REPERES - IREM . n°8 - juillet 1992

ENSEIGNER PAR LES ACTIVITES

Marie-José BACH,
Dominique GAUD,
Jeannette GAY,
Jean-Paul GUICHARD,
Madeleine MAROT,
Claude ROBIN
Irem de Poitiers

"Activité" est un mot un peu galvaudé. Dans l'enseignement primaire on parle plus volontiers de "situations-problèmes", dans le premier cycle d'"activités", et dans le second cycle de "travaux pratiques". Nous nous contenterons dans cet article de parler d'"activités" en précisant ce que recouvre pour nous la notion d'activité.

1 - Pourquoi des activités ?

Enseigner par les activités c'est d'abord essayer de tenir compte des recherches fondamentales faites en psychologie cognitive et en didactique des mathématiques. Les apports sur lesquels nous nous appuyons sont les suivants :

— acquérir des connaissances, c'est d'abord se les approprier et cette appropriation passe par la construction du sens : "ce qui donne du sens aux concepts ou théories, ce sont les problèmes qu'ils ou qu'elles permettent de résoudre" (Piaget).

— les connaissances ne s'empilent pas, mais se construisent les unes par rapport aux autres. Il y a succession de phases d'équilibre et de déséquilibre, une phase de déséquilibre correspondant à une réorganisation momentanée des connaissances ; pour acquérir une connaissance nouvelle il faut parfois détruire une connaissance antérieure. Les débats entre élèves favorisent cette réorganisation du savoir grâce aux conflits cognitifs qu'ils suscitent.

— quelle que soit la nouvelle notion enseignée, l'élève n'a pas la tête vide : il a déjà des connaissances et des représentations mentales sur la notion.

— l'élève en tant qu'individu a sa propre logique qui n'est pas nécessairement celle de l'enseignant, ni celle de la discipline enseignée.

Enseigner par les activités c'est aussi respecter le texte des programmes en vigueur. Voici des extraits de celui du premier cycle (brochure CNDP 1990 : Mathématiques classes des collèges).

—*"Le travail personnel, c'est déjà le travail effectué pendant les heures de classe. Connaître et progresser, ce n'est jamais recevoir passivement, c'est faire appel aux acquis individuels, aux maturations antérieures, à l'effort imprévisible et inégal, d'intégration du nouveau dans l'ancien. C'est pourquoi il convient de faire une large place à l'activité de l'élève et à sa propre capacité d'apprendre." (p 13)*

— *"On devra donc privilégier l'activité de chaque élève... "*

— *"Dès lors, les professeurs vont avoir à choisir des situations créant un problème, dont la solution fera intervenir des "outils", c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci auront été bien maîtrisées, elles fourniront à leur tour des "outils" qui permettront un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente." (p 20)*

— *"Une appropriation mathématique, pour un élève, ne saurait se limiter à la connaissance formelle de définitions, de résultats, de techniques et de démonstrations : il est indispensable que les connaissances aient pris du sens pour lui à partir de questions qu'il s'est posées et qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes." (p 20)*

— *"Le professeur doit donc procéder avec une attention particulière au choix pertinent des situations à étudier. Il doit aussi veiller à bien organiser les phases du déroulement de l'activité. Une condition première est de prévoir une durée suffisante. Pour le développement complet de l'activité formatrice, de la phase initiale à la mise en place des connaissances désormais considérées comme acquises, l'échelle des temps est en heures, voire en semaines." (p 21)*

2 - Qu'est ce qu'une activité ?

Dans le contexte des nouveaux programmes de mathématiques de collège (mis en place à partir de 1986), le mot activité a pris un sens particulier du fait même que les instructions officielles donnent des finalités précises aux activités choisies par le professeur et les réfèrent aux situations-problèmes. C'est d'ailleurs à partir de la lecture et de l'analyse du programme, que nous avons formulé "notre" définition de ce qu'est une activité, qui nous a servi de guide pour en fabriquer. Voici donc la définition que nous rappelons dans chacune de nos brochures qui rendent compte de l'expérimentation des nouveaux programmes.

Pour définir une activité nous avons retenu les critères suivants (conformément aux programmes) :

- *l'énoncé est court (en général) et compris de tous les élèves*
- *la réponse n'est pas évidente*
- *pour répondre l'élève devra :*
  - *- soit découvrir la connaissance visée,*
  - *- soit découvrir ce qu'il faudrait savoir pour résoudre le problème,*
  - *- soit mobiliser les notions antérieures en vue de les réorganiser.*

Le problème est riche (plusieurs démarches sont possibles ou (et) plusieurs solutions sont possibles). L'élève peut formuler des questions intermédiaires (ce qui exclut un recours à un découpage a priori fait par le professeur).

On pourra comparer nos critères à ceux qu'utilisent nos collègues de l'Irem du Mans pour définir *une situation-problème* et à ceux qu'utilise Régine DOUADY de l'Irem de Paris VII pour définir *un problème* (visant à la construction de nouvelles connaissances).

La construction du savoir mathématique par les élèves suppose que soient respectés quelques principes fondamentaux.

1 - les contenus mathématiques doivent avoir un sens pour l'élève
2 - l'élève doit être mis en situation d'activité intellectuelle vis à vis des mathématiques
3 - l'élève doit faire siens les termes du problème
4 - les difficultés et les qualités des élèves doivent être observées et prises en compte
5 - l'enseignement par situations-problèmes repose sur la construction d'un champ de concepts à partir d'un champ de problèmes.

