REPERES - IREM . n°8 - juillet 1992

DES ACTIVITES POUR RAISONNER AU COLLEGE

Danielle BERGUE,
Jacqueline BORREANI,
Brigitte POULAIN
Irem de Rouen

Depuis plusieurs années, nous travaillons sur les difficultés liées à l'apprentissage du raisonnement dans le premier cycle (travail décrit dans les brochures de l'Irem de Rouen : “De la figure vers la démonstration” tomes 1 et 2). Nous continuons au travers de situations proposées souvent dans les manuels, à approfondir notre réflexion sur le raisonnement. Ces situations sont exploitées de façon à susciter un raisonnement et son explication. Ce sont des activités de construction, de réinvestissement d'outils au sens propre (équerre, règle, etc.) et figuré (propriétés des quadrilatères, triangles, médiatrices, etc.). Diverses par leur contenu, leur environnement, la classe à laquelle elles s'adressent, elles ont cependant un certain nombre de points communs qui sont le reflet d'options quant à l'apprentissage du raisonnement et à la gestion de la classe.[1]

C'est tout d'abord l'importance de **l'expression orale.** La prise en compte de la parole se fait à deux niveaux :

— par les élèves entre eux : en 6ème pour tous les élèves (et plus particulièrement pour ceux en difficulté) l'expression orale permet d'émettre plus aisément des conjectures. Le dialogue entre les élèves les incite à entrer dans une démarche heuristique en piquant leur curiosité.

— par le professeur plus particulièrement dans les séquences avec la classe entière : il est attentif à favoriser l'expression de toutes les remarques, essayer de tout prendre en considération, sans faire semblant de n'entendre que ce qui lui semblerait mieux convenir à son propos... !! (exemple : Point commun de droites en 6ème. Annexe 1)[2]

(1) Nous présentons d'abord nos options, les activités étant décrites en annexe. Il peut cependant être plus agréable de prendre connaissance en premier de ces activités.

(2) Les activités citées en annexe sont développées dans : *"Des activités pour raisonner au collège"*, Irem de Rouen, déc. 1991.

Les diverses confrontations mettent en évidence des conceptions implicites justes ou fausses, des erreurs de raisonnement. Notre propos est de les utiliser comme levier pour faire rebondir les situations, les élèves sont motivés par la volonté de convaincre de la justesse de leur conception. De fait, le problème qui alimente l'activité de raisonnement est posé par eux (exemple : Une utilisation du logiciel "géomètre". Annexe 2). Le problème peut aussi être posé par le professeur (exemple : Le cerf-volant. Annexe 3).

Par ailleurs au cours des recherches de solution, il est souvent sollicité des élèves l'expression des propriétés de géométrie. D'où **une confrontation provoquée de la figure et des propriétés**. Cette confrontation va permettre de faire évoluer le statut du dessin vers celui de la figure. Ce changement reste souvent au niveau implicite. Dans les activités, l'erreur sert de point d'entrée, elle n'est pas pointée par le professeur comme incohérence entre la propriété proposée et la figure. L'entrée a lieu suivant deux directions :

— "on voit" sur le dessin des propriétés qui ne sont pas celles de la figure (exemple : Point commun de droites en 6ème. Annexe 1) ;

— les élèves "voient" des propriétés avant même de faire le dessin et c'est ce dessin qui vient contredire leur conjecture (exemple : Confusion médiatrice-bissectrice en 6ème. Annexe 4).

Dans toutes les activités, il s'agit pour les élèves **de prouver leurs conjectures**. Quels outils ont-ils mis en œuvre ?

La recherche nécessite souvent un changement de point de vue sur la figure. Lorsque la figure est donnée, la justification nécessite de la part des élèves un autre regard : ils doivent isoler des "morceaux de figures" (exemple : Droites particulières dans le triangle en 4ème. Annexe 5). Les élèves ont une conception globalisante de la figure ou des propriétés. Penser à un carré comme étant un rectangle est particulièrement déstabilisant en 6ème, un quadrilatère possédant l'ensemble de toutes ses propriétés simultanément (exemple : Construire un rectangle qui a deux côtés consécutifs égaux en 6ème. Annexe 6 et Le cerf-volant. Annexe 3).

Un autre outil de preuve, utilisé au cours de certaines activités, est la recherche d'un contre-exemple (exemple : Confusion médiatrice-bissectrice. Annexe 4) mais pas toujours exhibé (exemple : Une utilisation du logiciel "géomètre" en 5ème. Annexe 2).

Enfin, de même que l'oral, **l'écrit** joue un rôle particulier. Il est au départ une simple transcription de l'oral (indépendant en particulier de l'orthographe). On décrit, on explique, on justifie à sa façon. Dans cette phase, aucune volonté de formalisation n'est présente pour le professeur. Cependant au fur et à mesure que l'année scolaire se déroule le niveau de langage accepté va progressivement évoluer dans un souci de communication claire des résultats (exemples présents dans toutes les activités).

Les situations qui sont décrites, montrent toutes, l'émergence **d'obstacles cognitifs** pour les élèves. Cela peut être aussi des représentations fausses. Nous prenons ces obstacles en compte pour faire évoluer la situation et permettre aux élèves de tenter de les franchir. Parfois nous nous trouvons dans la situation suivante : nous proposons une activité dans le cadre de notre progression et malgré notre analyse *a* *priori* nous sommes confrontés à des obstacles inattendus. Une attitude possible est d'ignorer ces "dysfonctionnements" pour conserver le déroulement prévu. Ceci correspondrait pour nous à une rupture du contrat de classe, c'est ce que nous refusons. Pour tenir compte des propositions des élèves, il faut donc être capable de construire rapidement des stratégies de réponses. C'est en cela que le concept de conflit cognitif est un outil précieux. Plutôt que de répondre seulement par des fiches d'aide, par un cours formel ou par des exercices répétitifs, nous préférons instaurer lorsque cela est possible un débat dans la classe pour qu'il soit le moteur du franchissement de ces obstacles.

