................................................................

**11** *En allant du point* **H** *au point* **O** *...*

***tu auras fait trois fois la moitié du chemin qui mène au trésor ...***

*Tiens bien compte du quadrillage et reporte sur le schéma ci-contre le point* **O** *que tu as trouvé. Trace le segment* **OH***.*

*Détermine le point* **P** *du segment* **OH** *où est situé le trésor ... (explique ta solution)*




..................................................................

..................................................................

..................................................................

..................................................................

..................................................................

..................................................................

P est le point de coordonnées :

..................................................................

Dès qu'ils eurent trouvé la clé de l'énigme, *Bourbaki* et *Leonhard* affrêtèrent un bateau et partirent à la recherche du point **P** ... Déterminant leur position par rapport à l'*ancienne tour*, au *récif rouge* et au *fort de Santa Anna*, ils se placèrent au point **H** . De là ils se dirigèrent vers le point **O** dans le but de s'arrêter juste au-dessus du point **P** ...

Malheureusement, ni les calculs d'angles, ni les coordonnées du point **P** ne leur furent d'un grand secours lorsqu'ils se trouvèrent confrontés à l'imprécision des mesures et aux caprices du vent ...

Jamais ils ne déterminèrent avec suffisamment de certitude les positions de **O** et de **H**. Jamais ils ne purent estimer exactement le tiers du chemin. Jamais ils ne trouvèrent le trésor.

Cinq mois durant, ils sillonnèrent en vain la *Baie de San Miguel*. Puis ils rentrèrent en France dépités, épuisés et taciturnes ; persuadés que le trésor n'existait que dans la légende des mers australes ...

Un mois après leur départ, à midi, au moment où ils franchirent l'équateur, *Leonhard* (qui n'avait plus rien dit jusque là) s'écria :

— j'ai trouvé Mon Général ! j'ai compris la fin incomplète du message d'*Eulerus* ! : ***Aligne-toi pour cela ...***

Pour trouver le point **P**, il nous suffisait effectivement de placer le bateau *au croisement de deux droites* déterminées très simplement par des points de la carte ! ...

Regardez Mon Général, poursuivit *Leonhard* qui ramassa trois ou quatre baguettes de bois et se mit à exposer sa démonstration à même le pont du bateau, en plein soleil ...

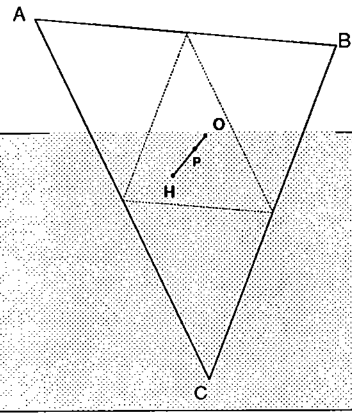
— ... *la clâa ...* ! faillit bien s'exclamer *Bourbaki* ébloui.

« Quel dommage qu'une aussi belle démonstration ne soit pas au programme des collèges ! » pensa-t-il. « Si seulement les élèves de *quatrième* savaient assez de **géométrie du triangle** ... »

*... à suivre*

*Prérequis :* définitions des médianes, des hauteurs, des médiatrices d'un triangle ; ainsi que du centre de gravité, de l'orthocentre et du centre du cercle circonscrit. Propriétés de la symétrie par rapport à un point ; caractérisations du parallélogramme ; théorème sur la droite des milieux.

# le secret de Leonhard ( ...suite )




**Résumé :** *Bourbaki* et *Leonhard* ont fini par trouver l'emplacement du trésor immergé par le *Capitaine Harckoss* dans la baie de *San Miguel* ...

Considérant le triangle **ABC** formé, sur la carte, par le phare (**A**), l'église (**B**) et la maison du pêcheur (**C**), ils ont commencé par remarquer que le fort (**a**), le récif rouge (**b**) et l'ancienne tour (**c**) forment le *triangle des milieux* du triangle **ABC**.

Puis, aidés par le message inachevé d'*Eulerus,* ils ont découvert que le trésor se trouvait au point **P** situé aux *deux tiers* du segment joignant le point **H** équidistant de **A** , **B** , **C** , au point **O** équidistant de **a** , **b** , **c** .

