DES MATHS AVEC UNE FEUILLE DE PAPIER LES FORMATS DITS « NORMALISES »

Francis REYNES
Collège Grand Air, Arcachon

Quoi de plus commun que ces feuilles de papier que nous utilisons quotidiennement pour notre usage personnel ou professionnel ? Ces feuilles de format dit "A4" et dont les dimensions nous sont familières et pourtant mal connues : 21 cm sur 29,7 cm. Pourquoi ces mesures, ces nombres "qui ne tombent pas juste" ? Je vends la mèche : parce qu'il y a de la Mathématique là-dedans ! Et bien plus qu'on ne pourrait le soupçonner à première vue... En exagérant à peine, je pourrais affirmer qu'il y a là, en puissance, un quart du programme de troisième. De plus, suivant l'approche que l'on choisit, on peut proposer cette activité de la quatrième à la seconde. Pour l'exposer, je choisirai le niveau troisième afin de faciliter les adaptations.

Cette activité est une excellente opportunité pour :

— réinvestir un certain nombre de concepts fondamentaux,

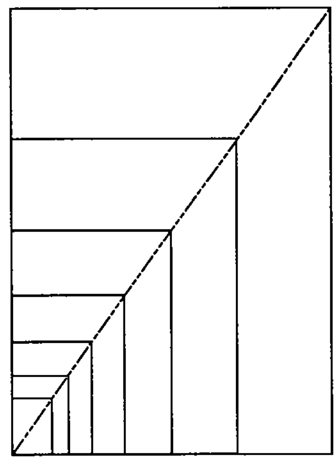
— procéder à des "changements de cadre",

— mettre en évidence un fonctionnement de la dialectique concret-abstrait ou, plus précisément, objet physique-modèle mathématique,

— montrer l'intérêt de la formalisation et les problèmes de traduction qu'elle soulève.

En ce qui concerne son mode de déroulement, elle doit être menée comme une sorte de recherche semi-dirigée ou de travail accompagné, car il est essentiel que le professeur pointe certaines étapes, certains processus.

PREMIERE ACTIVITE



Prendre une feuille A4. La couper en deux en divisant par 2 sa plus grande dimension. Garder une moitié. Avec l'autre, itérer le processus. Recommencer ainsi cinq ou six fois. Empiler tous les morceaux obtenus sur une feuille A4, en mettant en coïncidence un coin, les longueurs et les largeurs.

Lorsque ces manipulations sont effectuées avec soin et précision, on obtient un très bel alignement avec les quatrièmes coins des différents morceaux.

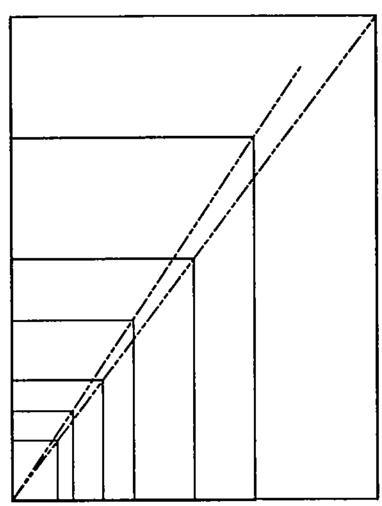
Question : est-ce hasard ou nécessité ?

Laisser la question ouverte et en poser une autre :

Si l'on prend une feuille d'une autre format, par exemple une feuille de papier à dessin au format "standard" 24 sur 32, et que l'on recommence la même manipulation, obtiendra-t-on encore un alignement ?

L'écrasante majorité des élèves répond très spontanément "oui" !

DEUXIEME ACTIVITE



Comme la première, mais avec une feuille de formant "standard" : 24 cm sur 32 cm.

Surprise assez générale :

"ça ne marche plus" !

MAIS....

Mais on peut constater *deux* alignements.
Mais une fois sur deux seulement.

Question : pourquoi ?

Remarque : on peut éventuellement recommencer avec une feuille de copie "petit format" : on constatera la même situation.

Il convient, à ce moment, de dépasser l'anecdotique, de rechercher le "pourquoi mathématique", et de bien marquer cette "rupture" (cf. Bachelard...). Il faut *modéliser*, puis opérer sur le modèle. Une feuille de papier est un objet physique, pas un "rectangle" ! C'est – et ce n'est que – son modèle mathématique qui est une rectangle. On doit être clair sur ce point pour que la suite soit pleinement compréhensible et profitable.