Parallèlement à l'évolution de la situation, se construit le savoir des élèves et se modifient leurs représentations. Seulement le franchissement des obstacles est alors fortement contextualisé et l'obstacle peut éventuellement resurgir. Certaines des situations se prêtent plus facilement que d'autres à une décontextualisation. Par exemple dans "Point commun de droites", deux obstacles sont présents : différenciation langage naturel, langage mathématique et représentation de droites. L'obstacle est levé par les interactions entre les élèves. Cette situation servira de référence ultérieure dans d'autres exercices.

Une autre constante dans notre mode fonctionnement est la mise en place **d'une relation très forte élève-savoir** qui est médiatisée non pas seulement par le professeur mais par les élèves. L'influence des autres élèves sur la construction d'un savoir est renforcée par une gestion de classe souvent en groupe pour la recherche. Emettre des conjectures, convaincre ou se convaincre de leur justesse dans un débat mené dans le groupe ou la classe permet de rejetter l'erreur ou de valider la conjecture. Se mettre d'accord pour la production d'une réponse unique favorise l'émergence d'une argumentation. (exemple : Droites particulières dans le triangle en 4ème. Annexe 5). Le savoir ainsi construit est institutionnalisé ensuite. Cette partie n'est pas décrite dans les activités proposées.

Ces quelques situations illustrent la possibilité de raisonner au collège dès la sixième. Pourtant, elles ne sont pas des moments isolés dans notre fonctionnement. Il n'y a pas que des activités spécifiques, beaucoup peuvent permettre de raisonner à condition de provoquer ou de saisir les occasions.

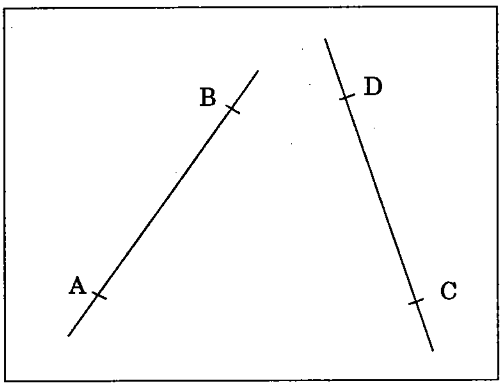
La diversité, la richesse des productions des élèves dans ce cadre est un garant contre la routine, pour conserver notre créativité.

Notre souci est de donner aux élèves des outils, outils méthodologiques au même titre que connaissances de propriétés, pour leur permettre de chercher, de gérer leurs apprentissages. Pour (r)éveiller leur curiosité notre demande n'est plus seulement *résoudre un problème* mais aussi *se poser un problème*, le faire évoluer à partir de ses erreurs, de ses confusions, de la prise de conscience de ses implicites. C'est pourquoi, nous souhaitons partir de "représentations-consensus" de la classe ou du groupe. Sans faire une analyse précise des types d'erreurs commises par les élèves, nous essayons de faire évoluer le statut de l'erreur dans le cours même de l'apprentissage.

Si l'état d'esprit dans lequel nous travaillons est reproductible, il est probable que chaque situation décrite est très contextualisée et donc non reproductible telle qu'elle dans une autre classe.

ANNEXE 1 — Point commun de droites en sixième

Dans une classe de sixième, la consigne "les droites (AB) et (CD) ont-elles un point commun ?" a été donnée à propos du dessin suivant où les segments [AB] et [CD] ont presque la même mesure.



Les élèves répondent par écrit à la question et doivent expliquer leur réponse. Après tri et regroupement des réponses par le professeur, une mise en commun orale est faite dans la classe. Les élèves s'expriment à tour de rôle : l'un donne sa réponse, les autres lui demandent de préciser, réagissent en fonction de leurs connaissances, disent pourquoi ils ne sont pas d'accord.

Le bilan permet de corriger les erreurs et de préciser la notion de droite (faire la distinction entre droite illimitée et sa représentation limitée), de segment et de point commun. Deux types de réponses se dégagent du travail de mise en commun.

1° réponses liées à la différenciation entre langue naturelle et langage mathématique.

Les droites (AB) et (CD) ont un point commun car elles ont toutes les deux un segment dessus.

Les droites (AB) et (CD) ont un point commun car elles ont toutes deux, deux points marqués sur les droites.

Elles ont un point commun car ce sont toutes les deux des droites.

Ce type de réponse est lié au sens donné à l'expression de "point commun". L'élève lui donne le sens du langage courant : avoir un point commun, c'est avoir la même caractéristique. Le professeur pense lui en terme de point d'intersection. Dans ces réponses, il est à souligner que le *"car"* est venu naturellement dans les écrits des élèves.

De plus, dans certains cas, il y a confusion entre droite et segment. Des élèves mesurent, sur les schémas, les segments ou la longueur des tracés des droites. Suivant que les mesures sont faites avec précision ou pas, les droites sont considérées avoir ou non un point commun.

2° réponses liées à la différence entre la droite et sa représentation.

Pour la moitié des élèves, les droites ont un point commun, après avoir prolongé les représentations des droites et construit leur point d'intersection. Pour quelques autres, les droites n'ont pas de point commun car elles ne se coupent pas. Ici c'est la différence entre la droite et sa représentation qui doit être prise en compte. Prolonger les droites semble nécessaire, la seule vision du dessin ne suffit pas pour répondre par l'affirmative.

