REPERES - IREM . n°8 - juillet 1992

ENSEIGNER A PARTIR D'ACTIVITES, EST-CE BIEN RAISONNABLE ?

Michèle MATHIAUD
Irem de Paris 7

Depuis quelques années, je veux dire depuis la parution des manuels scolaires dits "nouveaux programmes 86" en Collège puis en Lycée, une rubrique semble devenir la panacée de l'enseignement des mathématiques : celle intitulée ACTIVITE.

Et comme les travaux catalogués dans cette nouvelle rubrique ont, d'une édition à une autre, très peu de points communs, nous sommes conduits, nous enseignants du Secondaire, à nous poser différentes questions.

Tout d'abord : qu'est-ce donc qu'une *activité* ? Puis ensuite : pourquoi cette rubrique apparaît-elle tout à coup dans nos manuels et dans nos documents pédagogiques ? Est-ce parce que le mot figure en bonne place dans nos nouveaux programmes et que les programmes antérieurs n'en parlaient pas ? Et enfin : notre enseignement doit-il passer obligatoirement par des activités ? Si oui est-ce simplement pour "faire mode" ou pour "un plus" vis à vis de l'élève ? Sinon, pourquoi, et alors que faire ?

Il y a certes de nombreuses autres questions que chaque enseignant, qu'il soit expérimenté, débutant ou stagiaire, se pose à propos de la façon d'organiser au mieux son travail, mais je me limite ici à un exposé de réponses, personnelles et partielles, aux interrogations précédemment formulées ; ces réponses sont en relation avec, d'une part, une (assez) longue période d'enseignement en Collège et Lycée et des tutorats de stagiaires C.P.R., d'autre part, un travail à l'Irem de Paris 7 avec des enseignants, didacticiens ou non, des animations de stages pour les MAFPEN, et aussi des réflexions et des échanges sur des points particuliers lors des Commissions nationales Inter-Irem, ou des Colloques, ou des Journées nationales A.P.M.E.P..

I – A propos des activités issues de nos documents professionnels.

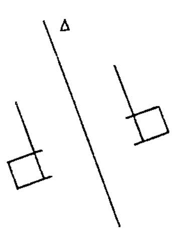
Nous pouvons tout d'abord remarquer que dans les manuels de la 6ème à la Seconde, le mot est employé tantôt au singulier tantôt au pluriel ; parfois il est suivi d'une précision relative à sa fonction dans le chapitre comme par exemple "préparatoire(s)", "préliminaire(s), "d'approfondissement", "pour s'initier", "pour aller plus loin". En général, le texte est court et s'accompagne souvent d'un dessin ou d'un tableau à compléter ; il est parfois précédé d'une "définition". Le mot *activité* figurait aussi dans les SUIVIS SCIENTIFIQUES, documents provenant des travaux de la Commission nationale Inter-Irem 1er cycle, et issus de l'expérimentation des programmes ; parfois pour le même type de travail que celui intitulé *activité*, on trouvait aussi le libellé *situation-problème* (Suivi de 6ème, p.46). Comme il s'agissait, tacitement dans l'esprit des auteurs, de travaux conduisant à la construction d'un ou de plusieurs concepts à partir de différentes connaissances mobilisables par l'élève ; la finalité des activités n'avait pas besoin d'être reprécisée. C'est pourquoi le mot était employé seul, sans qualificatif.

Voici quelques extraits de manuels ou de suivis proposant des activités sur deux points du programme de collège : symétrie centrale en 5ème et calcul avec radicaux en 3ème.

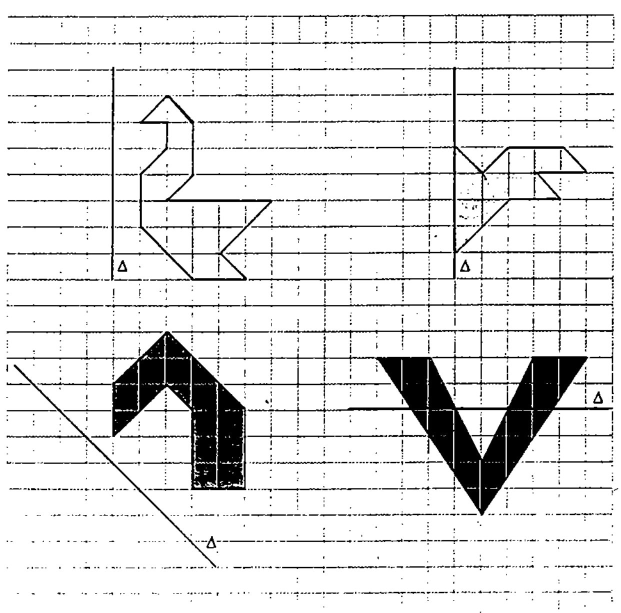
Avant de les analyser, je propose une incursion dans les programmes officiels et aussi dans des recherches en didactique, afin d'y relater les différents sens du mot *activité* tels qu'on peut les percevoir.

——— Symétrie par rapport à une droite (révision)

Pour chaque cas,
— reproduire le dessin sur du papier quadrillé,
— construire le symétrique de la figure par rapport à la droite Δ.



Vocabulaire : La symétrie par rapport à la droite Δ est appelée **symétrie axiale d'axe** Δ.

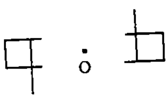


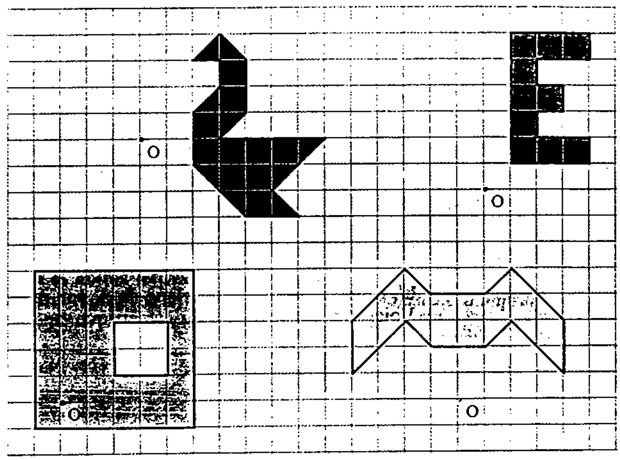
Extrait 1 : Hatier, *Pythagore 5ème.*

Extrait 1 (suite) : Hatier, *Pythagore 5ème.*

Symétrie par rapport à un point

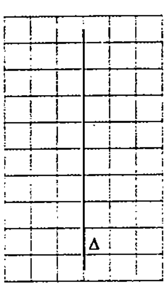
Pour chaque cas,
— reproduire le dessin sur du papier quadrillé,
— construire le symétrique de la figure par rapport au point O.