Malheureusement, une fois en mer, leur méthode pour se placer en **H** et se diriger vers **O** était trop imprécise pour leur permettre de déterminer exactement l'emplacement du point **P**.

Ce n'est que sur le bateau du retour que *Leonhard* comprit le sens de la fin énigmatique du message d'*Eulerus* ...

Rappelle-toi le message laissé par Eulerus :

**de mêmes distances du phare, de San Miguel et de la maison du pêcheur,**

(*autrement dit :* pars du point équidistant de **A** , **B** et **C** ...)

**va à mêmes distances du fort, de l'ancienne tour et du récif rouge,**

(va au point équidistant de a , b et c ...)

**tu auras fait trois fois la moitié du chemin qui mène au trésor d'Harckoss.**

(... le trésor est aux deux tiers du chemin)

**Aligne toi pour cela ...**

**12** La dernière phrase, inachevée, pouvait effectivement laisser deviner un **autre moyen** de parvenir au point **P**.

Observe bien ta carte, tu dois pouvoir vérifier que **trois droites** particulières — passant par des points importants de la *Baie* — sont *concourantes* au point **P**.

*( attention, justifie bien les alignements que tu auras trouvés en indiquant les triangles rectangles qui sous-tendent tes droites ! )*

Indique les alignements trouvés sur ta carte en reportant les trois droites sur la figure prévue ci-contre.

Ces droites sont les ................................
du triangle **ABC**.

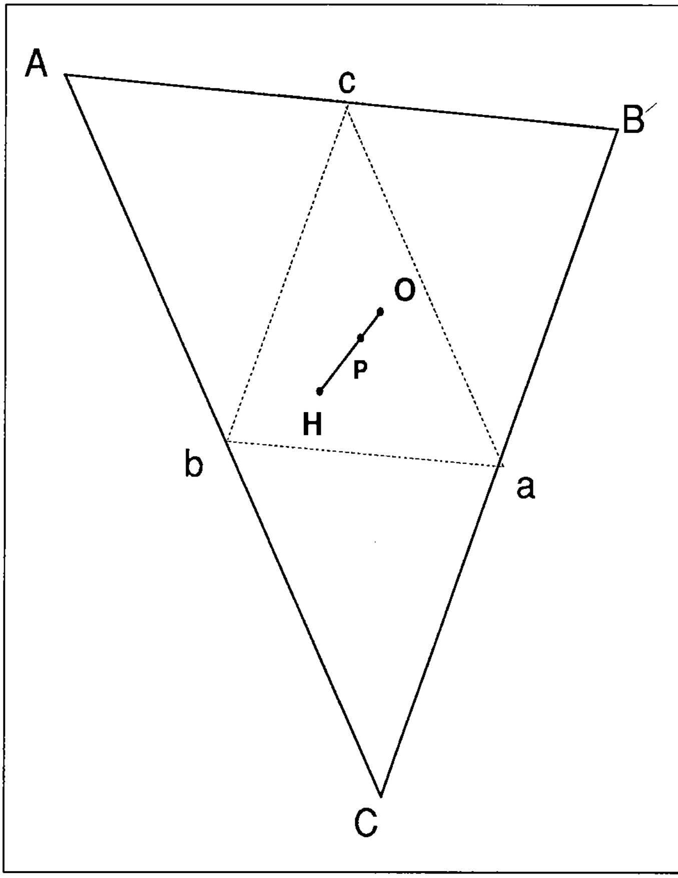
**13** Explique aussi pourquoi **Aa** passe par le milieu du segment **bc** :

Le quadrilatère Acab a ses côtés ................................... ........................ ; c'est un : ........................................ .

Donc ses diagonales ........... ........................................ ........................................ .

(de la même façon on voit que Babc et Cbca sont des ........................................ , donc que Bb et Cc passent respectivement par les milieux de ....................... .)

*En résumé :* le point **P** est le point d'intersection des ........................................ des triangles **ABC** et **abc**. C'est le ............................. ........................................ de chacun de ces deux triangles.

