REPERES - IREM . n°8 - juillet 1992

DES ACTIVITES ANALYTIQUES OU LA GEOMETRIE PEUT AIDER A COMPRENDRE

Bernard DESTAINVILLE
Irem de Toulouse

L'histoire des mathématiques est jalonnée de situations, notamment lors des recherches de solutions d'équations, pour lesquelles le recours à la géométrie a été un moyen pour trouver, comprendre et expliquer. En particulier, les travaux géométriques des Grecs sont souvent des points de départ, même s'il a fallu du temps aux mathématiciens pour algébriser vraiment ces travaux.

Il semble qu'il en soit de même en analyse : tout particulièrement avec les nouveaux programmes, les élèves ont pratiqué suffisamment la géométrie et souvent appris à l'aimer pour que l'appel à cette discipline, loin de constituer un obstacle, soit au contraire un moyen de favoriser autrement l'accès à de nouveaux concepts.

Que ceux qui peuvent progresser en analyse grâce à la géométrie ne soient pas privés de cette ressource.

L'exemple qui suit peut servir d'introduction car il a accroché autant les élèves (une classe expérimentale de redoublants de seconde) que certains enseignants auxquels nous l'avions présenté.

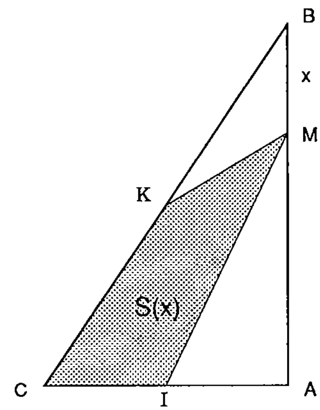
Pour les élèves, il avait été précédé d'une suite d'activités où l'on avait observé des variations d'aires, comme ce sera d'ailleurs le cas plus loin.

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans un triangle ABC rectangle en A , AC = 3 et AB = 4 .

Soient I et K les milieux de [AC] et [BC] . On considère le point M variable sur [AB] et l'on pose BM = x .

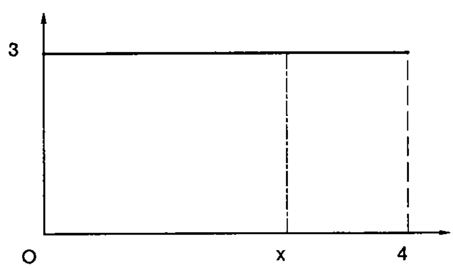
Représenter graphiquement les variations de l'aire S(x) du quadrilatère MKCI en fonction de x (x ∈ [0 ; 4]).



Une fois trouvée, la solution est simple ... :

Quelle que soit la place de M , l'aire de MIK est le quart de l'aire du triangle ABC , c'est à dire 1,5 cm^2 .

Il en est de même pour ICK .



Donc la fonction S qui à x fait correspondre l'aire de MKCI est *constante* :

Quel que soit x , S(x) = 3 .

Nous avons pu observer les élèves de Seconde surpris de voir tracer le graphique ci-dessus, et surtout de voir apparaître la correspondance :

$$x \to 3 .$$

La notion de fonction constante avait trouvé un support, et son graphique avait pris de la signification.

Observons d'autres situations proposées en classe de Première.

I — Les variations d'une distance

La figure géométrique peut soutenir directement la réflexion ; cependant, la démarche basée sur des comparaisons de longueurs n'est pas proposée au début parce que :

— d'une part, on ne peut pas priver certains élèves du confort numérique : ils savent étudier algébriquement les variations de f ,

— d'autre part, les comparaisons d'obliques n'apparaissent plus dans les programmes.

Les parties A et B 1° et 2° de l'activité ci-contre ont été proposées en contrôle, les parties B 3° et C ont été cherchées en classe après la correction.

Plusieurs élèves ont très vite observé les variations de la longueur AP avant de

(les différentes questions du problème sont liées)

A — On considère la fonction : $x \rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$.

Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$;
Donner une représentation graphique (C) ; (C) admet-elle un élément de symétrie ?

B — L'unité de longueur est le cm.

Dans un triangle ABC , le pied O de la hauteur [AO] est entre B et C ,
$OB = 2{,}25$, $OC = 4$ et $OA = 3$.
P est un point quelconque du segment [BC] , I et J sont ses projections respectivement sur (AB) et (AC).

1) Faire une figure.
Quelle est la nature du quadrilatère AIPJ ? Justifier. Comparer les longueurs IJ et AP .

2) L'axe (BC) est orienté de B vers C , et O est l'origine de cet axe.
Soit x l'abscisse de P dans le repère d'origine O et d'unité 1cm.
A quelle valeur de x correspond le cas où P est en B ? en C ?
Comment varie la distance IJ en fonction de x , lorsque P se déplace sur le segment [BC] ? Quel est le minimum de cette distance ?