Vocabulaire : La symétrie par rapport au point O est appelée **symétrie centrale de centre** O.

Symétrique d'un point



Utiliser du papier quadrillé.

a/ Symétrique d'un point par rapport à une droite

1. *Tracer la droite* Δ *et placer deux points* A *et* B *non situés sur* Δ.
2. *Placer les symétriques* A' *et* B' *de* A *et* B *par rapport à* Δ.
3. *Compléter la phrase suivante avec « droite* Δ *», «* A *», «* A' *», « médiatrice » :*

Les points .... et .... sont symétriques par rapport à la .... la .... est donc la .... du segment [......].

4. *Quels sont les points symétriques d'eux-mêmes par rapport* Δ *?*

b/ Symétrique d'un point par rapport à un point

1. *Placer un point* O *et deux points* A *et* B.
2. *Placer les symétriques* A' *et* B' *de* A *et* B *par rapport à* O.
3. *Compléter la phrase suivante avec « milieu », «* A *», «* O *», «* A' *».*

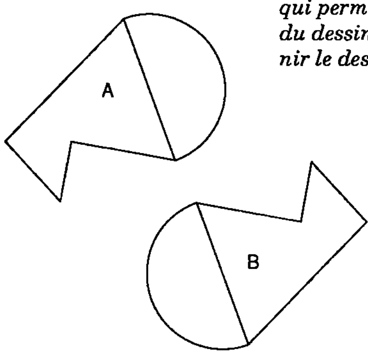
Les points .... et .... sont symétriques par rapport au point .... ; le point .... est donc le .... du segment [......].

4. *Y a-t-il des points symétriques d'eux-mêmes par rapport à* O *?*

Extrait 2 : Irem de Nantes, Suivi 5ème.

Activité 1 (durée : 2 heures)

— **Symétrie centrale** —



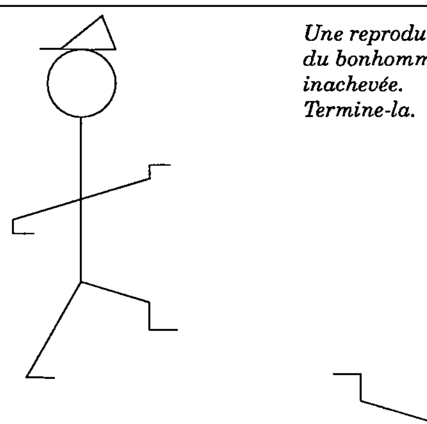
Trouve au moins une PROCEDURE qui permet, à partir du dessin A, d'obtenir le dessin B.

Pour ces activités, les élèves disposent de leurs instruments de géométrie et de papier calque.

Activité 2 (durée : 1 heures)

Consigne : Choisis un dessin A et construis un dessin B , comme dans l'activité 1, par la méthode qui te semble la plus simple.

Activité 3



Une reproduction du bonhomme est inachevée. Termine-la.

Extrait 3 : Irem de Poitiers, Suivi 5ème.

Symétrie centrale

Pour ces activités, les élèves disposent de leurs instruments de géométrie et de papier calque.

Activité 1 :

1) Observe les figures que l'on t'a données.

2) Elles ont une propriété commune.

3) Comment passer du dessin en position (1) au dessin en position (2) ?

Figure 1

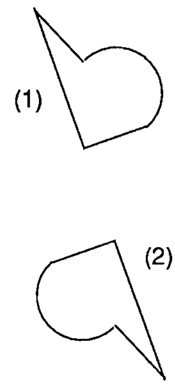


Figure 2

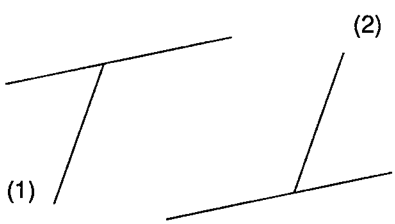


Figure 3

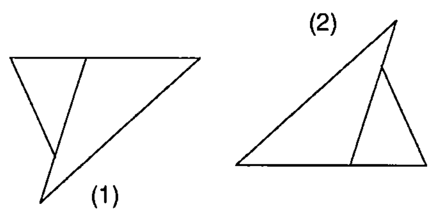


Figure 4

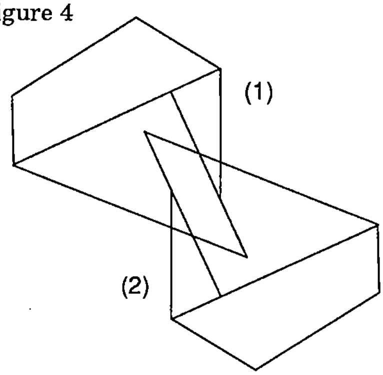
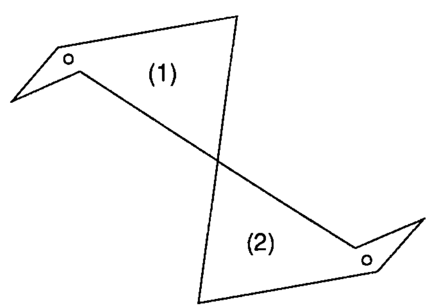


Figure 5



Extrait 4 : Nathan, *Maths 3ème.*

Opérations sur les radicaux

5 *Formules usuelles*

1. Racine carrée d'un produit

a/ Remarque
Sans calculatrice :

- **calculer** $\sqrt{9 \times 4}$, puis **calculer** $\sqrt{9} \times \sqrt{4}$;
- **calculer** $\sqrt{25 \times 16}$, puis **calculer** $\sqrt{25} \times \sqrt{16}$;
- **calculer** $\sqrt{49 \times 4}$, puis **calculer** $\sqrt{49} \times \sqrt{4}$.