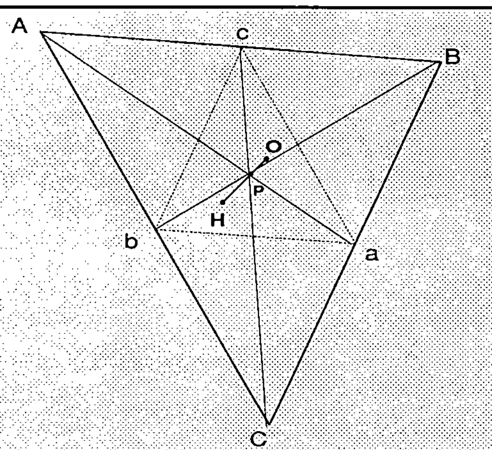



*La propriété géométrique dont s'est servi le pilote Eulerus est vraie* ***dans tous les triangles.***

*Cette découverte est généralement attribuée à un très grand mathématicien suisse du XVIII$^{ème}$ siècle.*

*... ce mathématicien s'appelait :*

Leonhard EULER ( 1707 - 1783 )



**14** Effectue toutes les constructions sur la figure ci-contre :

1°) trace les *médiatrices* de **ABC**, déduis-en les *milieux* **a** , **b** et **c** des côtés et le *centre* **H** *du cercle circonscrit* au triangle **ABC**.

(*remarque :* le point **H** est aussi l' ................................ du *triangle des milieux* **abc**)

2°) Trace le *centre de gravité* **P** du triangle **ABC**.

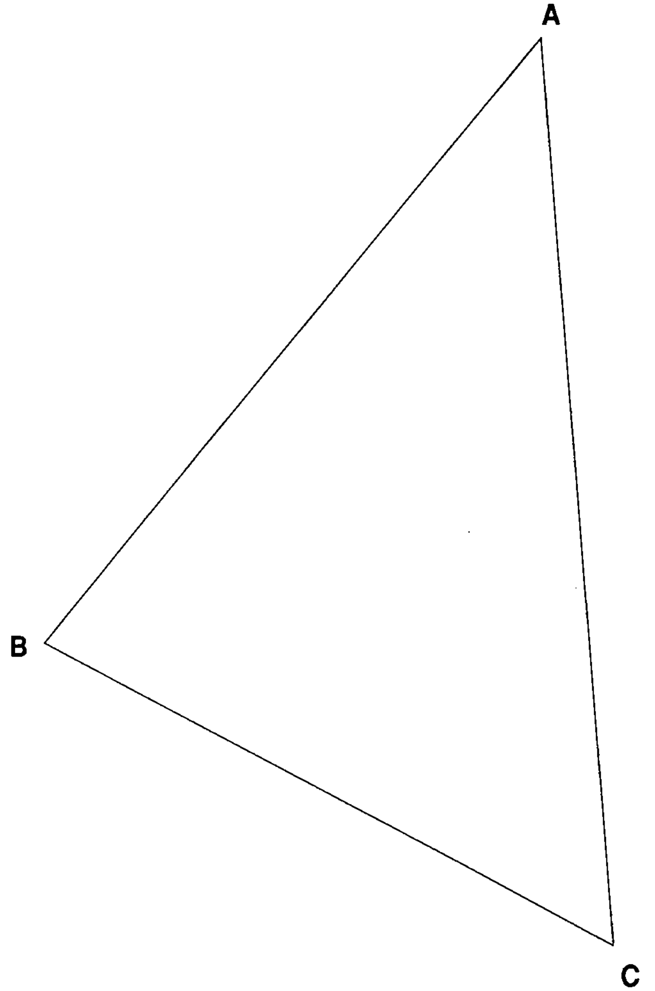
(*remarque :* le point **P** est aussi le ................................ ............................ du *triangle des milieux* **abc**)

3°) Trace les *médiatrices* du triangle **abc**, déduis-en le *centre* **O** *du cercle circonscrit* au triangle **abc**.