Soit donc un rectangle de dimensions a et b, avec a < b, modèle mathématique d'une feuille de papier... "rectangulaire". **Alors** une moitié de feuille sera modélisée par un rectangle de dimensions b/2 et a, et un quart par un rectangle de dimensions a/2 et b/2.

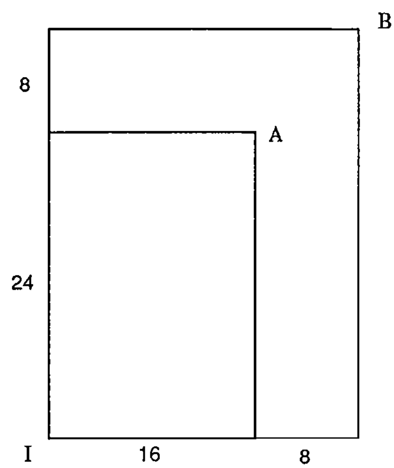
Un raisonnement facile permet d'établir que le rectangle et son quart produisent obligatoirement un alignement des sommets "diagonalement opposés".[1]

Premier résultat : l'alignement une fois sur deux est donc "normal" puisqu'il est expliqué, *prévu* par le modèle. On a donc un premier alignement avec le rectangle entier, son quart, le quart de ce quart, etc., et un deuxième avec la moitié du rectangle, son quart, le quart de ce quart, etc. **Que se passe-t-il à la première activité ? Les deux alignements n'en font plus qu'un seul. Pourquoi ?**

Ici encore, il faut dépasser l'aspect divertissant ou surprenant du phénomène pour comprendre que **le nœud de la question réside dans le passage d'une feuille à sa moitié, donc d'un rectangle à sa moitié**. En effet, après cela il n'y a que des itérations à effectuer ; donc nous pouvons revenir au modèle :

[1] *Remarque :* le mot "alignement" est *évidemment* employé ici dans son acception mathématique.

1°) Soit un rectangle de 24 cm sur 32 cm. Sa moitié : 16 cm sur 24 cm.



La question de l'alignement de trois points peut être traitée de plusieurs manières : angles, distances, vecteurs ...

Il semble opportum de faire intervenir ici le concept de *coefficient directeur* : d'une part c'est une notion assez intuitive, une **représentation** sur laquelle on peut s'appuyer, d'autre part c'est un concept très utile et important à la fois en soi et ... dans les programmes. Enfin, il permet d'opérer un "changement de cadre" du géométrique au graphique.

Dans la suite le coefficient directeur d'une droite D sera noté "c.d.D.".

De I à A, on monte de 24 et on avance de 16, donc : c.d.(IA) = 24/16 = 1,5 .

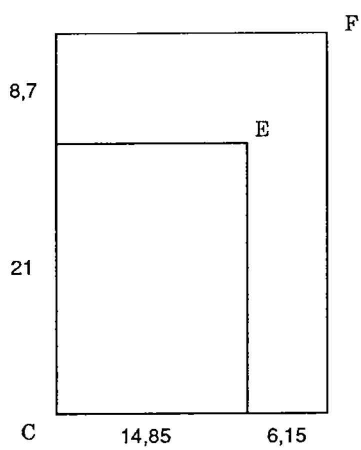
De A à B, on monte de 8 et on avance de 8, donc : c.d. (AB) = 8/8 = 1 .

Autrement dit, quand on avance de 1 : de I à A on monte de 1,5 et de A à B on monte de 1. Les points I , A , B ne sont donc pas alignés. La théorie confirme l'observation ; mieux : elle l'explique.

Remarque : Il n'est pas interdit d'employer aussi une autre méthode ...

Par exemple : $IA = 8\sqrt{13}$, $AB = 8\sqrt{2}$; et comme $IB = 40$, il reste à comparer IB et IA + AB ... (bon prétexte pour faire un peu de calcul avec les irrationnels !).

2°) Soit un rectangle de 21 cm sur 29,7 cm. Sa moitié : 14,85 cm sur 21 cm.



De C à E , on monte de 21 et on avance de 14,85 , donc : c.d. (CE) = 21/14,85 .

De E à F , on monte de 8,7 et on avance de 6,15 , donc : c.d. (EF) = 8,7/6,15 .