A la suite de ce travail, les élèves ont correctement manipulé et distingué les droites et segments. Cette séquence d'une heure a servi de référence pour éliminer plus tard du vocabulaire spontané "le milieu d'une droite".

Une utilisation du logiciel « géomètre » en cinquième

ANNEXE 2

La construction de plusieurs dessins est une des méthodes proposées pour que d'une part les élèves se construisent le concept de figure, et que d'autre part, les caractères invariants de ces figures apparaissent. Or dans la suite d'images créées à l'écran, il est possible de comprendre que par exemple les différents triangles n'ont été définis qu'une fois et donc sont représentants d'une même figure. Les élèves peuvent ensuite proposer des contraintes, deux côtés perpendiculaires ou de même longueur, et voir, grâce à l'évolution "continue" permise par "Géomètre", que la réalisation simultanée de deux séries de contraintes n'est possible que dans un cas particulier.

De plus, il ne s'agit pas de produire à l'aide de "Géomètre" un imagiciel qui permette d'illustrer de manière nouvelle une partie du cours et de poursuivre ensuite un apprentissage avec l'environnement habituel, mais de l'utiliser pour aller plus loin : c'est une aide pour faire évoluer la recherche du problème par les élèves.

La séquence se déroule avec l'ensemble de la classe. Les élèves travaillent individuellement. L'ensemble du travail a duré deux heures trente.

L'ordinateur unique (avec souris) est relié à une tablette rétroprojectable. Les figures obtenues sont projetées sur un tableau blanc (sur lequel il est possible d'écrire). On peut donc aussi utiliser la figure projetée comme on le fait ordinairement d'un dessin au tableau.

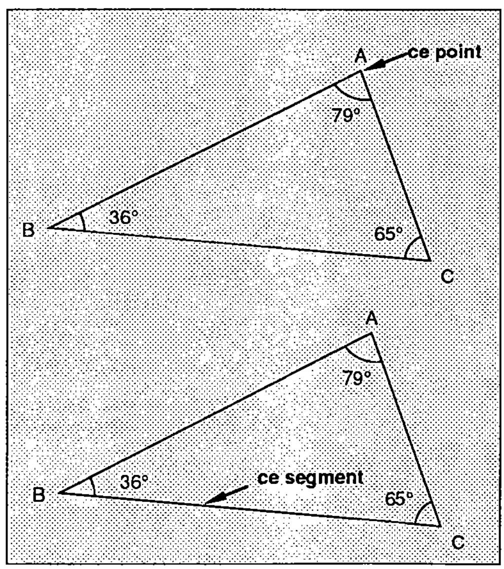
Au cours de la séquence, c'est la modification progressive qui a été utilisée, ce sont le plus souvent les élèves qui sont venus manipuler eux-mêmes en réponses aux conjectures qui étaient proposées par eux-mêmes ou par l'ensemble de la classe. Les élèves ont effectué les dessins sur leur cahier d'exercices et ont noté les résultats obtenus au fur et à mesure.

Le déroulement est le suivant :

1 - Définition d'un triangle ABC à l'aide de "géomètre".

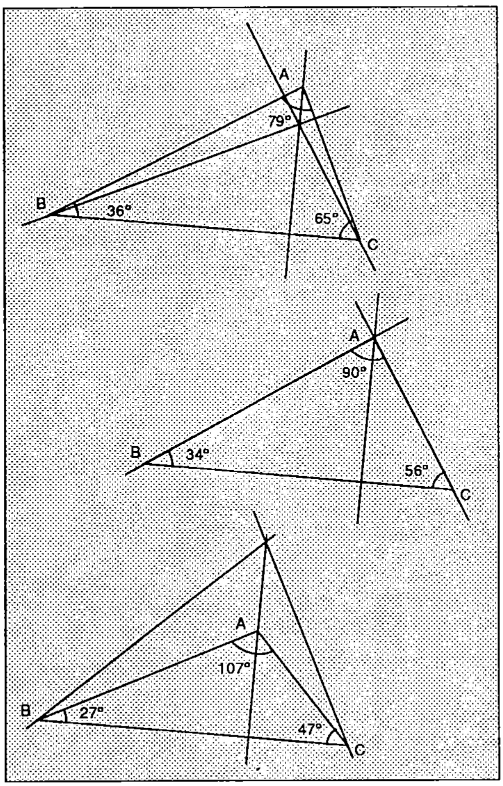
2 - Définition et mesure de ses angles.

3 - Construction des hauteurs : "Géomètre", pour construire une hauteur, suit pas à pas la définition : c'est une droite perpendiculaire, passant par un point (le sommet), perpendiculaire à une droite (le côté opposé).



Cette rigueur dans la définition exigée par l'ordinateur sous-tend celle exigée par la géométrie : c'est l'obligation de réfléchir de **façon successive** et **non globalement** qui va permettre le succès total des constructions réalisées par les élèves de cette classe sur leur cahier dans la phase d'institutionnalisation.

4 - Variation de la position de l'orthocentre. Le cas où l'orthocentre se trouve à l'extérieur du triangle est toujours une difficulté pour de nombreux élèves. "Géomètre" permet en faisant varier la position de l'un des sommets du triangle de faire varier celle de l'orthocentre dans le triangle.



En utilisant une dynamique de la figure, l'observation faite par la classe ressemble à l'utilisation d'un dessin animé : après quelques variations successives de l'orthocentre, les élèves se font leur opinion et après discussion entre eux par petits groupes, proposent les règles suivantes : "*si l'angle est aigu, l'orthocentre est à l'intérieur du triangle ; quand l'angle devient obtus, l'orthocentre passe à l'extérieur*".