Les situations-problèmes visent la construction des savoirs et des concepts contenus dans les programmes. Ce ne sont ni des situations-bricolage ou jeu (sans objectif de construction d'un savoir), ni des problèmes ouverts (simples réinvestissements d'un savoir acquis), ni des "activités dirigées" au sens scolaire traditionnel de l'expression.

L'énoncé d'une situation-problème mérite beaucoup d'attention car il n'est pas toujours aisé de confectionner un "bon" énoncé.

Qu'est-ce qu'un "bon" énoncé ? Il est possible d'en donner immédiatement quelques critères :
1 - être compris par tous les élèves
2 - être un énoncé ouvert à la recherche des élèves
3 - susciter chez les élèves un sentiment de défi intellectuel
4 - ne pas comporter de sous-entendus
5 - ne pas porter implicitement la solution de l'enseignant
6 - ne pas nécessiter pour être compris de connaître déjà la solution.

La recherche commune d'un "bon" énoncé par un groupe d'enseignants montre que s'il est aisé de s'accorder sur la valeur des critères précédents, il est moins facile de les appliquer avec l'assentiment de tous. La meilleure manière d'affiner et de préciser ces critères est de tester des énoncés auprès des élèves.

Irem du Mans
L'enseignement par situations - problèmes
E. BARBIN - B. CHARLOT

La résolution de problèmes joue un rôle fondamental dans l'apprentissage. Mais suivant les moments de l'apprentissage, les problèmes remplissent des fonctions différentes, essentiellement :
• favoriser la construction de nouvelles connaissances (à travers les diverses phases d'action, formulation, validation, institutionnalisation)
• fournir des occasions d'emploi diverses d'anciennes connaissances et ainsi cerner leur domaine d'efficacité et de validité.

Etant données les hypothèses sur la construction des concepts, nous choisissons des problèmes remplissant certaines conditions :
• l'énoncé est facile à comprendre et l'élève est capable d'envisager ce que peut être une réponse au problème ; ceci est indépendant de sa capacité à en proposer une (cette condition est valable pour tous les problèmes)
• la réponse n'est pas évidente mais, compte tenu de ses connaissances, l'élève peut engager une procédure de réponse partielle
• pour répondre complètement au problème, l'élève devra construire la connaissance dont le maître vise l'apprentissage
• le problème est riche ; le réseau de concepts impliqués est assez important, mais pas trop pour que l'élève puisse en gérer la complexité
• le problème est suffisamment ouvert pour que l'élève puisse envisager des questions non formulées dans le texte et utiliser des procédures diverses. Cependant les possibilités qui lui sont offertes ne sont pas trop grandes de façon à ce qu'il puisse effectivement faire des choix. Ces conditions éliminent par exemple un

découpage du problème en de trop petites questions pour lesquelles il n'y a qu'une procédure possible
• *le problème peut se formuler dans au moins deux cadres, chacun ayant son langage, cadres entre lesquels on sait établir des correspondances.*

R. DOUADY

Suivi Scientifique Inter Irem 6e

A propos des différences, on peut constater que la fonction que nous attribuons à l'activité est plus "didactique" que pour l'Irem du Mans, mais moins "pointue" que pour Régine DOUADY. En particulier nous ne faisons pas de référence explicite au changement de cadre, même si nous essayons d'évoquer ce paramètre dans la construction de nos activités. Par contre les analogies et les convergences de point de vue font un peu regretter les appelations différentes citées dans l'introduction, d'autant plus que les "activités", qui figurent dans tous les manuels , satisfont rarement aux critères communs aux trois définitions cidessus ainsi qu'à ceux du programme.

Actuellement il nous semble que ce serait le terme de *situation-problème* qui conviendrait le mieux à ce type d'activité que nous avons essayé de mettre en place, d'autant que cela assurerait une continuité avec le primaire.

3 - Comment construire une activité ?

Dans les exemples qui suivent nous donnons l'énoncé de l'activité, expliquons nos choix, donnons les éléments de notre analyse *a priori*. Tous ces exemples sont des activités que nous avons expérimentées dans nos classes depuis plusieurs années. Le problème de la gestion dans la classe est abordé au paragraphe 4, à partir de certains de ces exemples. Mais pour aider le lecteur à mieux représenter ce qui peut se passer en classe nous avons intégré des éléments faisant référence à ce que nous faisons et ce que font les élèves en classe. Néanmoins ce sont là des idées qui peuvent être reprises, mais leur reproductibilité demande à chaque professeur une grande souplesse car il doit gérer une part d'imprévu et d'imprévisible, l'activité étant dévolue à des élèves, à des classes chaque fois différentes [voir paragraphe 4].

a) Des exemples :

exemple 1 : REPERES EN 3EME

L'OBJECTIF de cette activité est de faire découvrir les formules de calcul des coordonnées d'un vecteur, du milieu d'un segment (non vu en 4ème) et de la distance dans un repère orthonormal.

ENONCE

On donne un repère orthonormal d'origine O et les points E , R , S , T de coordonnées respectives :
E(-6 ; 1) , R(1 ; 5) , S(6 ; 2) , T(-1 ; -2) .
Que dire du quadrilatère ERST ? Comment le prouver ?