Petit travail sur les quotients :

21/14,85 = 7/4,95 = 14/9,9 = 140/99

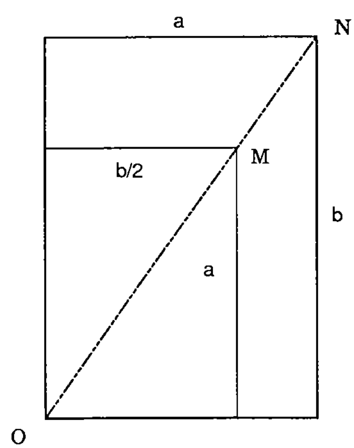
8,7/6,15 = 87/6,15 = 29/20,5 = 58/41

c.d. (CE) = 41 × 140/(41×99) = 5740/4059

c.d. (EF) = 99 × 58/(99×41) = 5742/4059

Mais $5740 \neq 5742$ **donc C , E , F ne sont pas alignés** ! La théorie **contredit l'observation** ! Que se passe-t-il ? Que faut-il remettre en cause : le *modèle* ou l'*expérience* ? Il est crucial de mettre en lumière ce conflit pour pouvoir expliciter la dialectique concret-abstrait, séparer les niveaux, comprendre les processus qui les relient, situer la "rigueur" mathématique et l'idéalité de ses objets (avec pour conséquence le statut du signe " = "), questionner la "réalité" physique et révéler ses contingences.

Pour dépasser cette contradiction, il faut revenir au modèle et se poser une question "théorique" : soit un rectangle de dimensions a et b (a < b), et le rectangle moitié de dimensions b/2 et a. Est-il possible d'obtenir un alignement, et, si oui, à quelle condition ?



Il est plus simple, dans le cas présent, de comparer les coefficients directeurs de

(OM) et de (ON), qui sont respectivement a/(b/2) et b/a. Leur égalité est donc équivalente à $b^2 = 2a^2$, ou encore, puisque l'on opère dans $\mathbb{R}_+$:

$$b = \sqrt{2} \times a \text{ , ou } b/a = \sqrt{2} .$$

Conclusion à institutionnaliser.

Conséquence : si $a = 21$ et $b = 29{,}7$, alors $b/a = 29{,}7/21 = 99/70$, et comme $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, il diffère nécessairement de 29,7/21 et il n'y a donc pas d'alignement. **Donc le modèle est pertinent**. Alors, *retour à la "réalité" :*

Il est et il sera toujours impossible de fabriquer un objet dont la mesure d'une dimension soit "exactement" 21 cm. Donc c'est *a fortiori* impossible pour $\sqrt{2} \times 21$ cm !

Mais alors pourquoi a-t-on si bien vu cet alignement lors de la première activité ?! Pour "redescendre" au domaine physique, à la feuille de papier "A4", il faut quantifier l'imprécision par une *"leçon d'à peu près"* (G.Th. Guilbaud). Prenons donc une calculatrice et calculons une valeur approchée de $\sqrt{2} \times 21$; on lit : 29,698485 . L'écart avec 29,7 est donc de 0,001515 .

L'écart entre 29,7 cm et $\sqrt{2} \times 21$ cm est donc inférieur à 0,02 mm ! Est-il possible d'apprécier à l'œil nu deux centièmes de millimètre ? Certes non. Il est donc parfaitement normal que l'on ait vu un très bel alignement, car les dimensions de ces feuilles A4 ont été particulièrement bien choisies pour cela. Leur quotient fournit une remarquable approximation rationnelle de $\sqrt{2}$: une calculatrice nous donne

$$29{,}7/21 \approx 1{,}4142857$$

et $$\sqrt{2} \approx 1{,}4142136 .$$

La fraction 29,7/21 (= 99/70) est donc une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ à *moins d'un dix-millième près.*

Point de vue complémentaire, théorique et pratique.

Lorsqu'on effectue un agrandissement (une homothétie de rapport supérieur à 1) ou une réduction (homothétie de rapport positif et inférieur à 1), alors chaque dimension est multipliée par le même nombre ("coefficient" ou "rapport"). Désignons par "k" ce nombre.

Si l'agrandissement double l'aire, cela signifie que $k \times k = 2$, autrement dit que :

$$k = \sqrt{2} .$$

Les formats "A" permettent précisément les agrandissements et réductions de ce type : doubler l'aire ou la diminuer de moitié. En effet : si un rectangle a pour dimensions a et $\sqrt{2} \times a$, alors le rectangle agrandi d'aire double aura pour dimensions $\sqrt{2} \times a$ et $2 \times a$; par conséquent le rapport de ses dimensions ne change pas. (Idem pour une réduction de moitié).