Lorsque *a* et *b* sont deux nombres positifs quelconques, *il semble que* $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. Démontrons-le.

b/ Démonstration

Compléter : $(\sqrt{ab})^2 = \ldots$

$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\ldots)^2 \times (\ldots)^2 = \ldots$

Expliquer pourquoi on en déduit que $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

2. Racine carrée d'un quotient

a/ Remarque
Sans calculatrice :

- calculer $\sqrt{\frac{16}{25}}$, puis calculer $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$;
- calculer $\sqrt{\frac{121}{49}}$, puis calculer $\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{49}}$.

Lorsque *a* et *b* sont des nombres positifs quelconques, et *b* différent de zéro, *il semble que :* $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Démontrons-le.

b/ Démonstration

Compléter : $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \ldots$ et $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\ldots)^2}{(\ldots)^2} = \ldots$

Expliquer pourquoi on en déduit que $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

3. Diverses écritures

a/ Sans utiliser la calculatrice, **expliquer** pourquoi l'on a :

$\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ $\sqrt{80} = 2\sqrt{20}$

$5\sqrt{2} = \sqrt{50}$ $\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\frac{8}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{64}{3}}$

b/ **Transformer** les écritures suivantes (sans calculatrice)

$\sqrt{48}$ $\sqrt{75}$ $\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\sqrt{\frac{25}{2}}$ $\sqrt{\frac{8}{9}}$ $\sqrt{\frac{16 \times 5}{63}}$

NOTATION

Par la suite, au lieu d'écrire

$c \times \sqrt{d}$

on écrira : $c\sqrt{d}$.
Ainsi $3 \times \sqrt{5}$ s'écrira $3\sqrt{5}$.
On place toujours en premier le nombre *sans* radical pour éviter des erreurs de lecture ou d'écriture.
On n'écrit pas :

$\sqrt{5}3$

pour ne pas confondre avec $\sqrt{53}$ par exemple.

Extrait 5 : Bordas, *Mathématiques 3ème.*

Opérations sur les radicaux

■ Produit de deux radicaux. Étude d'exemples

Recopier et compléter le tableau suivant :

a	b	$a \times b$	$\sqrt{a \times b}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a} \times \sqrt{b}$
4	9					
25	36					
$\frac{4}{9}$	225					
2,89	0,25					
3	5					
6	15					

Pour chacun des résultats demandés, indiquer la valeur décimale exacte ou la valeur arrondie au millième.
Que remarque-t-on pour les nombres $\sqrt{a \times b}$ *et* $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$*?*

Démonstration

■ *Soit a et b deux nombres positifs.*
Calculer $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$ *et* $(\sqrt{ab})^2$. *Comparer les résultats obtenus.*
Si les carrés de deux nombres positifs sont égaux, les nombres sont égaux.
Comparer $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ *et* $\sqrt{ab}$. ■

■ Quotient de deux radicaux. Étude d'exemples

Recopier et compléter le tableau suivant :

a	b	$\frac{a}{b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
36	4					
100	25					
64	16					
9	4					
2,89	0,25					
6	15					

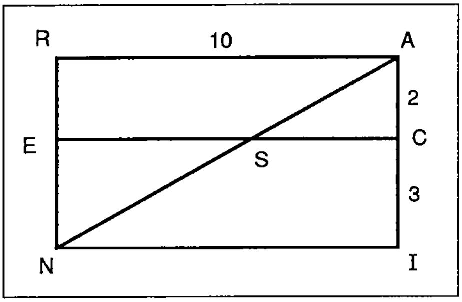
Démonstration

■ *Soit a et b deux nombres positifs* $(b \neq 0)$.
Calculer $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$ *et* $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$. *Comparer les résultats obtenus.*

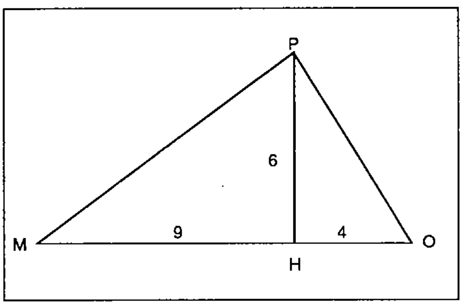
Comparer $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ *et* $\sqrt{\frac{a}{b}}$. ■

Extrait 6 : Irem de Poitiers, Suivi 3ème.

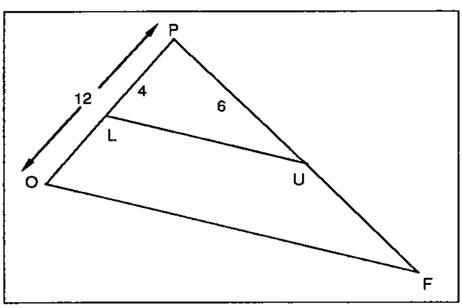
— **Racines carrées** —



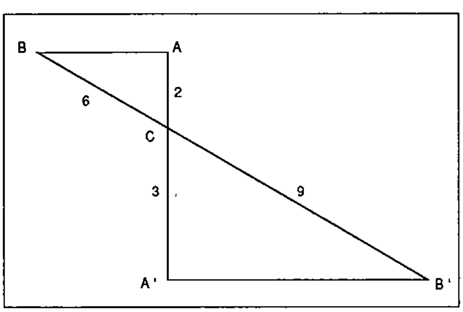
Activité 1 : RAIN est un rectangle, (BC) est parallèle à (IN).
Calcule la valeur exacte de SN.



Activité 2 : Le triangle POM est-il rectangle ? Prouve-le.
Calcule son aire de plusieurs façons.



Activité 3 : Les droites (LU) et (OF) sont parallèles.
Calcule FO.



Activité 4 : Donne plusieurs méthodes pour calculer AB / A'B'.

II – A propos des activités dans les programmes officiels

C'est au regard des travaux proposés aux élèves dans nos documents pédagogiques sous l'intitulé commun "activité(s)" et en voyant déjà dans leurs conceptions des différences, (et tout de même) des similitudes, que nous sommes en droit de nous poser la question : mais qu'entend-on par *activité* ?