C — On suppose à présent que P décrit en entier l'axe (BC) .

I. Peut-on raisonner comme dans la partie B ?
Donner dans ces conditions les variations de IJ en fonction de x .

II. L'objectif est de comparer de différentes façons les comportements de fonctions :

$$f : x \rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 9} \qquad \text{et} \qquad a : x \rightarrow a(x) = |x| .$$

pour de grandes valeurs de x (positives ou négatives).

1) Où retrouve-t-on les nombres f(x) et $|x|$ dans le triangle AOP ?
Est-ce que cela permet de formuler une première conclusion lorsque x est très grand (positif ou négatif) ?

2) Avec la calculatrice, donner des valeurs approchées des images de 10^2 ; 10^3 ; 10^4 et 11^{10} par f et par a ; reprendre avec -10^2 ; -10^3 ; -10^4 et -11^{10}.

3) Sur les écrans graphiques, observer les graphiques pour :

$$-1000 < x < 1000 \qquad \text{et} \qquad -1 < y < 1000 .$$

Peut-on par le calcul, situer un graphique par rapport à l'autre ?

4) Formuler des observations et des conjectures à l'issue des réflexions précédentes.

rentrer dans le détail des questions, ... puisqu'elles sont détaillées ...

— était-il suffisant d'en rester à cette situation sans autre argumentation ? Non ; car notre objectif était précisément de donner du sens à la fonction ;

— valait-il mieux diminuer le nombre des questions afin d'ouvrir le problème ? Nous laissons aux spécialistes le soin d'en débattre ...

Voici quelques éléments d'analyse sur le déroulement de l'activité en question.

Prérequis :

— orthogonalité (rectangle, Pythagore, ...)

— sens de variation (rôle des fonctions de référence)

— abscisse sur un axe

— fonction valeur absolue

— savoir programmer en fonction.

Objectifs :

— sur un axe, passage de distances à des abscisses (algébriser)

— donner un sens à une étude de fonction

— élargir la réflexion sur le sens de variations

— introduction à la notion d'asymptote oblique par quatre approches différentes.

Des indications :

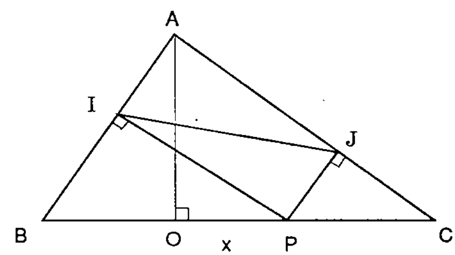
au A , pour l'étude de f , il nous est vite apparu nécessaire d'indiquer à plusieurs élèves les intervalles d'étude, comme on le fait en classe de Seconde.

Les travaux antérieurs sur le schéma de composition :

$$x \to x^2 \to x^2+9 \to \sqrt{x^2+9}$$

n'avaient apparemment pas toujours suffi pour donner l'idée de faire jouer un rôle privilégié à 0 , du fait de la fonction carré.

au B — 1°, l'argumentation avec toutes ses étapes pour justifier que AIPJ est un rectangle, et par suite que AP = IJ , est souvent bien organisée, avec cependant des longueurs par oubli du théorème des trois angles droits, ou pour le rejustifier ; l'angle droit en A est justitié avec le théorème de Pythagore.



au B — 2°, l'*algébrisation* et le *recours à la fonction* du A ont manifestement été moins bien réussis malgré l'avertissement d'une articulation entre les deux parties, et c'est vers une réflexion intuitive que les élèves se sont tournés, argumentant à peu près, bien que ne connaissant pas le théorème sur la comparaison des obliques en fonction de l'écart du pied de la perpendiculaire. Il nous a semblé nécessaire de donner, à la correction, une information sur cette dernière propriété.

Pour l'algébrisation : le passage de la distance OP à la mesure algébrique x n'a pas été sans problème : la notion de mesure algébrique a dû être reprécisée, et le codage $x = \overline{OP}$ n'a pas paru évident ;

La phase "si P est en B , alors son abscisse est x = –2,25 ", a nécessité des commentaires, et en particulier le rappel de la bijection fondamentale entre $\mathbb{R}$ et l'axe !

Une étude faite directement sur l'axe tout entier aurait probablement masqué certaines difficultés ; en plus le second tableau ci-dessous n'aurait pas été aussi enrichissant.

Pour le recours à f : il manquait, pour plusieurs élèves, une question intermédiaire du genre :

"en déduire : IJ = f(x) ".

Mais il est indéniable que c'est la géométrie qui, pour un bon nombre, a primé dans la déduction ; la classe était donc prête pour donner du sens à la fonction f.