4°) Vérifie que les points **H** , **P** et **O** sont alignés et mesure les deux segments **HP** et **PO** :

HP = .........     PO = .........

**HP = ...... x HO**




**15** Essaye d'énoncer le théorème qui résume la propriété :

Dans un triangle ABC quelconque, ................
...................................
...................................
...................................

*Comme nous l'avons dit à la page 133, Bourbaki trouvait que la démonstration donnée par Leonhard n'était pas vraiment au programme des collèges ...*

*Après avoir longtemps cherché, le Général trouva une démonstration adaptée au niveau de la classe de quatrième. La voici.*

*( attention ! il s'agit d'un général, donc une démonstration de Bourbaki demande beaucoup de rigueur de rédaction ... )*

**16** *Rappel* : quelle est la définition de la *symétrie par rapport à un point* ?

Le *symétrique* d'un point **M** par rapport à un point **S** est le point **N** tel que :

..................................................................

**17** Sur la figure de droite **a**, **b** et **c** sont les milieux de **BC**, **CA** et **AB** ; effectue les constructions suivantes :

— trace en traits *bleus* le triangle **abc**,

— trace les symétriques **a'**, **b'** et **c'** de **a**, **b** et **c** par rapport au point **G**, puis trace en traits *rouges* le symétrique de **abc** par rapport à **G**,

— construis *au crayon* le centre **O** du cercle circonscrit au triangle **abc** ; gomme tes constructions et trace en *bleu* les segments **Oa** , **Ob** et **Oc**,

— trace en *rouge* le symétrique **H'** de **O** par rapport à **G** et les symétriques des trois segments **Oa** , **Ob** et **Oc**,

— trace *au crayon* le symétrique **H** de **G** par rapport à **H'**,

— colorie légèrement *(si possible dans trois couleurs différentes)* les triangles **AGH** , **CGH** et **BGH**.

**18** Sachant que **G** est *au tiers de la médiane* **aA** en partant du point **a**, marque les égalités que tu connais sur les parties du segment **aA** :

**a'** *est le* ...................... *de* **GA** .

❑ Considère le triangle *(colorié)* **GAH**

— le point **a'** est le milieu de **GA** ,

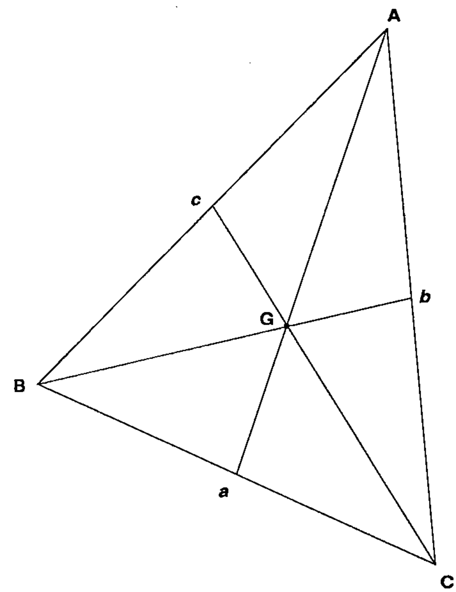
— comme **G** et **H** sont *symétriques* par rapport à **H'**,

**H'** *est le* ......................... *de* **GH** ,

— **a'H'** est le segment qui joint les

..................................................................

donc on a : ....... = 2 x ....... .




❑ En faisant le même raisonnement dans les triangles **GBH** et **GCH** on a :

**AH** = .......... , **BH** = .......... ,

**CH** = ............. .

❑ Mais les segments **a'H'** , **aO** , **b'H'** **bO** , **c'H'** et **cO** sont deux à deux *symétriques par rapport à* **G** , donc :

**a'H'** = ......... , **b'H'** = ......... ,

**c'H'** = ............ .

❑ Et le point **O** est équidistant de **a**, **b** et **c**, donc :

**aO** = .......... = ..........

❑ Donc : **AH** = .......... = ..........

**H** *est le* ..........................................

............................ *au triangle* **ABC**.