Nous savons bien que les mots vont et viennent, parfois au gré de la mode, de l'usage dans l'environnement socio-professionnel ; et souvent, à force de répétitions, d'habitudes, ils s'usent, perdent leur sens initial pour en prendre un autre souvent affaibli, ou alors d'autres. Pensons par exemple au mot "étonner" qui, au 11ème siècle signifiait : *frapper du tonnerre*, puis au 15ème : *faire trembler par une violente commotion*, pour enfin avoir le sens avec lequel il est maintenant utilisé : *surprendre, épater* ...

D'autres mots comme "abîmer" (*précipiter dans un abîme* au 14ème, pour signifier actuellement *casser*, *salir*, ...) ou, comme "chose", "objet" ... ont subi des sorts analogues aux mots précédemment cités ; récemment, à cause de leur médiatisation et du phénomène de mode, des mots comme "génial", "hyper", "absolument" ... ont un sens qui est même différent suivant le milieu social dans lequel ils sont utilisés ; alors, n'en serait-il pas de même pour le mot "activité" ?

En conséquence, parce que nous nous intéressons au sens actuel du mot, et que côté dictionnaire il ne nous est pas signifié de changement de sens au cours des siècles passés, nous pouvons peut-être nous interroger sur l'ancienneté de son utilisation et de l'évolution de sa signification dans notre environnement pédagogique ; puisque nous enseignons à partir de programmes officiels et que nous connaissons bien les "nouveaux programmes", nous nous sommes posé les questions : quelle place le mot activité pouvait-il occuper dans nos "anciens programmes", depuis combien de temps et quel sens y avait-il ?

Pour tenter de répondre à ces questions, avec d'autres collègues enseignant les mathématiques depuis plus ou moins longtemps, nous avons fait des recherches dans notre pratique et dans les différents programmes que nous avons subis, soit en tant qu'élèves, soit en tant qu'enseignants. A notre surprise, de 1945 à 1985 tous les programmes, à l'exception de ceux de 71 qui, les seuls en leur genre ne font référence qu'aux contenus (c'est-à-dire aux "objets" d'étude), proposent un enseignement de mathématiques essentiellement fondé sur l'activité de l'élève et sur sa participation effective à la mise en forme du cours. Pourtant nous pensions que ceci était spécifique à la théorie constructiviste de l'apprentissage qui semblait être devenue très clairement à la mode pour le Ministère de l'Education Nationale seulement depuis 10 ans.

A la lecture de certains programmes nous avons découvert ces lignes, à propos du 1er cycle :

Que la méthode "active " doive être mise en pratique dans toutes les classes de mathématiques, c'est là une règle de conduite dont la valeur n'est plus contestée.

L'enregistrement passif d'un certain nombre de notions et de faits ... ne saurait constituer un enseignement de formation intellectuelle. Il faut ... obliger chacun, aux diffé-

rents moments de la classe, à prendre une part effective au travail.

... D'ailleurs, une bonne part de l'activité des élèves doit être consacrée à l'étude et à la recherche de la solution de "problèmes"... (Instructions générales du 1er Octobre 1946)

— Donc, le support de l'activité ce sont les problèmes et ce qui est visé est une formation intellectuelle. L'activité se situe au niveau d'une méthode à mettre en œuvre aux différents moments de la classe :

L'accès aux notions de base ne peut se concevoir qu'en partant du concret, du milieu que l'enfant peut explorer parce qu'il peut s'y mouvoir et agir. le rôle du maître est alors de diriger cette exploration, en cherchant à ne pas éteindre la curiosité et la spontanéité ; il proposera des "situations" d'où se dégageront peu à peu quelques faits qui mériteront d'être retenus, mis à part, distingués par quelque moyen permettant de les retrouver, de les reconnaître, de les mettre de nouveau en jeu.
(Instructions de Janvier 1957)

— L'activité porte sur des situations matérielles mais on ne sait pas très bien où se situe l'activité intellectuelle de l'élève et en quoi elle consiste. Il semble que le processus d'apprentissage proposé par Diénès corresponde à cette description.

En Avril 1977, il est publié :

Les exposés dogmatiques sont exclus. Les définitions, les propriétés seront introduites par des exemples ... L'enseignement s'appuiera constamment sur l'activité des élèves ; le professeur tiendra compte de toutes leurs réponses, même naïves, maladroites ou erronées, s'attachant à en faire dégager la part de vérité ...

— On retrouve ici la problématique des instructions de 46 dans lesquelles on accorde une place explicite aux erreurs. Et aussi veut-on (peut-être) oublier l'axiomatique forcenée de 71 !

Dans l'arrêté de Janvier 1981 relatif à la classe de Seconde, on peut lire :

... A la base de tout bon apprentissage il y a le contact avec une pratique sensorielle et concrète, la stimulation de l'activité personnelle de l'élève, l'élaboration de moyens d'investigation aussitôt applicables au monde qui l'entoure.

... L'activité mathématique ne s'identifie pas au déroulement d'une suite bien ordonnée de théorèmes. Il importe que toute introduction d'une notion ou d'un théorème soit précédée de l'étude d'une situation assez riche pour en attester l'intérêt ...

— Ici on accorde de l'importance à la modélisation et l'activité mathématique est bien une activité intellectuelle.

Puis les programmes "85" que nous, enseignants de Collège et Seconde connaissons bien, et donc dont je donnerai peu d'extraits, nous proposent les orientations suivantes :

Une appropriation mathématique, pour un élève, ne saurait se limiter à la connaissance formelle de définitions, de résultats, de techniques et de démonstrations : il est indispensable que les connaissances aient pris du sens pour lui à partir de questions qu'il s'est posées et qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes. (B.O. pour Collège, édité en 1985 par le CNDP, page 79).

— L'accent est mis clairement sur le statut des connaissances ; et s'il y a *activité,* c'est pour donner du sens à ces connaissances.