Les PREACQUIS sont :

— équation de droite, cœfficient directeur d'une droite, condition de parallélisme de deux droites (3ème)

— les caractérisations du parallélogramme (4ème)

— l'énoncé de Pythagore (4ème)

— la trigonométrie (4ème - 3ème)

— la notion de vecteur (4ème)

POURQUOI cette activité ?

Au collège, un important travail est mené sur les configurations particulières dans deux directions : calculer et démontrer. L'intérêt des formules à découvrir est de pouvoir :

— calculer des éléments métriques de configurations (longueurs, aires, périmètres...)

— calculer les éléments nécessaires pour démontrer qu'une figure est une configuration connue.

L'énoncé de l'activité est donc en rapport avec l'utilisation que l'on va en faire. (Mise en place de l'outil analytique pour démontrer).

ANALYSE *a priori* de l'activité :

Pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, les démarches possibles pour les élèves sont de montrer que :

— les diagonales ont même milieu

— les côtés opposés ont même longueur

— les côtés opposés sont parallèles

— deux côtés sont à la fois parallèles et de même longueur
— deux vecteurs sont égaux.

La seule démarche que l'élève peut justifier est celle qui consiste à démontrer que les côtés opposés sont parallèles grâce aux équations de droites. Or, cette notion pourtant étudiée dès le début de l'année et réutilisée par la suite, reste mal maitrisée par les élèves. De plus, elle est longue à mener à bien, même si on peut se limiter à la recherche du coefficient directeur.

S'ils veulent utiliser les côtés opposés égaux, ils peuvent compter les carreaux et se ramener à des triangles rectangles pour les calculs des distances ET , TS , SR , RE par l'énoncé de Pythagore. Cette méthode est utilisable ici, mais est-elle généralisable ?

Comment trouver ces distances lorsqu'on ne peut plus compter les carreaux ?

La méthode des diagonales pose ici le problème du calcul des coordonnées du milieu d'un segment.

Quant aux vecteurs, comment prouver que deux vecteurs sont égaux ?

* Nous avons travaillé sur le choix des données qui sont les VARIABLES DIDACTIQUES de cette activité.

• Tout d'abord les coordonnées sont entières, ce qui permet le comptage et donc un démarrage possible pour tous. De plus, on peut aussitôt avoir une idée de ce que l'on a à démontrer.

• Une des coordonnées du milieu est 0. L'élève peut donc penser qu'il suffit d'ajouter les coordonnées des extrémités mais cette procédure est aussitôt mise en défaut pour le calcul de l'autre coordonnée.

• La position des points, dans trois quadrants, permettra de mieux "valider" les formules. De plus on obtient ainsi des coordonnées de vecteurs négatives ou positives alors que pour l'élève coordonnées de vecteurs et coordonnées de points sont souvent liées (ex : $\overrightarrow{RS}$ dans le premier quadrant a une coordonnée négative)

• Le choix des coordonnées des points qui donne un cœfficient directeur qui se simplifie pour une droite ($-\frac{3}{5} = -0{,}6$), et un autre qui ne se simplifie pas ($\frac{4}{7}$) permet de mettre en évidence les coordonnées 7 et 4 du vecteur $\overrightarrow{TS}$.

• Choix de la consigne. On demande ici une preuve ; l'élève va donc chercher d'autres méthodes moins lourdes que celle des équations de droite, cette dernière étant tout de même le garant de toutes les autres.

GESTION de la classe :

Après un travail individuel, les élèves comparent leurs méthodes et résultats en groupes. Puis le professeur organise l'exposé des élèves qui rendent compte devant la classe

— de leurs recherches

— de leurs méthodes

— des points non élucidés.

Le professeur synthétise autour des méthodes de calcul des coordonnées du milieu d'un segment, de la distance de deux points et des coordonnées du vecteur sans nécessairement faire de démonstration.

Un exemple de gestion de cette activité est donné au paragraphe 4 .

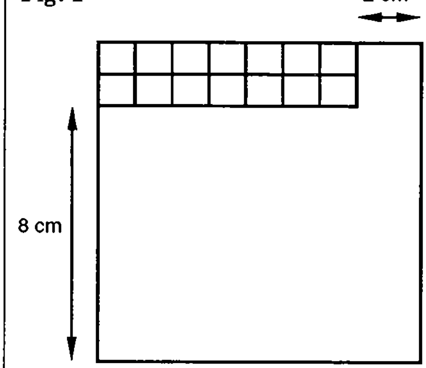
Exemple 2 : RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS EN 4EME

Les OBJECTIFS essentiels de cette activité sont la mise en équation d'un problème et la résolution d'équations du type $ax + b = cx + d$ par la méthode algébrique.

ENONCE : La boîte à pêche.[1]

> Mon oncle, qui est pêcheur et bricoleur, veut se fabriquer une boîte à pêche pour son petit matériel ayant les caractéristiques suivantes : 14 cases carrées pour les hameçons disposées en deux rangées comme sur le dessin ci-contre.
>
> Il veut que sa boîte soit carrée et ne sait pas quelle taille il faut donner aux 14 cases. Peux-tu l'aider à construire sa boîte ?

Fig. 1



Les PREACQUIS sont :

— l'initiation au codage par une lettre (5ème)

— la résolution d'équations du type :

$$a + x = b \quad \text{et} \quad ax = b$$

par recours au sens des opérations (5ème)

— calcul numérique et algébrique élémentaire de 5ème.

POURQUOI cette activité ?