❑ Marque les égalités que tu connais sur les parties de **OH** :

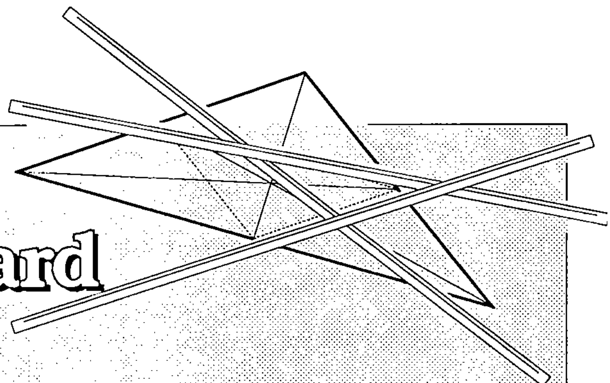
**H'** *est situé au* ................................

................. *de* **HO** *en partant de* **H**.

... *à suivre*

*Prérequis :* ce dernier épisode demande une certaine habitude de « vision dans l'espace » ...

Il ne nécessite, mathématiquement parlant, que la propriété de la droite des milieux, reliée à la notion de projection parallèle.

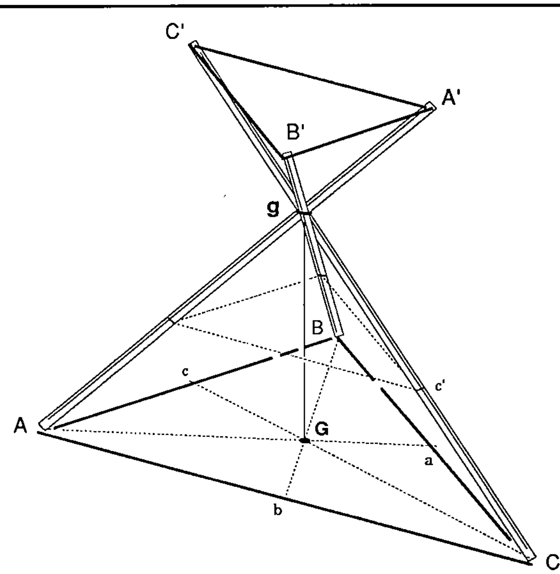


# le secret de Leonhard ( ...fin )

**Résumé :** C'est seulement sur le bateau les ramenant en France que nos héros ont découvert le moyen de parvenir au trésor d'*Harckoss* caché dans l'*Archipel des Rascasses.*

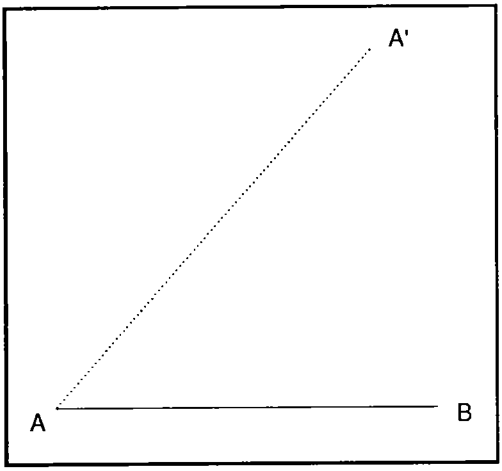
Il suffisait de comprendre, en effet, que le point **P** où *Eulerus* avait immergé le trésor n'est autre que le **centre de gravité** des triangles **ABC** et **abc**. Tu as dû trouver dans les pages précédentes une démonstration de cette propriété. Voici, pour terminer, la démonstration qui fut inventée par Leonhard, sur le pont même du bateau, le 21 mars 1896 à midi, alors qu'ils franchissaient l'équateur ...

Leonhard commença par dessiner sur le sol le triangle **ABC** et ses médianes **Aa, Bb, Cc.** Puis il prit trois baguettes de bois et les plaça de façon à former une sorte de trépied s'appuyant sur les points **A, B, C** , dont les branches se croisaient chacune **aux deux tiers** de leur longueur, en un point **g** situé exactement à la verticale du point d'intersection **G** des médianes ...




**19** Pour bien comprendre la figure construite par Leonhard, complète le cadre situé en haut à droite de la page suivante.