Puis le prolongement inévitable en Lycée de l'optique "constructiviste" nous arrive en 1990 à travers les directives suivantes concernant les 1ères et Terminales :

Deux objectifs essentiels sont à poursuivre :

*— Entraîner les élèves à l'**activité scientifique** et promouvoir l'**acquisition de méthodes** : la classe de mathématiques est d'abord un lieu de **découverte**, d'**exploitation de situations**, de **réflexion** et de **débat** sur les démarches suivies et les résultats obtenus, de synthèses degageant clairement **quelques** idées et méthodes essentielles et mettant en valeur leur portée.*

*— Développer les capacités de **communication** : ... Dans cette perspective, la **résolution de problèmes** et l'**étude de situations** occupent une **part importante** du temps de travail ... La **synthèse**, qui constitue le cours proprement dit, est **indispensable** mais doit être **brève** ...*

Alors, après ces "saines lectures", quelques questions peuvent déjà se poser à nous, enseignants ; par exemple :

— Est-il raisonnable d'enseigner en réduisant la majeure partie du travail de l'élève à du mimétisme ?

— Dans quelles conditions est-il possible de proposer aux élèves des activités qui s'inscrivent dans un processus d'apprentissage scientifique ?

Nous tenterons d'y donner des éléments de réponse à la lueur d'autres "éclairages", par exemple ceux de didactitiens.

III – A propos d'activité en didactique des mathématiques.

Regardons maintenant la littérature "non ministérielle" qui s'intéresse à l'enseignement des maths, plus particulièrement à celle des ditacticiens dont les travaux sont basés d'une part sur des études de psychologues d'autre part sur des observations à long terme dans les cursus Elémentaire, Secondaire et aussi Supérieur .

Les didacticiens parlent plutôt d'*action* que d'*activité* ; Guy Brousseau [1], dans sa théorie des situations, attribue une place importante aux situations d'action ; Gérard Vergnaud [2] dit "l'action est source et critère du Savoir". Or en mathématiques l'*action* est liée à la recherche de résolution de problèmes, ce qui est l'occasion de se poser de nombreuses questions. Il y a différents types de problèmes que nous connaissons bien car nous les pratiquons à toute occasion, par exemple pour des explorations, des synthèses ou des évaluations . D'autres *problèmes* s'inscrivent dans un processus d'apprentissage pour favoriser la construction des connaissances dans la mesure où ils répondent à certaines exigences ; c'est le cas de la conception constructiviste de l'apprentissage dans laquelle la formation des connaissances se fait par l'action et par un jeu de déséquilibres et rééquilibrations majorantes. Régine Douady [3], s'appuyant sur cette conception, explique ce qu'elle entend par *problème* :

a) L'énoncé est facile à comprendre et l'élève est capable d'envisager ce que peut être une réponse au problème; ceci est indépendant de sa capacité à en proposer une.

b) La réponse n'est pas évidente mais compte tenu de ses connaissances, l'élève *peut engager une procédure de réponse partielle.*

c) Pour répondre complètement au problème, l'élève devra construire la connaissance dont le maître vise l'apprentissage.

d) Le problème est riche ; le réseau des concepts impliqués est assez important mais pas trop pour que l'élève puisse en gérer la complexité.

e) Le problème est suffisamment ouvert pour que l'élève puisse envisager des questions non formulées dans le texte et utiliser des procédures diverses. Cependant les possibilités qui lui sont offertes ne sont pas trop grandes de façon à ce qu'il puisse effectivement faire des choix. Ces conditions éliminent par exemple un découpage du problème en de trop petites questions pour lesquelles il n'y a qu'une procédure possible.

f) Le problème peut se formuler dans au moins deux cadres, chacun ayant son langage, cadres entre lesquels on sait établir des correspondances.

IV – A propos d'activités dans nos classes

Les décideurs comme les chercheurs ne peuvent pas prendre complètement en compte la réalité quotidienne de notre classe car ils n'ont pas le contact permanent avec les élèves ; leurs finalités sont différentes et différentes des nôtres, nous les "gens du terrain". De plus, les décideurs n'ont pas toujours les moyens de contrôler l'exécution de leurs orientations et les travaux des chercheurs sont souvent sous une forme qui ne peut toucher encore qu'un nombre restreint d'enseignants, mais cela pourra peut-être changer vu les nouvelles modalités de la formation des maîtres ; ces faits contribuent à la situation suivante : le "maître en général" a, à la fois une très grande liberté de choix de stratégie et de manœuvre pour l'organisation et la gestion de sa classe, et peut-être aussi une méconnaissance des différentes façons dont un apprentissage peut se faire.

Nous avons tous rencontré des maîtres qui exercent dans nos établissements du 1er et 2ème cycles et qui, malgré les informations, sont encore partisans du "Je-leur-apprends-ils-appliquent-donc-ils-savent" ; j'exclus par expérience cette conception de l'apprentissage et ne m'intéresse ici qu'aux problèmes que se posent les détracteurs de cette théorie.

Nous voici donc, nous les enseignants, dans nos classes de collège ou de lycée, "avertis" des différentes façons dont peut fonctionner l'apprentissage des concepts. Nous sommes face à nos élèves différenciés et non homogénisés ou idéalisés, et responsables à part entière de l'ingéniérie que nous allons mettre en œuvre auprès d'eux dans le but d'enrichir non seulement leurs connaissances mais aussi leurs méthodes de traitement de problème ; et nous avons trouvé des informations sur la notion d'*activité*, de *problème*.

De la lecture des paragraphes 2) et 3) à ce propos il apparaît :

— Au moins un point commun dans les conceptions : ce sont des travaux mathématiques auxquels l'élève doit prendre une part active, où il s'investira personnellement car il aura à résoudre un problème qu'il comprendra et qui l'intéressera ; les travaux sont réalisés à partir de consignes relativement précises données par l'enseignant.

— Contrairement aux hypothèses présentées dans la partie 3), on ne trouve pas dans l'exposé des instructions ou commentaires des programmes des raisons pour lesquelles il semble nécessaire de faire résoudre des problèmes, par exemple un moyen de réaliser en classe des processus de déséquibre-rééquilibration. Il s'ensuit une dérive possible et souvent constatée de ce qui est demandé aux élèves lorsqu'on les place en "activité" ; on peut considérer que les élèves sont en "activité" lorsqu'ils dessinent, ils mesurent, ils font marcher la calculatrice, enfin lorsqu'ils font quelque chose, que ce soit commandé ou non. Dans l'esprit des programmes, cette "activité" semble être mentionnée surtout en opposition à "passivité", état dans lequel l'élève risque de se trouver s'il ne se sent pas concerné, par exemple lors d'un cours trop magistral dont il ne comprend pas la finalité, où il ne perçoit pas toute la pertinence des théorèmes utilisés dans les démonstrations, démonstrations dont parfois il ne sent pas la necéssité .