D'où le 141 % affiché par une photocopieuse pour passer de A4 en A3 ! Ainsi que le 71 % pour passer de A3 en A4 , ou de A4 en A5 : $1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$.

Résumons et faisons le point : Pour chaque format "An", le rapport longueur/largeur est proche de $\sqrt{2}$ de façon que An+1 soit un agrandissement de An d'aire double (ou presque) donc avec un coefficient lui aussi proche de $\sqrt{2}$. Cela explique le "quasi-alignement" constaté au début (équation "théorique" de la droite des alignements : $y = \sqrt{2}x$), et donc le pourquoi du **rapport** des dimensions, mais pas encore ces dimensions elles-mêmes.

Revenons au concret : L'aire d'une feuille A4 est, en cm^2 : $21 \times 29{,}7 = 623{,}7$. Chaque fois que l'on passe au numéro précédent, l'aire double, et l'on va ainsi jusqu'au format A0 : l'aire de A0 est donc 2^4 fois celle de A4 .

On calcule : $16 \times 623{,}7 = 9979{,}2$.

On constate ainsi que $10\,000 - 9979{,}2 < 21$. Autrement dit, **à deux millièmes près**, l'aire de A0 est très proche de 1 m^2 .

Une feuille A4 est fabriquée par découpage d'une feuille A0 : cette opération produit inévitablement des "chutes" qui font perdre de la précision. En fait l'aire de A0 a été choisie de 1 m^2 . Avec cette condition supplémentaire, on va pouvoir déterminer les dimensions du format A0, puis celles de n'importe quel format "A" ...

Retour au modèle : On a donc deux "contraintes" :

1) Une contrainte technique, qui se traduit, pour le modèle, par la condition : $b = \sqrt{2} \times a$,

2) Un choix de l'aire (il y en a d'autres possibles ; on le verra) qui se traduit pour le modèle, si l'on prend pour unité le mètre, par la condition : $a \times b = 1$.

La résolution de ce "système" offre un bel exemple d'utilisation de la propriété de substitution de l'égalité :

Le **remplacement** de b par $\sqrt{2} \times a$ dans la deuxième égalité donne : $a \times \sqrt{2} \times a = 1$, donc $a^2 = 1/\sqrt{2}$, donc $a = 1/\sqrt{\sqrt{2}}$.
Soit : $b = \sqrt{\sqrt{2}}$.

Retour au concret : Valeurs approchées fournies par une calculatrice :

$a \approx 0{,}8408964$ $\qquad$ $b \approx 1{,}1892071$

Valeurs approchées, en millimètres :

à 0,2 mm près : 841 et 1189 .

Ce sont, effectivement, les valeurs dites "normalisées" ! En divisant chaque dimension par 4 on retrouve celles du format A4 .

Prolongements possibles

1) Les formats "B"

La contrainte d'agrandissement-réduction reste la même, mais le choix de l'aire de B0 est de $\sqrt{2}$ m^2 .

Alors on trouve $a = 1$ et $b = \sqrt{2}$.

Valeurs approchées, en mm : 1000 et 1414 .

Relations entre formats "A" et "B" :

— B0 est un agrandissement de A0 avec le coefficient $\sqrt{\sqrt{2}}$. Il en est donc de même avec Bn et An .

— aire de B0 = $\sqrt{2} \times$ aire de A0

donc : aire de Bn = $\sqrt{2} \times$ aire de An

comme : aire de An-1 = $2 \times$ aire de An ,

on en déduit que :

$$\frac{\text{aire de Bn}}{\text{aire de An}} = \frac{\text{aire de An-1}}{\text{aire de Bn}}$$

autrement dit : l'aire de Bn est la *moyenne géométrique* de l'aire de An et de l'aire de An-1.

2) Les formats "C"

L'aire de C0 est de $\sqrt{\sqrt{2}}$ m^2. On peut alors déterminer les dimensions de C0, les relations entre formats "C" et "B" puis "C" et "A" ... Nous ne nous étendrons pas : le principe est toujours le même.