Nous avons placé le côté **AB** du triangle inférieur, ainsi que la baguette qui joint le sommet **A** au sommet **A'** du triangle supérieur. Commence par découper **AA'** en trois parties égales, puis place le point **g** . ... / ...




19 Complète ensuite ta figure en plaçant tous les éléments de celle de gauche qui appartiennent au plan **ABA'** .

*(commence par tracer la baguette BgB' , de manière que **g** soit aux deux tiers de BB'...).*

Place les milieux **c** , **a'** , **b'** des segments **AB** , **Ag** et **Bg** ; marque **toutes** les égalités entre segments. Reporte enfin **a'** et **b'** sur la figure de gauche.

Vous voyez, Mon Général, poursuivit le fidèle *Leonhard.* Les plans de **ABC**, de **A'B'C'** et de **a'b'c'** sont **parallèles.** Et le triangle **A'B'C'** est le **symétrique** du triangle **a'b'c'** par rapport au point **g** ...

— Bien sûr ! nota *Bourbaki*, puisque **g** est le *milieu* des trois segments **A'a'** , **B'b'** et **C'c'** !

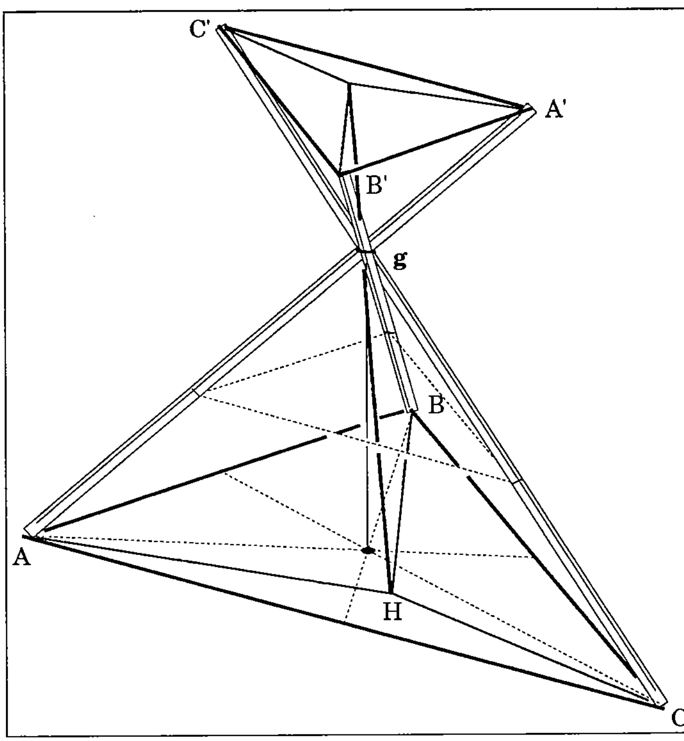
*Leonhard continua son raisonnement :*

— Je considère maintenant le point **H**, équidistant de **ABC**, et je place la quatrième baguette partant de **H** et passant par le point **g** ... J'appelle **H'** l'extrémité de cette baguette et je suppose encore une fois que **g** est aux *deux tiers* de **HH'** .

En regardant dans chacun des trois plans **AHH'** , **BHH'** et **CHH'** , je peux montrer, *exactement comme tout à l'heure*, que :

**AH = 2 A'H' , BH = 2 B'H' , CH = 2 C'H'** .

— Donc H' est bien équidistant de **A'** , **B'** et **C'** ! Conclut *Bourbaki* ...