La résolution de problèmes est un objectif fondamental tout au long du collège (Cf. les programmes et instructions du collège, partie travaux numériques). De plus, la mise en équation et la résolution n'ont de sens que par rapport à un problème à résoudre.

La consigne est simple à comprendre et la situation facilement imaginable ; diverses expérimentations faites montrent qu'aucun élève n'a eu de doute sur l'existence d'une solution.

Le choix du support est ici très important. Le problème est énoncé avec un support géométrique et un changement de cadre peut s'opérer (géométrique-numérique). De plus, le problème est résoluble dans les deux cadres, la résolution dans le cadre géométrique permettant d'illustrer et de "valider" les différentes étapes de la résolution algébrique.

(1) Activité conçue par Simon FROGER.

Les VARIABLES DIDACTIQUES :

Le carré est une configuration bien connue des élèves et ses propriétés sont facilement mobilisables. Les nombres sont choisis pour que la solution soit un décimal non entier qui peut difficilement être trouvé par "devinette". Si la solution avait été trop évidente, les élèves auraient pu contourner le problème.

Deux STRATEGIES sont possibles, une géométrique et une algébrique. Dans le cadre algébrique, la mise en équation est possible par tous, mais ils manquent d'outils pour résoudre. L'élève ne découvrira pas forcément la connaissance nouvelle (technique de résolution) mais pourra remplacer son inconnue par diverses valeurs numériques et atteindre éventuellement la solution. Cette démarche permet à l'élève de continuer à se construire la notion de solution d'une équation. Il se rendra compte de ce qu'il devra apprendre à faire pour résoudre rapidement ce type de problème. N'est-ce pas l'objectif majeur d'une activité ? Lors de la synthèse collective, les deux méthodes de résolution trouvées par les élèves sont mises en parallèle pour illustration et validation.

Un transparent, projeté au rétroprojecteur, permet de visualiser, par rabats successifs, les différentes étapes de la solution géométrique en la traduisant au fur et à mesure de façon algébrique :

— $7x + 2 = 2x + 8$ (fig. 2)

— $7x = 2x + 6$ (on enlève 2 cm de chaque côté, on obtient encore un carré. fig. 3)

— $5x = 6$ (on elève 2 carreaux de chaque côté, on obtient encore un carré. fig. 4)

La nouvelle connaissance visée, mise en équation d'un problème et résolution algébrique d'une équation, est alors institutionnalisée par le professeur. Il semble important que l'élève sache sur quoi l'apprentissage va porter. Ce travail de décontextualisation est un moment essentiel.

Fig. 2

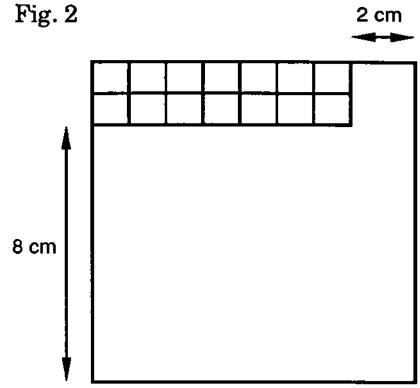


Fig. 3

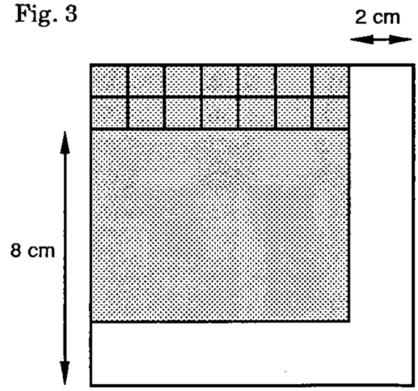
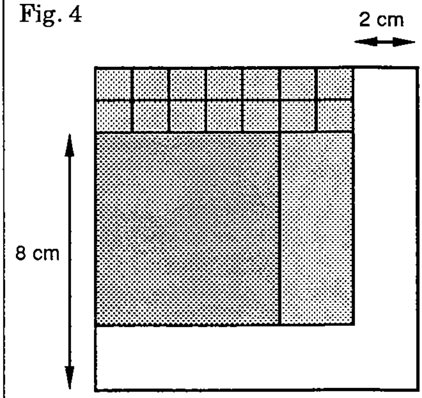


Fig. 4



Exemple 3 : **DIFFÉRENTES ÉCRITURES D'UN NOMBRE EN 6EME**

OBJECTIFS

Faire le point sur les différentes écritures d'un nombre. L'objectif ici n'est pas de réintroduire les décimaux et les fractions décimales (travail déjà fait à l'école élémentaire) mais de réactiver les connaissances qui sont en cours d'apprentissage.

Les PREACQUIS sont ceux de l'école élémentaire.

ENONCE (voir les séries de cartes ci-après)

> Une série de cartes rouges est donnée à chaque élève,
>
> 1° temps : "voici une série de cartes sur lesquelles sont inscrits des nombres. Classe les cartes dans différents paquets. Explique sur une feuille, les raisons de ton classement",
>
> 2° temps : "voici une nouvelle série de cartes (vertes), mets-les dans les paquets déjà faits en respectant la même règle. Si tu n'y arrives pas, change ton classement du 1° temps."
>
> 3° temps : même consigne avec les cartes bleues
>
> 4° temps : "écris sur ta feuille ce que tu as obtenu dans chaque paquet et les raisons de ton classement."

DEROULEMENT prévu en fonction du choix des nombres dans les différentes séries. La première série va certainement provoquer le classement en trois paquets :

entiers — nombres à virgule — fractions.