Dans l'enquête qui a suivi, tous les élèves ont individuellement écrit que l'activité avait enrichi leur réflexion. Finalement, lors de la correction, nous avons été amenés à dresser, en les juxtaposant, les tableaux suivants :

x	–2,25		0		4
f	3,75	↘	3	↗	5

P	B		O		C
IJ	AB	↘	OA	↗	AC

Au C , rappelons que cette étude a été menée en recherche, à l'issue de la correction des questions précédentes qui avaient fait l'objet d'un contrôle donné au mois d'octobre.

L'approche de la notion d'asymptote oblique (Cf. figure page suivante) a de loin paru la partie la plus intéressante (pour plus de la moitié de la classe), probablement parce que c'était nouveau, et aussi grâce aux différentes approches du concept.

Très rapidement, les élèves qui disposent d'une calculatrice avec écran graphique (la majorité en Première Scientifique), ont eu simultanément sous les yeux les deux graphiques de f et a : ils apprennent en général cette gestion seuls et bien plus vite que la programmation d'une fonction. Nous leur avons d'abord conseillé de prendre :

$$-10 \leq x \leq 10 \quad \text{et} \quad -1 \leq y \leq -10 .$$

L'ordre des questions a donc été bousculé, mais sans dommage pour l'activité : le calcul numérique a souvent suivi le retour à la figure géométrique avec :

$$|x| = OP \quad \text{puis} \quad IJ = AP = \sqrt{x^2 + 9} .$$

Nous ne pouvons dire laquelle des trois activités a réellement précédé les autres dans les réflexions, mais il est indéniable que la difficulté majeure a été une fois de plus la valeur absolue !

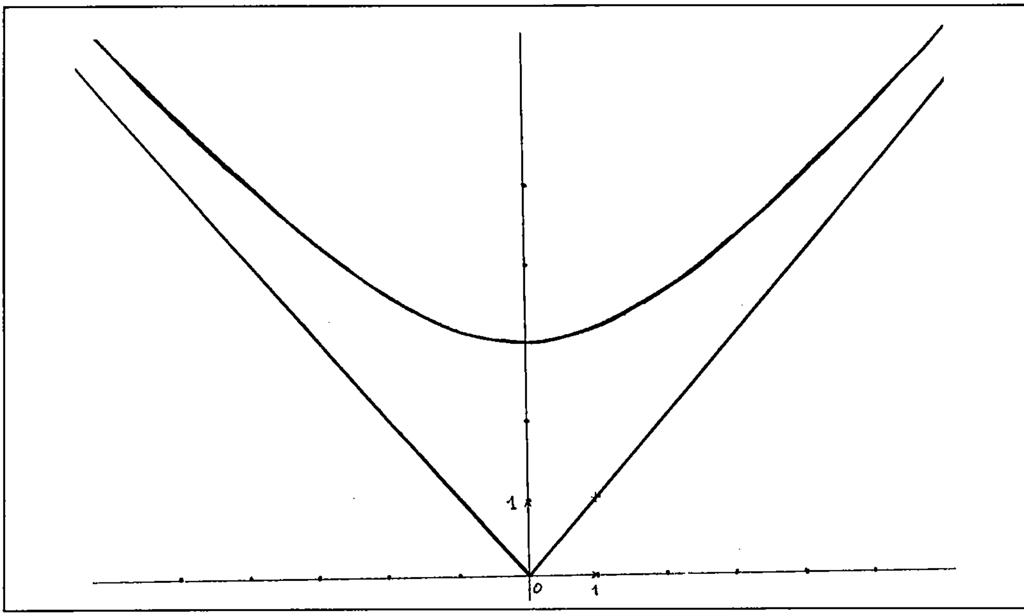
Nous pensons que pour beaucoup d'élèves, la figure géométrique lui a donné davantage de sens ... Ce n'est pas encore net pour certains ...

Nous pouvons citer à propos de ces problèmes de codage de distances sur un axe une réaction d'élève d'une classe de Seconde qui a écrit avec enthousiasme :

"BC = BO + OC = OC – OB"

avec des longueurs !

Les graphiques de f et a .



Peut-on, pour lui, s'appuyer pour le moment sur la notion de distance pour parler de valeur absolue ? Et pourtant, c'est probablement la démarche la plus persuasive ... !

A l'issue de ces approches, nous avons calculé au tableau :

$$d(x) = \sqrt{x^2+9} - |x| = \frac{9}{\sqrt{x^2+9} + |x|}$$

ce qui a tout de même provoqué des questions, mais cela nous a permis très classiquement,

— d'une part, de confirmer la place d'un graphique par rapport à l'autre,

— d'autre part, de donner une première sensibilisation à la réflexion sur les limites : "plus x est grand, plus cette distance se rapproche de zéro autant qu'on le veut".

II — Les variations d'une aire

Cette activité (Cf. page suivante) met en œuvre une figure simple sur laquelle peut se développer l'intuition : le mouvement de rotation d'un angle droit autour d'un de ses sommets est facilement perceptible, ainsi que les mouvements simultanés des points d'intersection des côtés avec les deux axes parallèles.