L'un d'entre eux souhaite préciser la position pour laquelle l'orthocentre sort du triangle. Il vient donc manipuler la souris. Par essais successifs, il obtient un triangle rectangle. Ce triangle apparaît donc aux élèves comme un triangle particulier non plus à cause de son angle droit, mais parce que un de ses sommets est l'orthocentre du triangle (ceci est écrit dans le cahier et sera utilisé lors des calculs d'aire des triangles).

5 - Les angles obtus d'un triangle. Lorsqu'on veut institutionnaliser les résultats obtenus, les élèves proposent d'écrire : "*si les angles d'un triangle sont aigus, alors l'orthocentre est à l'intérieur du triangle ; si les angles d'un triangle sont obtus, alors l'orthocentre est à l'extérieur du triangle*".

L'utilisation de la formulation "si... alors..." avait déjà été rencontrée au début de l'année et est réinvestie convenablement. Par contre, l'énoncé de la deuxième partie de façon symétrique montre comment l'énoncé des propriétés se fait par mimétisme indépendamment de leur sens. La logique de construction des élèves est du type "*modification à moindre frais*".

On va donc expérimenter grâce à "Géomètre" la conjecture "les angles d'un triangle sont obtus". Oralement le professeur fait préciser le sens donné à "les angles du triangle". Les élèves se mettent d'accord sur le fait que cela signifie que les trois angles sont obtus. Un élève vient donc manipuler : il part d'un triangle ABC ayant l'angle A obtus (B et C sont donc aigus). Il déplace le point pour obtenir l'angle B obtus. La classe observe et l'encourage. La déception est grande lorsque B étant obtus, les élèves s'aperçoivent que A est devenu aigu et cela ne convainc pas encore qu'un triangle ne peut avoir plusieurs angles obtus. Un autre élève propose de choisir l'angle C et de recommencer. Nouvelle déception. Les élèves voient bien qu'un triangle ne peut avoir qu'un seul angle obtus mais n'en sont pas convaincus.

La nécessité d'une preuve mathématique non liée à l'observation fait son chemin : c'est un réel pas en avant pour tous les élèves de cette classe. Il faut l'aide de propriétés "sélectionnées" ci-dessous pour que la preuve soit exprimée clairement :

— définition d'un angle obtus ;

— somme des angles d'un triangle.

Tous vont se mettre d'accord pour dire ou écrire : "si deux angles sont plus grands que 90°, leur somme fait plus que 180° donc il n'y a plus de place pour le troisième". Finalement, on écrit dans le cahier : *"un triangle ne peut avoir qu'un seul angle obtus"*, puis les règles concernant la position de l'orthocentre. Les élèves insistent bien sur l'écriture correcte "si un triangle a un angle obtus, alors son orthocentre est à l'extérieur du triangle".

La construction des médiatrices (sans la procédure médiatrice de géomètre) permettra le réinvestissement des méthodes de travail avec les hauteurs.

En conclusion, l'utilisation de la dynamique de l'image grâce au logiciel a permis une confrontation entre les conjectures des élèves et la "réalité" des figures :

— non-existence de plusieurs angles obtus dans un triangle ;

— confusion entre médiane et médiatrice.

Le débat instauré alors dans la classe a montré comment l'essai de construction des figures répondant aux hypothèses émises permet de se faire une opinion. Faire de nombreux dessins pour résoudre un problème, ne pas émettre une hypothèse seulement à la vision d'une figure, est une méthodologie que les élèves ont réinvestie dans d'autres recherches. Par ailleurs, la construction des divers objets nécessite la connaissance de définitions (ou de propriétés) précises et rigoureuses. D'autant plus que l'ordinateur ne se contente pas d'un énoncé plus ou moins incantatoire : il exige que l'on décortique chacun des éléments de l'énoncé (exemple : médiatrice, **droite** passant par un **milieu perpendiculaire** à un **segment** donné). Le logiciel permet de dégager l'élève des difficultés de constructions plus ou moins maladroites. Ce dernier type d'activité n'est certes pas à rejeter, mais ici, c'est l'activité raisonnement qui est objet de l'apprentissage.

Enfin, et c'est le plus intéressant, ces séquences permettent *"plusieurs formes et plusieurs niveaux de validation dont la mobilisation et la mise en œuvre sont provoquées par les exigences de la situation dans laquelle se trouve l'élève"*. (Balacheff : Preuves et démonstration au collège RDM vol. 3.3). En effet, quand, ayant fini de construire l'orthocentre, les élèves observent son déplacement, ils ne vont pas se contenter de constatations, ils vont essayer d'organiser leurs résultats : c'est cela qui les conduit à préciser le rôle particulier de l'angle droit.

Lorsque les élèves veulent construire un triangle ayant plusieurs angles obtus, ce problème n'apparaît que comme réponse au triangle ayant trois angles aigus. La mobilité des points et la lecture immédiate des angles va leur permettre de chercher à valider leur hypothèse par la construction d'une "figure-exemple" qui puisse être exhibée comme une preuve. L'impossibilité d'obtenir deux angles obtus se constitue en obstacle tellement gênant que c'est à partir de là que la nécessité d'un **raisonnement déductif** s'impose. La figure, parce qu'elle ne se plie pas aux hypothèses, devient tout à coup inutile, négligeable. Les élèves souhaitent travailler à un autre niveau de validation.

Il faut rechercher la multiplication de telles structures conjecturelles, pour donner une autre représentation des problèmes de raisonnement à nos élèves.

ANNEXE 3

Le cerf-volant en sixième

Dans une classe de 6ème, les élèves ont à construire des losanges (exercice extrait de "géométrie Hatier 6ème" page 37 n°2). Des renseignements sont donnés sur la figure.