L'expérimentation l'a confirmé.

Le deuxième paquet (cartes vertes) vient déstabiliser les élèves et provoque un conflit cognitif : il y a changement de stratégie pour le classement puisque le premier ne convient plus.

Le troisième paquet doit permettre d'affiner le travail fait avec les paquets 1 et 2.

1ère Série de cartes (cartes rouges)

5	$\frac{460}{100}$	20,8	45,67
5,0	$\frac{208}{100}$	$\frac{2080}{100}$	$\frac{4567}{100}$
$\frac{50}{10}$	2,08	0,025	$\frac{45670}{1000}$
4,6	$\frac{2080}{1000}$	$\frac{25}{1000}$	4,567
$\frac{28}{10}$	2,080	$\frac{250}{10000}$	45,067

2ème Série de cartes (cartes vertes)

$4 + 0{,}6$	$20 + 0{,}8$	$4 + \frac{10}{10}$
$4 + \frac{6}{10}$	$4 + \frac{60}{100}$	$45 + \frac{67}{1000}$
$2 + \frac{8}{100}$	$0{,}02 + \frac{5}{1000}$	$4 + \frac{567}{1000}$
$2 + \frac{80}{1000}$	$\frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$	$45 + 0{,}67$
$2 + 0{,}8$	$45 + \frac{67}{100}$	$2 + 0{,}08$

3ème Série (cartes rouges)

$10 \times 0{,}5$	$25 \times \frac{1}{1000}$
$0{,}46 \times 10$	$208 \times \frac{1}{100}$
$0{,}05 \times 100$	$208 \times \frac{1}{10}$
$10 \times 0{,}208$	$50 \times \frac{1}{10}$
$46 \times \frac{1}{10}$	$460 \times \frac{1}{100}$

Exemple 4 : SYSTEME D'ÉQUATIONS EN 3EME

Construire en vraie grandeur la figure ci-dessous sachant que :

- (MN) // (BC)
- le périmètre de ABC est égal à 17.

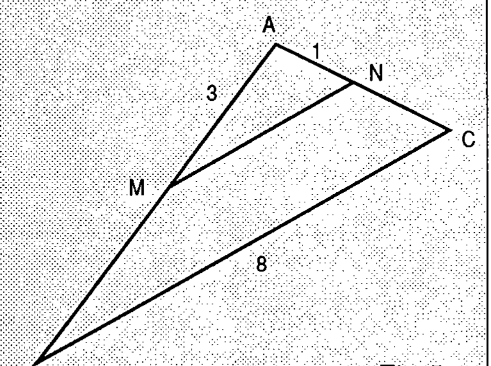


Fig. 5

OBJECTIFS :

Amener la résolution algébrique de systèmes d'équations à deux inconnues (différentes méthodes).

Les PREACQUIS sont :

— l'énoncé de Thalès (3ème)

— la résolution d'un problème par la mise en équation (4ème)

— le calcul numérique et littéral de 4ème.

CHOIX de la situation :

Une figure étant donnée dans l'énoncé, les élèves vont percevoir dans cette activité, au départ, une "situation de Thalès" déjà rencontrée en début d'année. Très vite, ils se rendront compte de la nécessité d'utiliser deux inconnues pour trouver les deux longueurs qui leur manquent pour pouvoir effectuer la construction, et seront confrontés alors au problème de la résolution (le codage NC = x et BM = 3x n'est pas possible en 3ème, les élèves ne connaissant pas l'énoncé de Thalès "projection").

Aucun codage n'est imposé dans le texte ; suivant les inconnues choisies par les élèves, on est amené à plusieurs types de systèmes :

* Avec AB et AC comme inconnues x et y

$$\begin{cases} x + y + 8 = 17 \\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{1} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + y + 8 = 17 \\ \dfrac{3}{x} = \dfrac{1}{y+1} \end{cases}$$

* Avec MB et NC comme inconnues x et y

$$\begin{cases} 3 + x + 8 + y = 17 \\ \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y+1}{1} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 3 + x + 8 + y = 17 \\ \dfrac{3}{x+3} = \dfrac{1}{y+1} \end{cases}$$

* Avec AB et AC codés x et 9 - x

$$\begin{cases} x + (9 - x) + 8 = 17 \\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{9-x}{1} \end{cases}$$

Il y a déjà eu substitution préalable. AC est codé par référence au périmètre et à AB.

Lors de la synthèse, les résolutions de ces systèmes peuvent faire apparaître différentes méthodes algébriques, en particulier l'égalisation et la substitution. La méthode par addition peut apparaître moins performante dans cette activité, à moins de penser en termes de stratégie "d'élimination" et on sait que la soustraction est une bonne technique. Le professeur en profite pour dégager une stratégie générale de résolution de problèmes : se ramener à un problème connu, ici une équation à une seule inconnue.

Exemple 5 : RACINES CARRÉES EN 3EME

ENONCE

RAIN est un rectangle.
(EC // (IN)
Calcule la valeur exacte de SN.

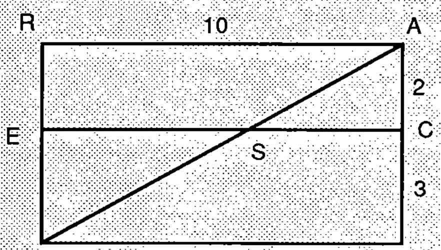


Fig. 6

OBJECTIFS :

Il s'agit de faire découvrir les règles de calcul sur les racines carrées en opposition aux non-règles.