Un tel exercice est possible sans qu'aucun travail théorique sur les limites n'ait été déjà entrepris. C'est donc ici encore, un essai de familiarisation à la notion de limite. Il a auparavant permis d'interpréter géométriquement plusieurs résultats algébriques ou analytiques.

Prérequis :

— second degré

— utilisation de la dérivée

— notion d'extremum
— fonction de référence
Objectifs :
— exploiter des résultats de calculs
— familiarisation à la notion de limite
— majorations, minorations
— asymptote oblique

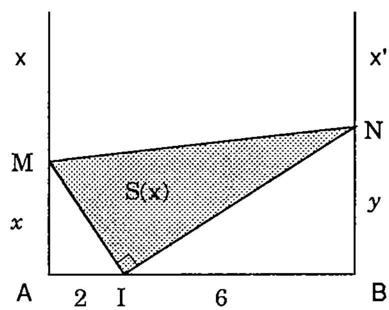
Des indications et les réactions des élèves :

Après dépouillement du questionnaire (une classe de 35 élèves), l'activité a été bien ressentie ; nous donnerons au fur et à mesure les réactions.

au 1° : la proportionnalité s'obtient avec une égalité de rapports trigonométriques ;

Dans la figure ci-contre, AB = 8 , AI = 2 , [Ax) et [Bx') sont deux demi-droites perpendiculaires à [AB] . A tout point M variable et distinct de A sur [Ax) correspond le point N de [Bx') tel que MIN soit rectangle en I .
Soit x = AM et S(x) l'aire du triangle MIN .

On se propose de faire une étude algébrique du comportement de S(x) *lorsque* M *varie.*



1) Les côtés des triangles MAI et IBN sont-ils proportionnels ? Etablir de deux façons que $S(x) = 3(x + \frac{4}{x})$

2) L'aire peut-elle être égale à 9 ? à 13 ? à 15 ? à 18 ? Faire les figures correspondantes.

3) Dessiner avec soin sur [Ax) l'ensemble des points M tels que : $13 \leq S(x) \leq 15$

4) Etudier les variations de S(x) lorsque M varie : en déduire *pour quelle position de* M *l'aire est minimum* et préciser cette valeur minimum. Faire la figure correspondante.

Donner une représentation graphique de S pour $0,5 \leq x \leq 6$ et retrouver graphiquement les résultats des questions 2° et 3°.

5) *Lorsque* M *est très près de* A *:*
— étudier géométriquement le comportement de N ; de S(x) ;
— où se trouve N lorsque $AM < 10^{-5}$? $AM < 10^{-10}$ (minorer BN) ?
— peut-on avoir $S(x) > 10^{20}$?

6) *Lorsque* M *s'éloigne "de plus en plus" :*
— étudier géométriquement le comportement de N ; de S(x) ;
— soit $d(x) = S(x) - 3x$; étudier le signe de S(x) ;
Choisir x pour avoir $d(x) < 10^{-5}$; $d(x) < 10^{-10}$.

La particularité du produit de x par $\frac{4}{x}$ n'a-t-elle pas un rapport avec certains résultats ?

7) Dans un repère du plan, tracer la droite d'équation y = 3x , et compléter la représentation graphique de la fonction S (pour x > 0) en tenant compte du résultat précédent.

en fait, nous n'avons besoin que des côtés des angles droits :

tan $\widehat{AMI}$ = tan $\widehat{NIB}$ donc $\frac{AI}{AM} = \frac{BN}{BI}$, $\frac{2}{x} = \frac{BN}{6}$; par suite $BN = \frac{12}{x}$; on peut donc calculer l'aire du trapèze, de AMI et BNI, et conclure.

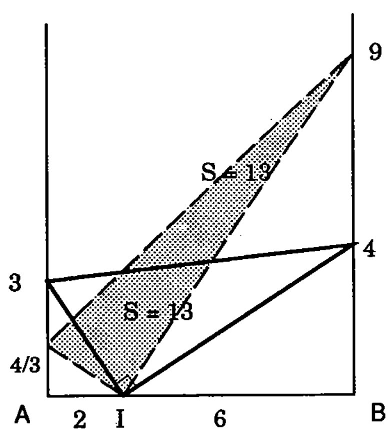
La deuxième méthode consiste à calculer d'abord le produit $IM^2.IN^2$ après application du théorème de Pythagore .