A la lumière de ces informations et de celles qui vont suivre, j'invite le lecteur à une analyse des activités proposées au paragraphe 1) ainsi que celles qui figurent dans notre documentation pédagogique habituelle puis à l'une de celles que j'ai montées pour mes classes de 3ème et que j'ai aussi proposées à mes Secondes.

Ce qui donne lieu pour moi à *activité* mathématique de la part de l'élève, c'est la recherche d'un problème qui coordonne des notions apprises séparément ou encore un problème qui s'inscrit dans un processus d'apprentissage d'un "objet" mathématique. Pour de telles *activités*, les sources peuvent être des énoncés déjà édités, des adaptations de ces énoncés ou des élaborations personnelles des professeurs. En tant qu'enseignant pour n'importe quelle tâche demandée aux élèves, je m'interroge évidemment sur les prérequis nécessaires et les objectifs principaux ou secondaires visés. De plus pour une activité qui représente un maillon dans la construction des connaissances de mes élèves voici les questions que je me pose :

a) L'élève peut-il engager effectivement une stratégie de son choix qui le conduise à des réponses au moins partielles au problème posé ?

b) L'élève a-t-il besoin de convaincre ses interlocuteurs : autres élèves, professeur ? A-t-il les moyens de justifier ses réponses ?

c) L'énoncé laisse-t-il à l'élève la responsabilité du choix des "outils" et de la stratégie pour résoudre le problème ?

d) L'énoncé est-il constitué d'une suite de petites questions qui détermine complètement la stratégie de résolution ? (maïeutique)

e) L'énoncé demande-t-il d'abord de travailler sur des "objets" mathématiques qui implicitement seront les outils adaptés à la résolution du problème posé ensuite ?

f) l'"objet" mathématique visé est-il, parmi les "outils" adaptés à la résolution du problème posé, le ou l'un des plus performants ?

Dans l'optique de la création d'états de déséquilibre-rééquilibration, pour moi un problème donnera lieu à activité lorsque les réponses à d) ou e) sont négatives et celles à a) b) c) et f) sont affirmatives. Je poserai des problèmes correspondant à des réponses affirmatives à d) ou e) dans d'autres circonstances que celles où je me place en ce moment, lors d'une évaluation formative par exemple ou d'un test.

Prenons le thème Symétrie centrale avec les extraits 1, 2 et 3 et voyons les réponses que nous pouvons apporter lorsque nous posons les questions a), b), c), d), e) et f) à leur sujet .

Extrait 1.

pour l'activité 1: : A la question a) : l'élève peut-il engager une stratégie de son choix pour résoudre le problème posé ? la réponse est oui ou non suivant l'état de ses connaissances sur le sujet symétrie axiale ; si ses connaissances sont mobilisables à ce moment, il peut dessiner ; sinon il est "sec", il n'a d'autre échappatoire que celle de se renseigner, de chercher de l'aide (dans ses documents, auprès des camarades, de l'enseignant...). Quant aux autres questions, le lecteur peut répondre ...

pour l'activité 2 : Nous pouvons faire la même analyse que pour l'activité 1 alors que l'intention dans le manuel est différente. Puisqu'il s'agit effectivement d'une activité pour s'initier aux symétries centrales, alors l'élève doit avoir le don de "vue dans le futur" ! à moins qu'il ne double sa classe et qu'éventuellement se souvienne ; dans ce cas la question a) aurait une réponse positive. Sinon l'élève dispose de son livre et ne tient pas à se faire pièger alors il tourne les pages pour lire le "cours" afin tout de même de faire ce fichu dessin (et le cours "à retenir" dans ce manuel lui parlera de milieu alors que le programme parle de demi-tour en initialisation à la rotation avec calque ou rapporteur) ; ou alors il "baisse les bras" ... en pensant encore une fois que les profs posent des questions vraiment ... bizarres.

quant à l'activité 3 ? Mais en est-ce une ? L'élève a-t-il un choix à faire ? Ne doit-il pas au contraire se plier à une certaine discipline non seulement de pensée mais surtout d'écriture ? Et quelle validation, à part celle qui vient du Maître, emportera sa conviction ?

Extraits 2 et 3

Aux questions a), b) et c) on peut répondre oui ; la tâche de l'élève est clairement exposée et ceux-ci ne sont pas enfermés dans un problème insoluble. En effet ils ont les moyens de répondre même s'ils ne se souviennent plus de grand chose en géométrie : ils disposent de leurs instruments de mesure, de leur règle, compas, et du papier calque ; ils ont toute liberté pour envisager leur stratégie propre ; et lorsqu'ils la proposent, qui peut la valider ? L'Autorité seule ou la classe entière ?

Comme le précisent les enseignants qui ont monté et expérimenté ces activités et dont on peut lire les comptes rendus dans les Suivis ou les Brochures d'où ils sont extraits, ces travaux se sont étalés sur une certaine durée en classe et à la maison, ont soulevé de nombreuses polémiques relatives aux différentes stratégies adoptées par les élèves et ont permis néanmoins grâce à la validation possible de chacune d'elles, l'institutionnalisation du concept mathématique visé à l'aide de plusieurs définitions correspondant aux "trouvailles" de la classe et non pas "parachutées" par l'enseignant ; par exemple, le demi-tour provient des utilisateurs du calque ou du compas avec repérage de 180° ou du rapporteur ; la définition avec le milieu vient des préférences pour la règle graduée.

Voyons le thème "calcul avec radicaux" en classe de 3ème.