Les PREACQUIS sont :

— l'énoncé de Thalès (3ème)

— l'énoncé de Pythagore (4ème)

CONSTRUCTION de l'activité.

Cette activité est née d'une considération historique. Les nombres irrationnels sont apparus avec la géométrie (incommensurabilité de la diagonale du carré,Pythagore...). Le calcul "algébrique" sur les racines prend son sens avec la recherche de grandeurs liées à la géométrie des figures : côtés de rectangles, diamètre de cercles circonscrits ou inscrits dans des triangles équilatéraux, etc.

C'est ce qui nous est apparu à la lecture de l'ouvrage de Nicolas CHUQUET *"La Géométrie"* (1484), dans lequel le calcul sur les racines fonctionne dans le cadre géométrique et de façon nécessaire, dans la mesure où sont très souvent données plusieurs méthodes pour calculer une aire ou une longueur, le résultat final devant avoir dans chaque cas la même forme. De plus, la forme des réponses données par CHUQUET, qui ne sont jamais du type $b\sqrt{a}$ nous a amenés à nous questionner sur la forme des réponses que nous avons tendance à exiger des élèves, et à voir qu'il y aurait peut-être intérêt à faire fonctionner les formules dans les deux sens.

Par exemple CHUQUET calcule de deux façons l'aire d'un hexagone régulier de côté 8 :

1) aire (ABCDEF) $= 6 \times \sqrt{768} = \sqrt{27\,648}$

2) aire (ABCDEF) $= 2 \times \sqrt{768} + \sqrt{12\,288}$
$= \sqrt{27\,648}$.

Il calcule de trois façons l'aire d'un octogone régulier AEBCD (où ABCD est un carré inscrit, et E le sommet entre A et B, G le centre) :

1) aire AEBCD = aire ABCD + 4 $\times$ aire AEB
$= 200 + 2\,(10 - \sqrt{50}) \times \sqrt{200}$
$= 200 + \sqrt{80\,000} - \sqrt{40\,000}$
$= \sqrt{80\,000}$

2) aire AEBCD = 8 $\times$ aire AEG $= 8\,(AF \times \frac{EG}{2})$
$= 8 \times \frac{\sqrt{50} \times 10^2}{2} = 8 \times \sqrt{1250}$
$= \sqrt{80\,000}$

3) aire AEBCD = 8 $\times$ aire AEG $= 8\,(\frac{AE}{2} \times GH)$
$= 8\,\frac{\sqrt{200 - \sqrt{20\,000}}}{2} \times \sqrt{50+\sqrt{1250}}$
$= 8 \times \sqrt{50 - \sqrt{1250}} \times \sqrt{50 + \sqrt{1250}}$
$= 8 \times \sqrt{1250} = \sqrt{80\,000}$.

CONFRONTATION des résultats :

Il s'agit de faire prendre conscience à l'élève de la nécessité de transformer les écritures et par la suite de connaître les règles de calcul sur les racines permettant ces transformations.

Les différentes démarches possibles pour résoudre le problème conduisent à des résultats (valeurs exactes) différents en apparence. Du cadre géométrique dans lequel se situe le problème posé, on passe au cadre algébrique pour transformer les écritures obtenues et les comparer.

La variété des résultats :

$SN = \sqrt{45}$; $SN = \sqrt{125} - \sqrt{20}$;

$SN = \sqrt{125} - 0{,}4\sqrt{125}$;

$SN = \frac{3}{5}\sqrt{125}$; $SN = 0{,}6\sqrt{125}$,

(Les deux dernières sont facilement reconnues égales) interroge l'élève. Les expressions trouvées sont-elles toutes égales ? Les raisonnements géométriques corrects laissent à penser que c'est vrai, mais comment en être sûr ?

Le calcul naturel $\sqrt{125} - \sqrt{20} = \sqrt{105}$ (théorème-élève classique $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a \pm b}$) est mis en défaut car $\sqrt{105} \neq \sqrt{45}$.

L'élève ressent la nécessité de découvrir les règles de transformation. La calculatrice apporte une aide pour comparer les nombres $\sqrt{45}$ et $3\sqrt{5}$, mais ne suffit pas pour conclure : un calcul approché (comme celui de la calculatrice) ne permet pas de prouver une égalité (de plus : $\sqrt{45} - 3\sqrt{5} \neq 0$ pour certaines calculatrices).

A ce niveau, les règles :

$$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}\ ,\ \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}\ ,\ \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

($a > 0, b > 0$) ne sont pas démontrées mais admises et considérées comme vraies dans tous les cas. Elles peuvent néanmoins être démontrées.

Cette activité s'inscrit dans un travail méthodologique à plus long terme :

— sur la démonstration : "est-ce toujours vrai ?" nécessitant le passage aux écritures littérales.

— sur le traitement des égalités, "comment montrer que deux nombres sont égaux ?"

Enfin les règles prennent un sens puisqu'elles permettent de comparer des écritures *a priori* différentes et de prouver, le cas échéant, que ces écritures désignent le même nombre (ce qui permet en plus de travailler sur le statut du nombre à travers ses différentes écritures et sur la notion, aux contours mal définis, de simplification d'un "résultat").

GESTION dans la classe : des comptes rendus figurent au paragraphe 4.