45% des élèves reconnaissent avoir eu des difficultés pour parvenir au résultat.

aux 2° et 3° : les équations et inéquations se ramènent au second degré et permettent de faire chaque fois une interprétation géométrique :

— l'aire ne peut valoir 9 (D < 0) ;

— pour S(x) = 13, x = 3 ou x = 4/3 ;



— pour S(x) = 15 , x = 1 ou x = 4 ;

— pour $13 \le S(x) \le 15$ l'ensemble des valeurs pour x est $[1 ; 4/3] \cup [3 ; 4]$;

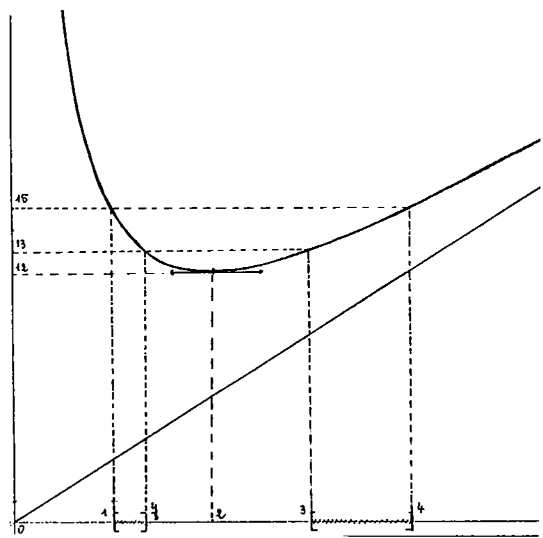
— pour S(x) = 18, $x = 3 + \sqrt{5}$ ou $x = 3 - \sqrt{5}$.

au 4° : l'aire minimum est atteinte pour x = 2 ; c'est : S(2) = 12 .

Les différents résultats des questions précédentes se retrouvent graphiquement.

Pour l'inéquation double, la lecture est immédiate : les élèves sont satisfaits de pouvoir donner du sens à leurs activités sur le second degré.

A ce niveau, les études aux limites ne s'imposent pas encore ; d'où une première approche graphique pour $0,5 \le x \le 6$.



aux 5° et 6° : l'approche géométrique donne seulement des indications mais elle facilite la réflexion analytique.

Pour bon nombre d'élèves (les 2/3 de la classe), les problèmes de limite peuvent prendre de la signification à travers une observation géométrique.

L'aide du graphique obtenu avec les calculatrices actuelles a été cependant jugée efficace par davantage d'élèves (80%).

Une perception des limites obtenues directement à partir de l'écriture algébrique de la fonction ne semble pas très aisée : seulement 40% des élèves, dont plusieurs redoublants.

au 5° : si $0 < x < 10^{-5}$, alors $\frac{12}{x} > 12.10^5$ et par suite $S(x) > 12.10^5$; plus généralement, on peut penser que l'aire tend vers l'infini lorsque x tend vers zéro. L'autre calcul, plus proche de la définition classique permet de faire comprendre que l'on peut montrer que S(x) peut dépasser n'importe quelle valeur ; la difficulté pour obtenir une condition suffisante, par ex. $x \in]\,0\,;15.10^{-20}\,[$, en commençant avec $x \in]\,0\,;1\,[$, a été exposée aux élèves sans recherche de leur part ; à l'issue de ces explications, ils semblent avoir une nouvelle perception de l'idée de l'infini...

Une réaction à noter : "je croyais que puisque IN croît quand IM décroît, alors l'aire S(x) était constante".

En y adjoignant des expressions liées à la présentation géométrique du comportement de N lorsque M tend vers A, il y a à ce niveau, au moins *six façons* de s'exprimer dans un langage au départ élémentaire et imagé, et finalement conforme à ce que l'on est en droit d'attendre en début de Terminale (vu le contexte, il ne semble pas pour le moment opportun de rappeler chaque fois que les objets numériques sont positifs) :

— "lorsque M est de plus en plus près de A, N s'éloigne de plus en plus"

— "lorsque M tend vers A, N tend vers l'infini"

— "lorsque x tend vers 0, y tend vers l'infini"

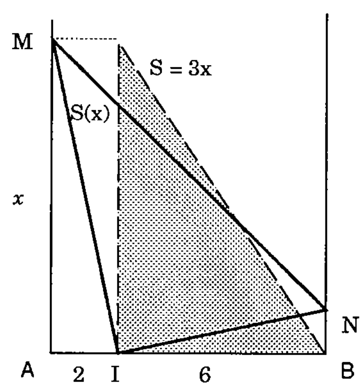
— "lorsque x tend vers 0, $\frac{12}{x}$ tend vers l'infini"

— Le codage " $\lim\limits_{x \to 0} \frac{12}{x} = +\infty$ "

— à partir des exercices avec les puissances de 10 : "quel que soit un nombre B positif, il est possible de déterminer un nombre A tel que si $0 < x < A$, alors $(12/x) > B$.