Les différentes stratégies de construction sont mises en commun après une réalisation individuelle de la figure.

Cet exercice qui est au premier abord uniquement un exercice de construction, débouche en fait sur le maniement des propriétés du losange d'abord implicite (on pourrait en rester là), puis explicite avec l'aide du professeur.

"Pour le deuxième losange on vous a seulement indiqué qu'un côté mesure 3 cm et vous avez tracé les quatre de la même longueur. Pourquoi ?"

Les élèves sont d'abord étonnés par cette question, l'évidence du processus de construction bloque d'abord tout essai d'explication.

Puis se dégage par essais successifs la propriété utilisée : les quatre côtés d'un losange sont égaux.

Les élèves expliquent ensuite individuellement par écrit leur propre construction en précisant pour chaque losange la propriété qui a permis de le construire.

Puis les explications sont confrontées oralement dans la classe. Un élève indique sa construction et la propriété la permettant. Pour que la démarche soit claire pour tous les élèves, le professeur reprend de la façon suivante : "apparemment je n'ai pas assez de renseignements dans mon texte pour faire le dessin mais ce que je sais du losange me permet d'obtenir les renseignements qui me manquent."

Ce qui se traduit par des formulations élèves du type : *"c'est écrit que* EFGH *a un côté de 3 cm, je sais dans ma tête qu'un losange a ses quatre côtés égaux..."*

L'aspect recherche "d'indices" manquants, ainsi que la nouveauté de ce mode de fonctionnement a été perçu comme un défi par beaucoup d'élèves et surtout comme un défi qu'ils pouvaient relever.

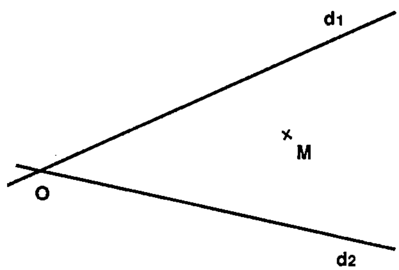
L'activité a duré 2h

Confusion *médiatrice-bissectrice* en sixième

ANNEXE 4

Dans une classe de 6ème l'exercice est proposé à la suite de l'apprentissage de la symétrie orthogonale. La séquence demande deux séances d'une heure séparées par un temps de recherche à la maison.

La consigne est écrite au tableau :

> Deux droites d_1 et d_2 sont sécantes en O.
>
> 
>
>
> Construire le symétrique M_1 de M par rapport à d_1.
> Construire le symétrique M_2 de M par rapport à d_2.

Les différentes phases de l'activité vont mettre en évidence l'évolution des stratégies de résolution. Cela résulte :

— de la prise en compte d'une idée *a priori* sur la figure,

— de son évolution par raisonnement à partir de propriétés.

Dès le début les élèves reproduisent le dessin individuellement. Presque tous tracent la droite (OM). A ce moment, une grande majorité des élèves pose comme conjecture avant même d'avoir effectué toute construction :

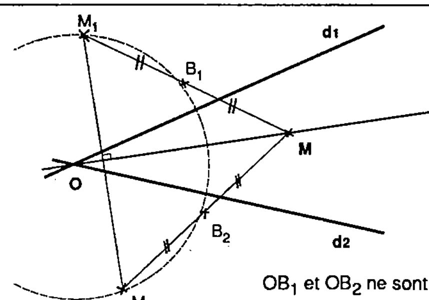
"(OM) *va être la médiatrice du segment* $[M_1M_2]$".

A la première mise en commun, le professeur pose la question : "qu'est-ce qui vous fait penser que (OM) est la médiatrice ?" Un élève propose *"on va avoir* $OM_1 = OM_2$". Cette réponse est admise par tous. Le professeur demande à chacun de faire la construction de la médiatrice de $[M_1M_2]$ pour vérifier :
grosse déception ! (OM) n'est pas médiatrice du segment $[M_1M_2]$...

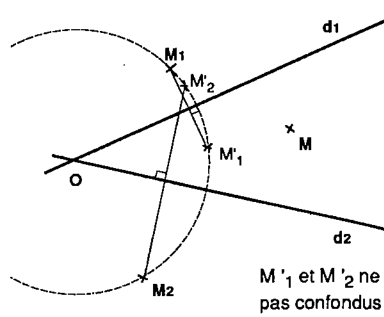
Le professeur propose alors : "peut-être est-ce vrai pour certaines positions du point M ?" Les élèves se mettent en groupe pour chercher.

1 - Des groupes proposent un travail par essai erreur qui va leur permettre de trouver des points qui conviennent.

2 - D'autres groupes prennent la recherche "à l'envers" en se donnant deux points M_1 et M_2 tel que $OM_1 = OM_2$. Deux constructions sont alors faites :



OB_1 et OB_2 ne sont pas les médiatrices de $[MM_1]$ et $[MM_2]$.



M '$_1$ et M '$_2$ ne sont pas confondus en M.

Les différentes stratégies étant exposées, la discussion s'engage :

Un élève écrit au tableau les propositions sûres :

"Il faut $MM_1 = MM_2$".

Un élève affirme :

"ce sont des symétriques donc c'est le double".

Un autre fait préciser :

"c'est le double de quoi ?"

Un troisième complète :

"c'est le double de Md_1 *ou* Md_2".

Le professeur propose de nommer H le milieu de $[MM_1]$ et K le milieu de $[MM_2]$ pour arriver à s'exprimer plus correctement. Il propose d'écrire ce qui vient d'être dit en utilisant H et K.