Exemple 6 : Introduction à la géométrie dans l'espace en 2^{NDE}

ENONCE

ABCDA'B'C'D' est un cube. J , I , K sont les milieux respectifs de [CA'] , [DB'] et [B'A'] .
Les droites (AA') et (BB') se coupent-elles ?
Les droites (AI) et (JD') se coupent-elles ?
Les droites (AI) et (CK) sont-elles parallèles ?
Que dire du triangle AIA' ?
Quel est l'intérêt de cet exercice ?

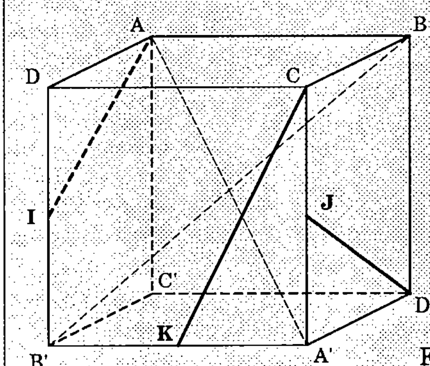


Fig. 7

CONSIGNE (travail par groupes de quatre)

Après une recherche individuelle de 15 minutes, vous confronterez vos résultats (20 minutes) et vous présenterez sur transparent l'avis du groupe sur les questions posées dans l'énoncé précédent.

OBJECTIFS :

— faire prendre conscience de la nécessité d'avoir des énoncés (définitions, théorèmes) pour pouvoir faire des démonstrations.

— comprendre que la transcription plane d'une situation spatiale pose des difficultés d'interprétation.

Ainsi il ne s'agit pas pour le professeur de faire construire par les élèves une connaissance, il s'agit plutôt de faire en sorte qu'ils soient demandeurs de connaissances.

CHOIX de l'activité :

C'est la première rencontre en seconde avec la géométrie dans l'espace. Le cube a été choisi car c'est un solide familier des élèves.

La perspective cavalière est ici une variable didactique essentielle : sur le dessin, AIA' est rectangle, (CK) est parallèle à (AI)... L'obstacle naît du fait que le dessin plan contredit ou peut contredire ce que l'élève imagine dans l'espace. La demande de connaissance doit surgir en grande partie des conflits socio-cognitifs inévitables lors de la mise en commun des groupes.

Enfin notons que dans le déroulement de la séquence étaient prévus les recours éventuels à des maquettes (cubes en tiges filetées) non visibles au départ et à un logiciel («dessiner l'espace» Irem de Lorraine) permettant de faire varier la perspective. Un compte rendu du déroulement figure au paragraphe 4.

Comment est on arrivé à une telle activité ?

— Les propriétés d'incidence sont des outils *de preuves* et de démonstrations (cf. Différence Preuve Démonstration - Géométrie 4ème T1 - IREM DE POITIERS) ; contrairement aux énoncés de géométrie plane qui sont essentiellement des outils démonstrations. Les outils étant des moyens de preuve, la nécessité de ces outils doit apparaître dans des situations provoquant des conflits socio-cognitifs.

— La donnée de la perspective cavalière fournit nous semble-t-il un changement de cadre : cadre spatial ou cadre du dessin plan, changement qui génère le conflit cognitif.

Exemple 7 : INÉQUATION EN 2^{NDE}

ENONCE

Elaborer une méthode ne faisant pas appel aux représentations graphiques pour résoudre les inéquations suivantes :

$f(x) > 0$, $g(x) < 0$ et $f(x) > g(x)$.

On a : $f(x) = (3x - 2)(x + 5)$,

$g(x) = (2x + 2)(3x - 2)$.

Ci-dessous on a tracé une partie des représentations graphiques de f et g .

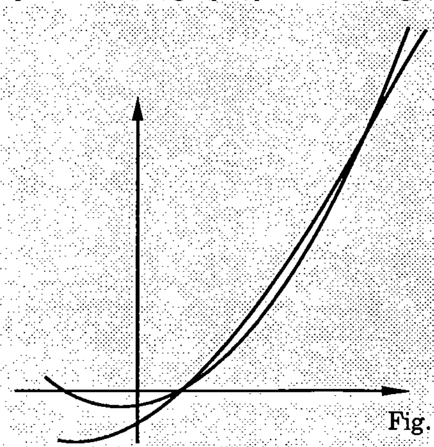


Fig. 8

OBJECTIFS de l'activité :

— faire découvrir aux élèves une méthode pour résoudre une inéquation du type : $(ax + b)(cx + d) > 0$ ou < 0 dont le second membre est 0 : connaître le signe de chacun des facteurs.

— faire découvrir une technique permettant de résoudre des inéquations du type $(ax + b)(cx + d) < (ax + b)(c'x + d')$ en se ramenant au type précédent.

CHOIX de l'activité :

Les courbes sont données, ce qui permet de lire approximativement l'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) < 0$. Par contre le dessin ne permet pas de conjecturer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$.

Algébriquement, l'inéquation $f(x) > g(x)$ peut paraître facile à résoudre (on simplifie par $(3x - 2)$) mais les résultats trouvés sont contredits par le graphique.

Le choix de l'origine dans la page dessin, la position des courbes (le choix des nombres) sont des variables didactiques de la situation (la lecture graphique ne permet pas d'avoir les valeurs exactes de l'équation $f(x) = g(x)$).

Comment en est-on arrivé à une telle activité ?