Sans aucune sensibilisation préliminaire, la classe a été très attentive à cet enchaînement de propositions.

au 6° : pour avoir $d(x) < 10^{-5}$, il suffit de prendre $x > 12.10^{-5}$; plus généralement, la distance graphique d(x), entre le point de la courbe et celui de la droite d'équation y = 3x, tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini ; la figure ci-dessous permet de visualiser le triangle d'aire 3x dont le triangle MIN est "de plus en plus proche". Ce dessin n'a toutefois pas amélioré plus de la moitié des compréhensions. Serait-il plus efficace de faire plusieurs dessins avec x de plus en plus grand ?...



Les élèves se sont bien investis dans la recherche, trouvant souvent le point de départ plus concret que d'habitude. Une fois mise en place la formule, la géométrie a été rarement une cause de blocage ; au contraire. Il reste que pour plusieurs, il semble inutile de raisonner sur des problèmes de limite ... !

III — Un angle variable dans l'espace

L'idée de la première partie de cette activité provient de l'observation d'une classe de 1ère S. De nombreux élèves pensaient à tort que la section du parallélépipède par le plan (voir figure de l'encadré ci-dessous) était nécessairement un rectangle, quelle que soit la position des points sur leur arêtes respectives.

La seconde partie provient d'une question : "Comment varie l'angle du parallélogramme ?". J'ai alors été obligé de réduire le nombre de paramètres, mais la réflexion reste riche.

Première Partie : Parallélépipède rectangle et projection de l'angle droit

prérequis :

— Théorème de Pythagore
— symétrie centrale ou calcul vectoriel
— notion de parallélépipède rectangle.

objectifs :

— approfondissement de connaissances sur le parallélépipède rectangle
— on ne peut pas conjecturer sur les angles en perspective
— recherche du théorème de projection de l'angle droit (sans le produit scalaire).

A — Dans le parallélépipède rectangle ABCDA'B'C'D' ci-contre :

$AA' = AD = 4$ et $AB = 3$.

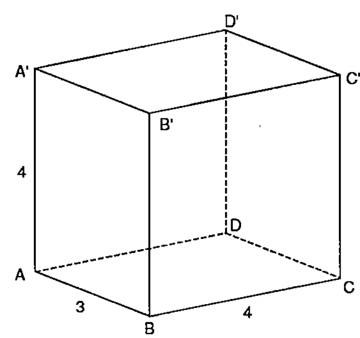
Soient P et Q définis par :

$$\vec{AP} = \frac{1}{4}\vec{AA'} \quad \text{et} \quad \vec{CQ} = \frac{1}{2}\vec{CC'} .$$

Le plan (BPQ) coupe la droite (DD') en R .

1) Situer R sur cette droite.

2) Le quadrilatère BPRQ est-il un rectangle ?



B — *Généralisations :*

On extrait la sous-figure AA'BCC' (c'est un tronc de prisme) ; les points P et Q sont quelconques sur les demi-droites [A A') et [C C') .

On pose $AP = a$ et $CQ = b$.

1) Calculer BP^2 , BQ^2 et PQ^2 en fonction de a et b : on pourra utiliser S quatrième sommet du rectangle ACQS .

2) Comment choisir a et b pour que l'angle $\widehat{PBQ}$ soit droit ?

Retour à la figure complète de A : Comment choisir P et Q pour que BPRQ soit un rectangle ?

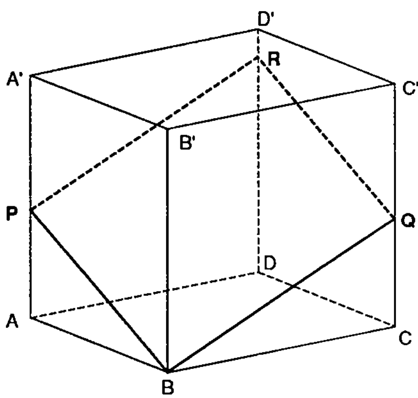
3) Reprendre la question B–2° lorsque P est sur la demi-droite [Ax) de (AA') qui ne contient pas le point A' , et Q sur le segment [CC'] .

Quel résultat peut-on formuler à l'issue de ces généralisations ?

Des indications :

A - 1° : La section plane BPRQ est un parallélogramme (démonstration classique) et finalement :

$$\vec{DR} = \vec{AP} + \vec{CQ}$$



2) L'application du théorème de Pythagore dans différents triangles rectangles permet de conclure que $PB^2 = 10$, $QB^2 = 20$ et $PQ^2 = 26$; donc que : $PB^2 + QB^2 \neq PQ^2$, donc que le triangle PBQ n'est pas rectangle, et par conséquent le parallélogramme BPRQ n'est pas un rectangle, avec la contraposée du même théorème de Pythagore (vocabulaire à usage du professeur).

B) Quand l'angle $\widehat{PBQ}$ est-il droit ?

On a : $BP^2 = 9 + a^2$, $BQ^2 = 16 + b^2$ et $PQ^2 = 25 + (a - b)^2$.