L'ensemble de la classe "réfléchit". Un élève propose :

"$MM_1 = 2\,HM$ *et* $MM_2 = 2MK$"

Un autre déduit :

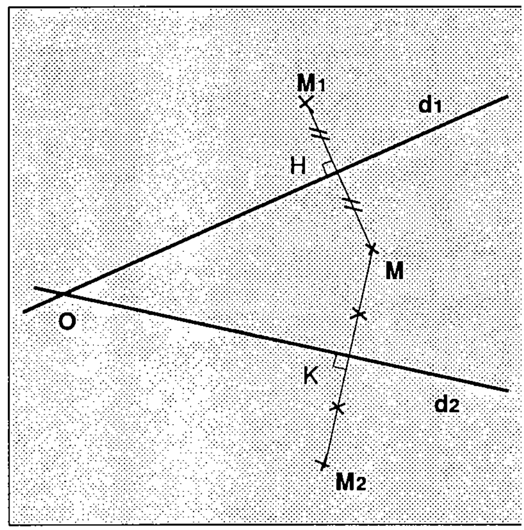
"Il faut $HM = MK$"

Cette égalité permet de proposer un nouveau moyen de trouver des points M :

"Trouver tous les points à égale distance de d_1 *et* d_2".

Le travail individuel fait émerger les conditions menant à la construction habituelle des points de la bissectrice, la propriété d'axe de symétrie de l'angle est mise en évidence par les élèves en utilisant le pliage.

Cela permet aux élèves de réinvestir des méthodes de recherche : construction par essai-erreur ; utilisation de contre-exemple.



Avec deux outils, *médiatrice* et *symétrie orthogonale*, cette situation permet de concevoir la bissectrice comme un "cas particulier " du problème proposé et de la définir comme ensemble de points équidistants à deux droites sécantes.

Les différentes stratégies et les arguments explicités par les élèves pour les justifier montrent que la confusion médiatrice-bissectrice n'est pas seulement au niveau du vocabulaire. Elle est confortée par l'utilisation de l'équidistance pour définir les points de l'une et l'autre et par l'usage du compas pour la construction.

Cette séquence a permis de faire émerger des conceptions fausses et de les pointer : par exemple, on prend deux points sur les côtés de l'angle et la bissectrice passe par le milieu du segment joignant les deux points. Ils ont compris pourquoi cela marchait parfois : en effet les élèves ont remarqué qu'implicitement ils choisissaient des distances égales sur les côtés.

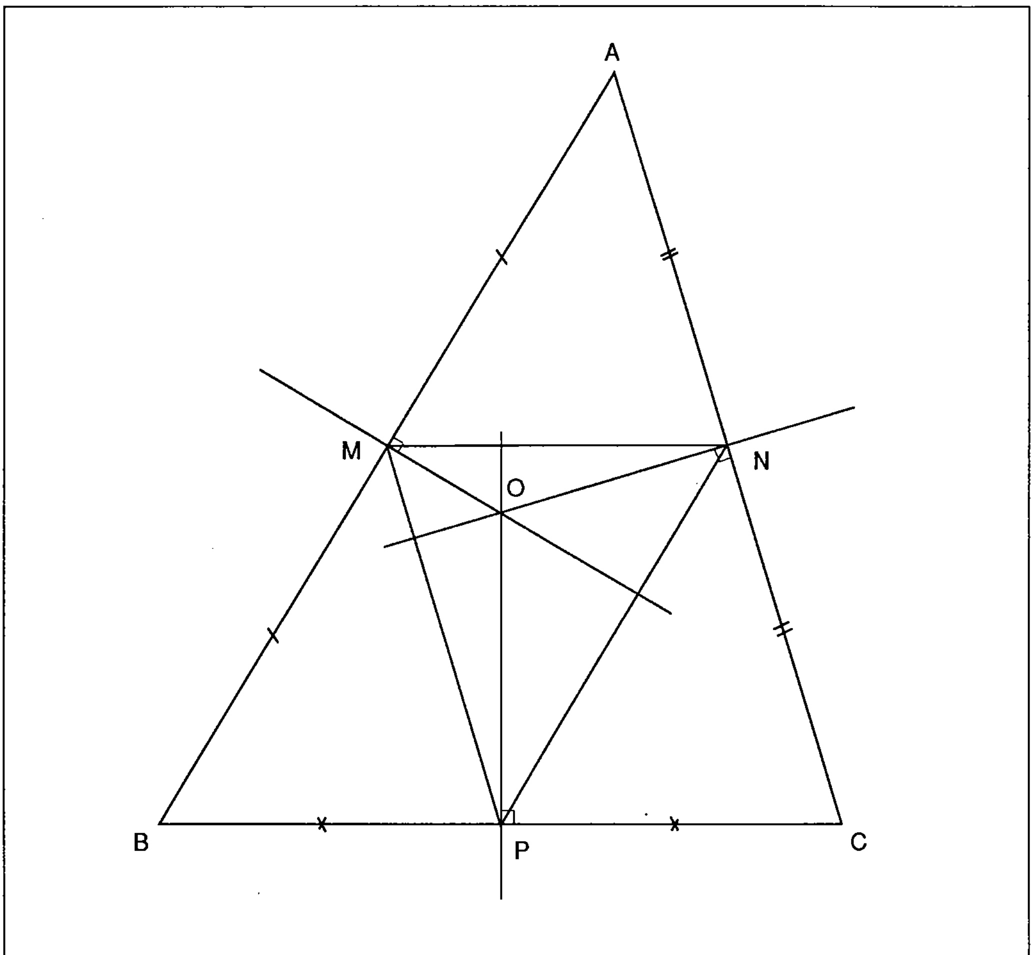
Droites particulières dans le triangle en quatrième (hauteurs et médiatrices)

ANNEXE 5

Dans une classe de 4ème, une feuille comportant la figure codée reproduite ci-dessous est distribuée à chaque élève avec la consigne suivante :

Pierre dit "O est le point commun des trois hauteurs du triangle MNP". Jacques dit "O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC". Qui a raison ? Justifier.