Deux précisions pour conclure

1) Remarque méthodologique :

Cette activité met en évidence l'importance pratique du nombre $\sqrt{2}$. Elle n'en constitue pas pour autant le meilleur moyen de le découvrir. En effet, pour pouvoir à la fois bien séparer le modèle mathématique, sur lequel on raisonne, de l'objet "feuille de papier" qu'on manipule, et relier ces deux niveaux conceptuels, il est indispensable de comprendre que $29,7/21 \neq \sqrt{2}$. Il faut donc avoir déjà rencontré le nombre $\sqrt{2}$, être convaincu de son existence, avoir réalisé qu'il est de "nature irrationnelle".

2) Application "esthético-économique" :

Lorsqu'on veut photocopier un document, il est fréquent qu'il ne soit pas d'un format normalisé (page de livre, par exemple). Alors le résultat n'est pas très agréable à l'œil, et en outre il engendre un certain gaspillage. Voici comment minimiser ces deux inconvénients (prenons l'exemple d'une page qui "rentre" dans un format A4) :

— Se munir d'un triple décimètre, d'un cutter, d'une calculatrice.

— Faire un photocopie "normale" (coefficient 100 %)

— Eliminer le plus possible de marge superflue en réalisant, pour le rectangle qui va rester, un rapport longueur/largeur voisin de 1,41. Pour ce faire, le plus simple est de voir quelle dimension on peut le moins diminuer, de la mesurer et d'en déduire l'autre en multipliant ou divisant (suivant que c'est la largeur ou la longueur) par $\sqrt{2}$ (ou 1,414) : soit L la longueur ainsi obtenue, en cm.

— Déterminer le coefficient de réduction du document ainsi découpé en format A5 en calculant 21/L et en arrondissant à 0,01 près. Ce coefficient est rarement inférieur à 0,75, ce qui fait que la réduction que l'on va obtenir restera parfaitement lisible.

— Faire alors deux photocopies du document découpé avec le coefficient ci-dessus.

Attention : Il faut au préalable changer la cassette de chargement du papier de façon que les feuilles passent dans le sens longitudinal : ainsi vous n'aurez plus de découpage à faire : seulement un pliage.

— Remettre le coefficient à 100 %, puis remettre la cassette de chargement ordinaire. Juxtaposer les deux photocopies A5 obtenues : voici votre nouvel original. A chaque tirage vous réaliserez dorénavant 50 % d'économie ! Et c'est plus joli ...

Par exemple, si on choisit une largeur de 17,8, comme $\sqrt{2} \times 17,8 \approx 25,2$, on découpe un rectangle de 17,8 sur 25,2. Enfin, puisque $21/25,2 \approx 0,83$, on fait une réduction à 83 % ...

A vous de jouer, maintenant, et ... bonne optimisation !

FORMATS "ISO" INTERNATIONAUX

INTERNATIONAL STANDARD ORGANISATION
(ORGANISATION INTERNATIONALE DE NORMALISATION)

SÉRIE PRINCIPALE A		SÉRIE ADDITIONNELLE B		SÉRIE ADDITIONNELLE C	
Administation - dessin technique		Affiches - travaux exceptionnels		Enveloppes - Papeterie	
Surface du format de base 0 : 1m^2		Moyens géométriques entre les formats de la série A			
Désignation	Dimension en mm	Désignation	Dimension en mm	Désignation	Dimension en mm
1 A 0	1682 x 2378				
2 A 0	1189 x 1682				
A 0	841 x 1189	B 0	1000 x 1414	C 0	917 x 1297
A 1	594 x 841	B 1	707 x 1000	C 1	648 x 917
A 2	420 x 594	B 2	500 x 707	C 2	458 x 648
A 3	297 x 420	B 3	353 x 500	C 3	324 x 458
A 4	210 x 297	B 4	250 x 353	C 4	229 x 324
A 5	148 x 210	B 5	176 x 250	C 5	162 x 229
A 6	105 x 148	B 6	125 x 176	C 6	114 x 162
A 7	74 x 105	B 7	88 x 125	C 7	81 x 114
A 8	52 x 74	B 8	62 x 88	C 8	57 x 81
A 9	37 x 52	B 9	44 x 62		
A 10	26 x 37	B 10	31 x 44		

FORMAT OFFICIEL DES ENVELOPPES P.T.T.

Pour feuille pliée en quatre :	162 mm x 114 mm
Pour feuille pliée en trois :	220 mm x 110 mm
Pour feuille pliée en deux :	229 mm x 162 mm
Enveloppe pour cartes de visite :	140 mm x 90 mm
Carte de visite :	128 mm x 82 mm