Extraits 4 et 5 : Le lecteur pourra répondre seul aux questions précédentes ... On peut aussi se demander quelle est la liberté de manœuvre de l'élève ; cet élève n'est-il pas autre chose qu'un exécutant servile ? A-t-il un questionnement relatif à la stratégie qu'il doit mettre en œuvre ? Et alors, les démonstrations imposées ont-elles un sens pour l'élève transformé en automate ? Mais cela ne ressemblerait-il pas au "cours" d'antan ? Et si nous allions voir les anciennes éditions chez les éditeurs concernés ? ... Les "nouveaux programmes" ça peut faire vendre à bon compte, il suffit peut-être de remplacer le mot "cours" par "activité" !

Quant à l'extrait 6, je laisse d'abord le lecteur répondre aux questions a), b), c), d), e) et f) et le renvoie pour le compte rendu de ces activités aux Suivi et Brochure concernés. Pour ma part, j'avais proposé à un groupe l'activité 4 en supprimant l'angle droit soit en A' soit en B' ce qui avait provoqué un sérieux questionnement supplémentaire ... puis un réinvestissement de la réciproque de Pythagore.

Et, puisque nous arrivons au terme de l'article, je ne peux m'empêcher de faire part de l'enthousiasme qui m'anime en pensant à cette fourmilière d'idées que peut devenir une classe, idées plus ou moins "bonnes" parfois, mais qui sont avancées avec d'autant plus de certitude que les élèves se sont investis dans leurs calculs avec les "sûrs", c'est-à-dire les Thalès-puis-Pythagore ou les Pythagore-puis-Thalès, puis ensuite avec leurs "présumés-sûrs", à savoir les Sommes-radicaux, les Produits-radicaux ou les Quotients-radicaux (Madame, on a le droit d'inventer des règles ? $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ça semble ne pas pouvoir s'écrire plus simplement sauf quelques fois alors que $\sqrt{a}\sqrt{b}$, c'est pas pareil...) et les interrogations entre ceux qui dans l'activité 1 de l'extrait 6 trouvaient $\sqrt{45}$ et ceux qui avaient $\sqrt{125} - \sqrt{20}$ ou encore $3\sqrt{5}$ et ceux dont la calculatrice affichait des décimales dont on avait appris à se méfier mais qui rassuraient tout de même ... Enfin, comme le dit si bien Marc Legrand (Irem de Grenoble) [4], la classe peut et doit devenir une "mini-communauté-scientifique"... à condition toutefois qu'on lui en donne les moyens ... Et je peux assurer que cela est possible.

Et alors quelle sera la durabilité de la "mémoire" de l'élève, après ce "déséquilibre-rééquilibré" par la justification qu'il aura ici souhaitée et l'institutionnalisation des règles et des non-règles ? Est-ce comparable avec le remplissage d'un tableau de nombres qui n'a sollicité que les touches de la calculatrice et le report de ses résultats, donc qui n'a pas posé de questionnement, donc qui n'a besoin ni de validation et encore moins de "démonstration" ? Et est-ce parce que l'élève aura "vu" des règles écrites qu'il les retiendra, les fera fonctionner ?

Avant de conclure, je donne ici le texte d'une activité qui est décrite dans le Suivi 3ème p. 342 (avec seulement trois tarifs) et qui provoque, dans des classes de 3ème en situation d'apprentissage sur les fonctions affines et les résolutions de problème par des méthodes graphiques, dans des classes de Seconde en réinvestissement, un véritable "débat scientifique".

Voici le texte :

Un organisme veut créer un service sur minitel ; il propose aux futurs utilisateurs le choix entre quatre tarifs trimestriels :

Tarif A : Paiement d'une somme globale de 380 F.

Tarif B : Paiement d'une somme de 147 F et de 0,20 F par minute de connexion.

Tarif C : Le prix de la minute de connexion est de 0,45 F.

Tarif D : 360 F pour les 25 premières heures puis 40 F par tranches de 5 heures supplémentaires.

Quel est le tarif le moins onéreux pour l'utilisateur ?

Que le lecteur lui applique les questions a),. ... f), il pourra alors vérifier que :

Pour a) Après avoir éventuellement demandé la signification de *connexion* ou de *onéreux*, l'élève peut au moins enclencher des calculs pour une durée de connexion déterminée et comparer les différents tarifs ; aucun élève ou groupe d'élèves n'est "sec".

Pour b) et c) Les réponses sont affirmatives.

Pour d) et e) L'inexistence de questions intermédiaires permet de répondre par la négative. Ainsi l'élève aura "le choix des armes" ...

Pour f) Le problème est traité en général seulement partiellement par les élèves de 3ème dans la situation d'apprentissage précisée ci-avant ; quelques uns arrivent toutefois à des réponses complètes ; ils utilisent des méthodes algébriques, parfois arithmético-algébriques, et parfois seulement calculatoires en comparant les résultats consignés dans des tableaux organisés mais coûteux en temps ; il y a de nombreux résultats qui ne sont pas toujours globalement décisifs : certains élèves proposent par exemple des meilleurs tarifs pour des durées de 9 heures ou de 10 heures et ont des difficultés à affiner leurs réponses à des durées intermédiaires alors qu'il y a un changement de tarif à une durée de 9 heures 48 minutes.

Et pour obtenir avec assurance une réponse globale et économique en temps, ce sera bien le graphique l'outil le plus performant ; et la fabrication de ce graphique montrera à l'élève pourquoi ici on obtient des segments de droites et non pas des paraboles ou autres courbes, le sensibilisera à la différence entre variations affines et variations linéaires, lui permettra d'appréhender puis de définir seul des mots comme "fonction constante", fonction "par morceau" ; c'est ce graphique qui leur indiquera les calculs algèbriques efficaces pour la résolution complète du problème ; donc les "objets" dont l'apprentissage est visé ici seront incontestablement les "outils" les plus performants pour traiter le problème.

En classe de Seconde, cette activité permet des réinvestissements ; la fabrication d'un graphique qui est attendue ne vient pas spontanément chez tous les élèves peut-être parce que certains sont encore trop habitués, par l'intermédiaire des problèmes type BREVET, à ne faire des graphiques que "sur commande", ou alors on leur a appris à se méfier des graphiques, ou alors ils hésitent à investir du temps dans ces dessins et préfèrent les réponses "justes" des calculs. Les échanges de points de vue favorisent alors des mises au point sur des contenus et sur des méthodes.

Pour conclure...