Après distribution de la consigne, lors d'une phase individuelle de cinq minutes, les élèves mesurent, vérifient à l'aide d'instruments sur la figure. Puis ils confrontent par deux leurs résultats. Ils échangent sur les caractéristiques de la figure et notent au fur et à mesure les définitions et propriétés des hauteurs, du cercle circonscrit et des médiatrices. Cette recherche dure une heure.



A la suite de ce travail, les échanges ont été nombreux, hors de la classe. C'est pourquoi, à la demande des élèves, au début de la deuxième heure de la séquence, définitions et propriétés sont précisées. Puis les élèves se répartissent en groupes de trois ou quatre pour une recherche des propriétés intervenant dans la justification. Par contre pour un essai de rédaction, les élèves ont préféré réfléchir et rédiger à deux, reprenant les mêmes paires qu'au début.

Dans un premier temps, la figure reste un dessin concret sur une feuille de papier. Les angles droits sont vérifiés à l'équerre et les milieux de segments le sont par mesure. Le cercle circonscrit est tracé au compas avec diverses réussites. La fiabilité du matériel et/ou l'habilité de l'élève rend souvent imprécis les tracés et explique une courte phase d'indécision quant à la réponse à apporter.

Après les premiers tâtonnements et essais de vérification, la différence entre le dessin et la figure, se dégage. Les élèves ont individuellement donné une réponse à la question de la consigne. Ces réponses font l'objet d'échange par paires, et les élèves se convainquent très vite que Pierre et Jacques ont raison. Le débat qui s'instaure, entraîne la relecture de la consigne. A la suite de cette deuxième lecture, les élèves précisent le sens de chaque mot.

La définition de la hauteur, droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé est connue et très souvent écrite correctement. Cependant deux groupes se sont centrés sur le terme de point commun. Ils ont tenté une justification en avançant le fait que dans un triangle les trois hauteurs sont concourantes.

Même si ce n'est pas toujours écrit de manière explicite, la relation entre centre du cercle circonscrit et point de concours des médiatrices est établie et utilisée. Cette relation a été favorisée par une recherche active des élèves de définitions, sur leurs cahiers de cours, leurs fiches de propriétés et leur livre.

Encore plus ici que pour les hauteurs, l'accent est mis sur le point de concours des médiatrices. "*Les trois médiatrices sont concourantes en un point* O *qui est le centre du cercle circonscrit au triangle et* ABC *est inscrit dans ce cercle*".

En parallèle avec le centre du cercle, point d'intersection des médiatrices, droites perpendiculaires et passant par le milieu, certains groupes se sentent obligés d'écrire. "*Nous savons que Jacques a raison car quand on prend le compas on trouve que* OA = OB = OC".

Pour ces élèves la propriété semble être une preuve, mais elle est loin de les convaincre entièrement. Aussi ils insistent sur l'utilisation du compas, qui semble leur convenir davantage.

Il existe une opposition entre la phase heuristique où le centre du cercle circonscrit est pris comme le point à égale distance des trois sommets A , B , C et la phase rédactionnelle où le centre du cercle est pris comme point de concours des trois médiatrices. Les médiatrices sont alors définies comme droites perpendiculaires passant par le milieu des côtés. La prégnance de cette propriété est compréhensible car la notion de médiatrice découle directement de la prise d'information sur la figure.

La liaison entre les deux triangles est rarement faite de manière explicite, les médiatrices de l'un étant les hauteurs de l'autre. Les hauteurs du triangle MNP sont reconnues mais leur justification est plus difficilement abordée. Il est vrai qu'à ce niveau la vision de la figure et les étapes de raisonnement se complexifient. La prise d'informations se mêle dans les deux triangles et un travail doit être réalisé sur une partie de la figure avant de la plonger dans son ensemble.

La difficulté réside dans la recherche du champ des énoncés, dans le nombre de pas de la justification et dans la transformation du statut des divers énoncés (où la conclusion du précédent devient hypothèse du suivant).

Il est intéressant de constater que la propriété de la droite passant par les milieux des deux côtés d'un triangle est utilisée par la quasi totalité des groupes. "*On sait que dans le triangle* ABC , N *est le milieu de* AC , P *milieu de* BC . *Dans le triangle la droite qui joint les milieux des deux côtés est parallèle au troisième côté donc* MP//AB ".

Progressivement toutes les propriétés utiles à la justification sont énoncées ou sous-jacentes à ce qui est dit et/ou écrit. Ces propriétés sont données dans un ordre pas toujours logique pour la démonstration mais les textes ont été rédigés avec soin.

Dans cette activité, la figure contient en elle-même la réponse à la question et la situation de confrontation entre pairs permet de prendre conscience du passage du raisonnement implicite au raisonnement explicite.

Les élèves ont réagi très vite à ce travail et la phase de recherche a été très active. La situation est d'emblée complexe et les outils à utiliser pour pouvoir justifier la réponse obtenue sont nombreux. Pourtant la phase de tâtonnement avec les instruments est réduite, et la phase heuristique est centrée sur la recherche de définitions et théorèmes. L'articulation de l'ensemble de ces propriétés est difficile.

Les textes obtenus sont lourds avec des redites, la plupart du temps pour se convaincre avant de convaincre les autres. La difficulté reste au niveau d'une rédaction formelle bien que la qualité des textes montre un mieux sensible pour certains.