Ce calcul correspond en fait à deux situations (S entre A et P , ou P entre A et S) et les élèves apprécient l'unification à l'aide de la distance $SP = |a - b|$.

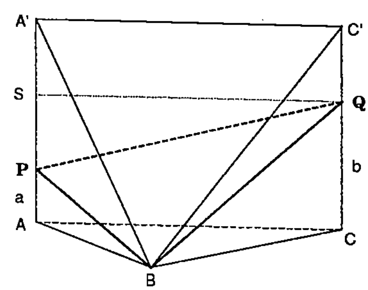
Dès lors $BP^2 + BQ^2 = PQ^2$ équivaut à :

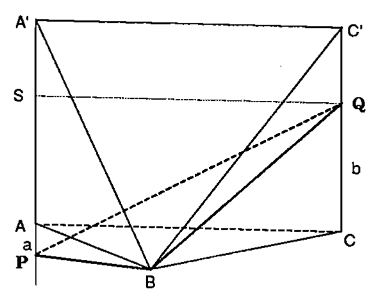
$$ab = 0,$$

c'est-à-dire : ($a = 0$ ou $b = 0$),

ou encore : ($P = A$ ou $Q = C$).

Il est donc nécessaire et suffisant que l'angle droit ait un côté dans le plan de projection.





Au 3° , avec $BP^2 = 9 + a^2$, $BQ^2 = 16 + b^2$ et $PQ^2 = 25 + (a + b)^2$, on arrive aux mêmes conclusions, ce qui incite à une nouvelle généralisation pour P.

Ainsi, la première partie permet de sensibiliser à la condition pour qu'un angle *droit se projette orthogonalement suivant un angle droit.*

Note : On pourrait généraliser le problème : "quand le parallélogramme est-il un rectangle ?", au cas où le parallélépipède n'est plus rectangle.

Seconde partie (Cf. ci-contre) :

Etude des variations de l'angle $\widehat{PBQ}$

Nous avons conservé les dimensions du parallélépipède et fixé Q : $\vec{CQ} = \frac{3}{4}\vec{CC}$. D'autre part, ici encore, une algébrisation de la position de P sur (AA') permet d'unifier le calcul.

prérequis :

— distance de deux points sur un axe (valeur absolue)

— cosinus : sens de variations ; calcul

— sensibilisation à $\cos^{-1}$: touche machine ; variations

— sens de variation d'une fonction (avec ou sans dérivée)

— programmer une fonction sur la calculatrice (calcul d'angle).

objectifs :

— algébriser une situation

— motiver l'étude d'une fonction irrationnelle

— exploiter le sens de variation de *cos* sur [0° ; 180°]

— donner du sens à un problème de limite ; en déduire un encadrement pour un angle.

L'objectif de cette seconde partie est d'observer, dans un cas particulier, les variations de l'angle $\widehat{PBQ}$ *lorsque* P *décrit la droite* (AA') *en entier.*

On fixe Q : CQ = (3/4).CC' et on appelle x l'abscisse de P sur l'axe (AA'), d'origine A, orienté de A vers A', et d'unité 1.

Soit β la mesure de l'angle saillant $\widehat{PBQ}$ (en degrés).

1) Exprimer BQ^2, BP^2, PQ^2 et $\cos\beta$ en fonction de x.

Calculer β dans les différents cas suivants :

$$\vec{AP} = \mathbf{k}\,\vec{AA'},$$

avec : **k** = 1/4 ; – 1/4 ; 1 ; – 1 ; 8 ; 20.

2) soit $f : x \rightarrow \dfrac{3x}{5\sqrt{9+x^2}}$.

Démontrer que pour x positif, $f(x) = \dfrac{3}{5\sqrt{1+\dfrac{9}{x^2}}}$.

en déduire l'écriture de f(x) lorsque x est négatif.

3) a) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

b) Quel est le comportement de f lorsque x prend des valeurs très grandes ? Faire le calcul pour 10^2, -10^2, 10^3 et -10^3.

4) Comment varie β lorsque x décrit $\mathbb{R}$?

Dresser un tableau des variations de β en fonction de x.

Peut-on préciser l'ensemble-image ?

5) Quel rapport y a-t-il entre ces différents résultats et les réflexions de la question B de la première partie ?

des indications :

1°) $BQ^2 = 25$, $BP^2 = 9 + x^2$.
Pour PQ , l'algébrisation sur l'axe permet d'écrire, quel que soit x :

$$PQ^2 = 25 + (3 - x)^2 ,$$

après calcul de SP , comme au B de la première partie.

Avec le théorème de Pythagore généralisé :

$$\cos \beta = \frac{3x}{5\sqrt{9 + x^2}} .$$

C'est l'expression de f (x) , dont la programmation va faciliter les calculs ; ce sera encore plus rapide avec $\cos^{-1}(f(x))$.