— Les programmes nous ont parlé depuis un certain nombre d'années de l'activité de l'élève, mais en fait il s'agissait plutôt de sa participation au travail proposé en classe, sans préciser le genre de celui-ci ; ce pouvait être des résolutions de problèmes utilisant les concepts qui venaient d'être étudiés ou des recherches de démonstrations de théorèmes du cours, ou encore des "gammes" ; il semble que ce soit surtout pour essayer d'éviter le fatal (et dans nos lycées encore très fréquent) cours dogmatico-magistral issu de la conception empiriste de l'enseignement, cours qui ne favorise pas la formation scientifique car il exclut la conjecture, donc la recherche des preuves et le débat. Que l'enseignant soit porté vers ce type d'enseignement est tout à fait naturel car c'est celui qu'il a reçu à l'Université pendant les dernières (et décisives) années de son gavage en Savoir Savant – le Vrai –, Savoir dont il se servira très peu dans l'exercice de son métier.

Actuellement les programmes incitent fortement les enseignants à considérer les mathématiques comme une science plus intégrée à la Société, peut-être moins comme "l'art pour l'art " et plus "discipline de service", "matière interdisciplinaire", sans oublier sa rigueur ... et sa langue et ses limites à un niveau donné. Et aussi, afin de présenter à nos élèves les mathématiques comme (ce que je pense qu'elles sont) des sciences vivantes et non figées, les programmes nous demandent dans la mesure de notre possible de relater à nos élèves les hésitations et les difficultés historiques qu'un concept mathématique subit avant de prendre une forme définitive pour une époque donnée, après avoir eu parfois des formes éronnées pendant une longue période. Ces formes varieront souvent en fonction de découvertes à des périodes ultérieures ; que Monsieur le Professeur EULER ait écrit des démonstrations non contestées en 1749 sur Le Théorème Fondamental de l'Algèbre, théorème utilisant un principe de continuité intuitif non "prouvé" à l'époque mais démontré ultérieurement, montre que "la mathématique est en marche" ; qu'une équation n'ait pas été écrite (et traitée) toujours et partout de la façon canonique que nous lui connaissons surprend ... et rassure (et ausi déstabilise) les élèves et les confortent dans l'idée que la "science infuse" n'est pas une vertu aussi fréquente que certains pensent et que l'étiquette présumé-non-scientifique ne s'attache à une personne peut-être seulement qu'au cours d'un certain laps de temps mais pas forcément à vie ...

Que cette orientation favorise les théories constructivistes de l'apprentissage, c'est possible. En effet, elles permettent à l'élève de s'approprier un peu mieux les problèmes, donc d'avoir envie de les résoudre et de s'impliquer dans les débats de preuve et faire alors une connaissance consciente avec de nouveaux concepts. Elles permettent aussi de se rendre compte de la vie de ces concepts qui ne sont pas figés dans leur formulation, qui ont mis du temps avant de prendre jour et d'être "officialisés".

Et cette orientation est peut-être aussi liée à l'élargissement du recrutement de nos élèves en scolarisation obligatoire, donc aux différences de motivations de ceux-ci.

Alors ne perdons pas de vue que le traitement de problèmes "concrets" sur les locations de cassettes ou fabrication de casseroles (Suivi 3ème p. 306), ou de simples problèmes de géométrie de configurations peuvent être à la base de véritables activités et conduire à des institutionnalisations aussi nobles que, par exemple, la donnée brutale de la définition d'une fonction affine ou autre.

— La didactique des maths nous aide à mieux comprendre les différences d'appropriation d'un concept chez nos élèves et par là à mieux cibler les méthodes d'apprentissage, à mieux analyser les comportements et réponses ; les activités, celles décrites en 3), sont les travaux qui favorisent au mieux ces analyses et mises en place personnalisées des méthodes d'acquisition des concepts.

Mais si nous nous posons la question bien légitime pour nous les gérants du temps auprès de nos élèves de la gestion des horaires imposés, nous pouvons constater que les activités sont gourmandes en heures alors que le sujet principal d'étude est parfois mince. Toutefois lorsqu'un élève résout un problème-activité, il ne met pas en jeu qu'une seule notion, comme par exemple dans le travail sur les racines carrées des extraits 4 ou 5 où seul le calcul "commandé" intervient, mais il réinvestit des connaissances plus ou moins récentes dans des registres variés et avec des moyens personnels de contrôle ; par exemple, dans le travail de l'extrait 5, il y a utilisation de résultats géométriques (Pythagore, Thalès, trigonométrie, configuration du rectangle...) et de techniques calculatoires (quatrième proportionnelle, transformation d'écritures de sommes algébriques, de quotients...).

Ce temps passé à travailler à la résolution de problèmes est certainement pris au détriment du temps passé à copier un cours "traditionnel", parfois long et peut-être peu stimulant, inefficace pour la plupart des élèves. Par contre lorsqu'après des activités ce sont les élèves qui sont capables de suggérer eux-mêmes des définitions ou des propriétés que l'enseignant veut institutionnaliser, le "cours" aura un peu plus de chance d'être marquant donc retenu, mobilisable ...

Alors pour cette autre raison, pour que l'élève ne soit pas seulement le spectateur de la pièce montée par l'enseignant, ne nous privons pas des activités dans nos classes, sans oublier toutefois qu'après l'institutionnalisation de certains concepts ou résultats algébriques par exemple, les "gammes" et les réinvestissements seront souvent nécessaires ... pendant plusieurs années ... avant que ceux-ci soient acquis et disponibles.

REFERENCES

[1] G.VERGNAUD La théorie des champs conceptuels. Recherche en Didactique des Mathématiques. VOL. 10 (1991)

[2] G.BROUSSEAU Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Recherche en Didactique des Mathématiques. VOL. 4 (1983)

[3] R.DOUADY Jeux de cadre et dialectique Outil-Objet. Thèse d'Etat (1984)

[4] Marc LEGRAND Conférences : Colloque de Troyes (1989) et Journées nationales A.P.M.E.P. à LYON (1991).

PUBLICATIONS INTER IREM PREMIER CYCLE :
Suivis scientifiques de 6ème à 3ème
Liaison 3ème Seconde
Des Chiffres et des Lettres.