Même si le niveau de langage et de rédaction reste malhabile un net progrès est réalisé pour l'ensemble des groupes. Les élèves sont devenus plus autonomes dans la recherche de propriétés. C'est cette phase : chercher un corpus d'énoncés permettant d'accéder à la démonstration, qui devient dominante dans leur travail.

Actifs et critiques, les élèves ont le souci de dépasser l'observation de la figure pour essayer d'expliciter et de mettre en forme un raisonnement.

ANNEXE 6

Construire un rectangle qui a deux côtés consécutifs égaux en sixième

Les élèves par groupe de trois ont pour consigne :

"Tracer un rectangle ayant deux côtés consécutifs de même longueur".

Lorsque la construction est terminée par un groupe, la question suivante lui est posée :

"vous avez obtenu un carré, comment cela se fait-il ?".

Cette question peut être considérée comme un piège, mais ces élèves sont habitués depuis trois mois à essayer d'aller plus loin que le simple constat.

Des "preuves" de différents niveaux sont produites.

Des groupes refont plusieurs fois la construction et en concluent que ça donne toujours un carré.

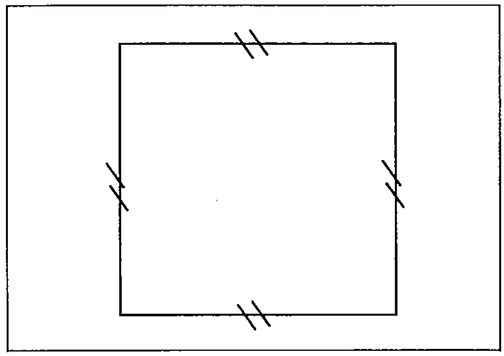
D'autres fournissent une réponse du type :

"si ce n'était pas de la même longueur, ça ne serait pas droit".

Quelques-uns formulent une telle explication par écrit de façon plus précise :

"si les deux côtés consécutifs sont égaux, les deux autres le sont aussi parce que si on doit faire un rectangle ses côtés opposés doivent être de même longueur".

Un groupe a produit ce dessin.



Bien que le carré ait déjà été rencontré comme rectangle particulier des élèves continuent à dire *"un rectangle n'a pas ses côtés consécutifs égaux"*.

Dans cette activité la plupart des élèves se heurtent au fait que la figure obtenue est un carré. Ce qui entraîne deux sortes d'attitudes :

— comme c'est un carré alors il n'y a pas lieu d'en dire plus. Les explications sont des répétitions de la consigne.

— le carré n'est pas perçu comme un rectangle particulier. C'est le dessin qui est remis en cause.

On peut se rappeler que d'une part le niveau de langage d'un élève de sixième est encore essentiellement descriptif et que le carré et le rectangle restent pour lui deux objets distincts.

L'activité a duré une heure.

Bibliographie

ALIBERT D., Sur le rôle du groupe classe pour obtenir et résoudre, une situation a-didactique. in Recherches en didactique des mathématiques, vol 11/1,1991.

AUDIBERT G., Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane. Thèse-Etat-Mathématiques, 1982, Montpellier, 2 vol. ; rééd. Paris, APMEP, 1984.

BALACHEFF N., Preuve et démonstration en mathématiques au collège in Recherches en didactique des mathématiques, vol. 3/3, 1982.

BERGUE D., BORREANI J., POULAIN B., De la figure vers la démonstration Irem de Rouen 2 vol., 1989-1990.

BERGUE D., BORREANI J., POULAIN B., Raisonner au collège Irem de Rouen 1991.

Didactique des mathématiques. Le dire et Le faire, sous la direction d'Alainl Bouvier, Cedic-Nathan, 1986.

DUVAL R., Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. in Annales de didactique et de sciences cognitives vol 1 1988.

DUVAL R., Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. in Annales de didactique et de sciences cognitives vol 1 1988.

DUVAL R. EGRET M.A., L'organisation déductive du discours : inter action entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration. in Annales de didactique et de sciences cognitives, Irem Strasbourg, vol. 2, 1989.

DUVAL R. EGRET M.A., Comment une classe de 4ème a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration. in Annales de didactique et de sciences cognitives, Irem Strasbourg, vol. 2, 1989.

GRAS R. GIORGIUTTU I. Le micro-ordinateur outil interactif de révélation, d'analyse et d'apprentissage en géométrie. in Actes de l'Université d'été Informatique et Enseignement de la géométrie Irem de Toulouse,1990.

GRAS R., Publications de l'IRMAR fascicule 5, 1988-1989.

LABORDE C., Problèmes de l'enseignement de la géométrie au collège in Annales de didactique et de sciences cognitives, Irem Strasbourg, vol. 1, 1988.

LEGRAND M., Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique in Recherche en didactique des Mathématique vol 9/3, 1988.

MESQUITA A.L., RAUSCHER J.C., Sur une approche d'apprentissage de la démonstration in Annales de didactique et de sciences cognitives, Irem Strasbourg, vol. 1, 1988.

PLUVINAGE F., Aspects multidimentionnels du raisonnement en géométrie. in Annales de didactique et de sciences cognitives, Irem Strasbourg, vol. 2, 1989.

Suivi scientifique. Nouveaux programmes de sixième, 1985-1986 Bulletin Inter-Irem premier cycle,rééd.1989.

Suivi scientifique. Nouveaux programmes de cinquième, 1986-1987. Bulletin Inter-Irem premier cycle, rééd.1989.

Suivi scientifique. Nouveaux programmes de quatrième, 1987-1988. Bulletin Inter-Irem premier cycle, rééd. 1989.