Nous avons préféré les degrés qui donnent plus de sens aux mesures :

x	- 4	- 1	1	4	32	80
β °	118	101	79	61	53,3	53,16

Apparaît déjà l'idée de la décroissante de β . Il reste à la confirmer ...

2°a) La justification de $f(x) = \dfrac{3}{5\sqrt{1 + \dfrac{9}{x^2}}}$

pour $x \geq 0$, n'a pas été trop mal réalisée ; par contre le changement de signe pour $x \leq 0$ a provoqué une discussion : le recours à la propriété "f est impaire" semble avoir convaincu ... Nous avons laissé aux élèves l'initiative du choix de la formule, et ensuite dégagé la supériorité de la seconde forme.

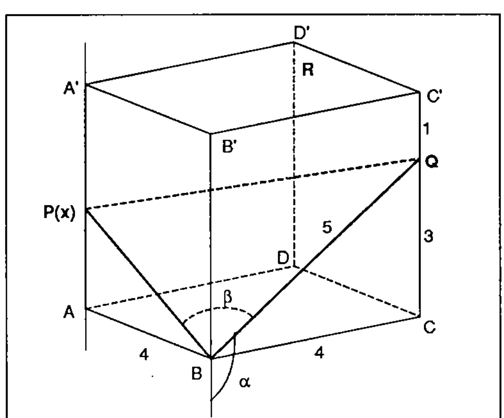
au 3°a , d'une part, il est seulement nécessaire d'étudier f sur $\mathbb{R}^+$ et sans dérivation : étant donné que x n'apparaît qu'une seule fois (on a une forme canonique) ; c'est déjà faisable en Seconde.

au 3°b , d'autre part, la formule permet de conjecturer que la limite est 0,6 pour x très grand positif (ce que la calculatrice confirme, sans difficultés pour les élèves), et – 0,6 pour x négatif, par symétrie.

4°) il a fallu refaire la leçon sur la fonction cosinus, mais comme une activité précédente sur deux fonctions homographiques réciproques avait permis de sensibiliser au résultat sur les sens de variation, plusieurs élèves ont trouvé que $\cos^{-1}$ est décroissante sur [- 1 ; 1] .

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & -\infty & & 0 & & +\infty \\
\hline
f & -0,6 & \nearrow & 0 & \nearrow & 0,6 \\
\hline
\beta & \alpha & \searrow & 90 & \searrow & 180 - \alpha
\end{array}$$

Après la leçon sur la loi de composition des applications, nous avons profité de l'occasion pour proposer aux élèves qui ont une calculatrice de programmer le graphique de : $x \rightarrow \cos^{-1}(f(x))$.



Enfin les limites 0,6 et – 0,6 ont une signification géométrique : ce sont les cosinus des angles de la demi-droite [BQ) avec les deux demi-droites d'origine B portées par (BB') ; ce qui peut s'interpréter en disant que P est rejeté à l'infini.

Il y donc eu un va-et-vient entre étude analytique et graphique avec toujours en tête le problème géométrique : *cet angle* $\widehat{PBQ}$ *dont la mesure* β *varie de* $\alpha \approx 127°$ *à* $180° - \alpha \approx 53°$ *et qui est droit pour* $x = 0$.

CONCLUSION

Les élèves de Première se sont bien investis et leurs questions prouvent que les thèmes géométriques leur ont souvent donné envie d'entrer dans l'exercice : une figure attire l'attention. Mais il est difficile de dire que c'est seulement le point de départ qui a stimulé ensuite : c'est plutôt le va-et-vient entre les différents outils disponibles qui est dynamique. Par la diversité des approches sur un même sujet :

— observation d'une figure,

— conjecture à la calculatrice,

— représentation graphique,

il est possible de donner davantage de sens et d'attrait aux problèmes d'Analyse. D'un point de vue de la création d'énoncés, il semble intéressant pour l'enseignant de rechercher quels types de situations géométriques sont propices à l'apparition de fonctions simples à étudier en Seconde, en Première ou en Terminale. La représentation graphique, elle-même constitue d'ailleurs une seconde situation géométrique associée au même problème. Et peu importe alors que la fonction soit un peu plus compliquée que d'habitude puisqu'on a un réel objectif.

Dans cette dynamique, les techniques et les méthodes (fonctions de référence, calculs algébriques, encadrements, comparaisons et majorations, limites...) sont alors motivées, appréciées, recherchées, améliorées, comparées...

Mais en plus on fait de la Géométrie, de la Trigonométrie... ! Il est important que chacun trouve une motivation quelles que soient ses préférences.

Avec l'expérience ainsi acquise, l'Analyse pourra ensuite elle même dynamiser des réflexions. J'ai le sentiment d'avoir provoqué un intérêt indéniable pour des études de fonctions, à travers de réelles activités.