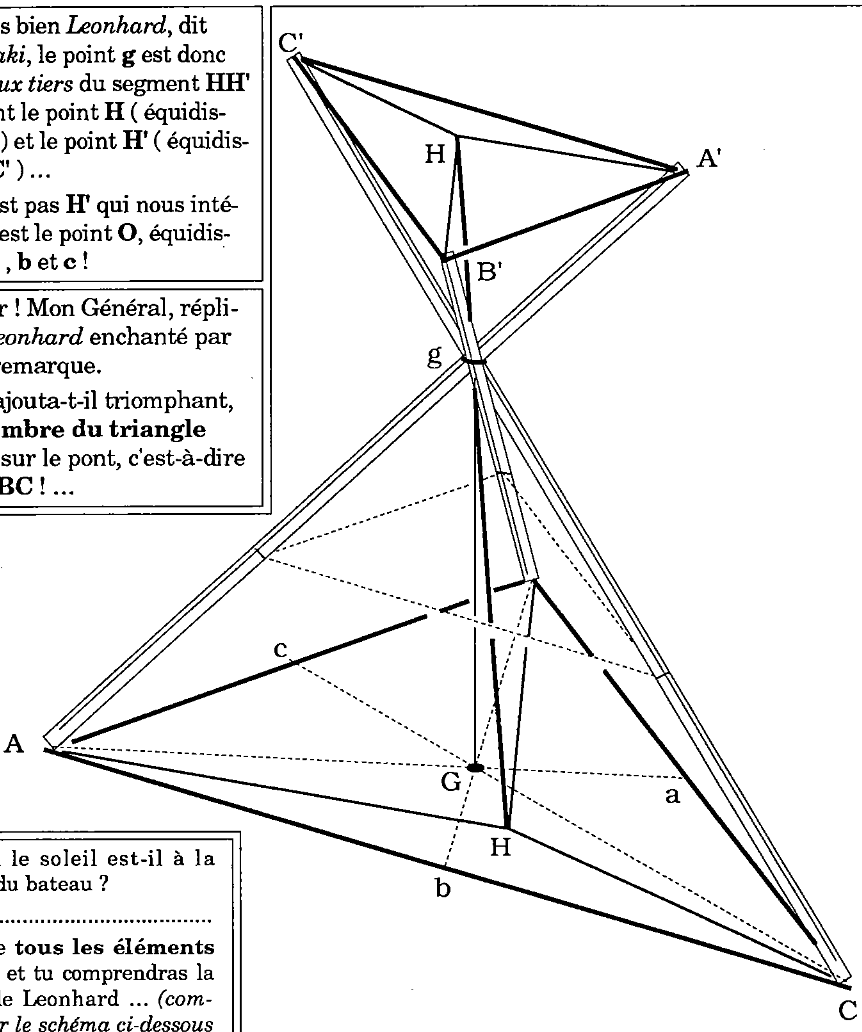


C'est très bien *Leonhard*, dit *Bourbaki*, le point **g** est donc aux *deux tiers* du segment **HH'** joignant le point **H** ( équidistant de **A , B , C** ) et le point **H'** ( équidistant de **A' , B' , C'** ) ...

Seulement ce n'est pas **H'** qui nous intéresse ! puisque c'est le point **O**, équidistant des points **a , b** et **c** !

Bien sûr ! Mon Général, répliqua *Leonhard* enchanté par cette remarque.

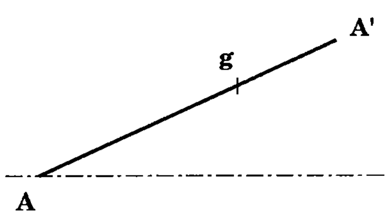
Mais regardez, ajouta-t-il triomphant, regardez ... : l'**ombre du triangle A'B'C' et de H'** sur le pont, c'est-à-dire sur le plan de **ABC** ! ...




**20** Pourquoi le soleil est-il à la verticale du bateau ?

...............................................

Trace l'ombre de **tous les éléments** sur le plan **ABC** et tu comprendras la démonstration de Leonhard ... *(commence par utiliser le schéma ci-dessous pour t'entraîner à tracer l'ombre du segment **AA'** , puis fais de même pour les segments de la figure ci-dessus)*




Leonhard avait raison ...

Et *Bourbaki* se demanda longtemps encore après leur retour en France, comment son fidèle aide de camp avait bien pu trouver la solution du problème légué par *Eulerus*.

Longtemps il se demanda ce qu'aurait fait ce diable de *Leonhard* ... si, **ce jour-là**, le soleil n'avait pas été précisément ...

A LA VERTICALE DU BATEAU ! ...