Le fait de connaître la règle des signes lors du calcul du produit de deux nombres ne suffit pas à en faire un outil.

La situation proposée vise à en faire un outil pour résoudre des inéquations. Le cadre graphique fournit un moyen de conjecture, mais aussi un moyen de tester les conjectures.

Le jeu de cadres provoque le conflit cognitif.

Exemple 8 : **LA CONTINUITÉ EN TERMINALE**

OBJECTIF :

Faire formuler les conditions d'application du théorème des valeurs intermédiaires.

ENONCE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = E(x^3 + 1) + x^3 .$$

Ci-dessous figure la représentation graphique de f. Résoudre $f(x) = 0$.

(E désigne la fonction partie entière)

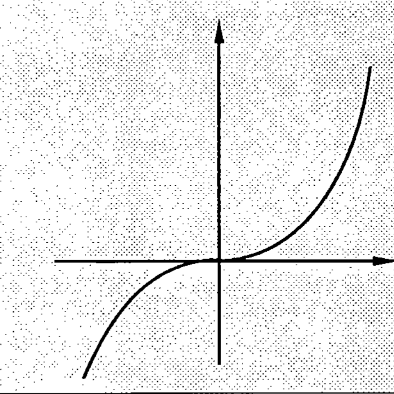


Fig. 9

CHOIX de l'activité :

La fonction f est définie à l'aide de la fonction partie entière inconnue des élèves. La définition (sans représentation graphique) est donnée au tableau. Les unités sont telles que la courbe paraît sans "trous". Le choix des unités est donc une variable didactique. Le conflit cognitif provient ici du jeu de cadre. Notons que les notions de continuité et de limite en un point n'ont pas encore été abordées.

Comment en est-on arrivé à cette situation ?

Une des utilisations de la continuité en terminale est le théorème des valeurs intermédiaires. Le théorème semble inutile aux élèves car rares sont les fonctions qui ne sont pas continues au lycée. Cependant ils en rencontrent et les tracés par des méthodes modernes (calculatrices, ordinateur) ne permettent pas toujours de se rendre compte des discontinuités. D'où la *nécessité de justifier la continuité.*

En outre cette situation s'inspire très fortement de l'histoire des mathématiques : BOLZANO n'a-t-il pas précisé la notion de continuité à propos du théorème des valeurs intermédiaires ?

(cf Mathématiques au fil des âges - Gauthier Villars - p206)

Exemple 9 :
LES NOMBRES COMPLEXES

Document élèves : chaque élève dispose du document reproduit ici dans l'encadré 1 de la page suivante.

ACTIVITE :

> En utilisant les règles de calcul de Bombelli, calculer :
>
> * $(\sqrt{-6} + \sqrt{-3})^2$
>
> * $(2 + 3\sqrt{-1})(4 - \sqrt{-1})$
>
> * $(\sqrt{-12} + \sqrt{6})(\sqrt{3} + \sqrt{-1})$

OBJECTIFS :

— faire découvrir aux élèves les règles de calcul dans $\mathbb{C}$,

— leur faire comprendre les raisons de l'abandon de la notation : $\sqrt{-1}$.

CHOIX de l'activité :

Après avoir fait travailler les élèves sur les équations du troisième degré et la formule de Cardan, le T.P. aborde le paradoxe de Bombelli.

Les variables didactiques se résument ici au choix des nombres $\sqrt{-3}$ et $\sqrt{-6}$.

Cela peut faire $\sqrt{18}$ ou $\sqrt{-18}$ suivant que l'on utilise les seules règles de Bombelli ou la règle :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} .$$

La connaissance doit surgir du débat dans chaque groupe ou entre les groupes. La consigne est donc ici très importante puisque la connaissance va résulter de conflits socio-cognitifs.

Comment en est-on arrivé à une telle activité ?

Le recours à l'histoire des mathématiques est évident. Cela ne suffit cependant pas pour construire une activité. Ici, le problème qui se pose est le suivant : comment faire pour que l'élève s'approprie une connaissance mathématique à partir de faits historiques tout en agissant ?

b) Une fiche guide

Construire une véritable activité nous semble assez difficile.

Aussi nous sommes-nous établi une fiche destinée à baliser les points qui nous semblent essentiels pour construire des activités. On la trouvera plus loin, résumée dans l'encadré 2.

Encadré 1 : résolution des équations de degré trois.

Voici la règle proposée par J.Cardan pour déterminer la solution positive de l'équation $x^3 + px = q$ ($p > 0$; $q > 0$) (²). Dans la colonne de droite figure la traduction actuelle.

"Le tiers du nombre de chose(³) au cube étant obtenu on y ajoute le carré de la moitié du nombre de l'équation et du tout on extrait la racine que l'on met de côté.	$\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}$
Le demi nombre que l'on a élevé au carré tu ajoutes ou tu enlèves à l'autre ; tu as le binôme(⁴) avec son apotome(⁵).	$\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}$; $-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}$
En extrayant la racine cubique de l'apotome et celle de son binôme, le résidu de leurs différences est la valeur de la racine".	$\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}-\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$

Ainsi la formule de Cardan écrite avec nos notations actuelle est :

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}-\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}.$$

a) Vérifier que 2 est solution de l'équation $x^3 + 24x = 56$

b) Retrouver ce résultat en utilisant la formule de Cardan

Après ce type d'équation, Cardan s'intéresse à l'équation $x^3 = px + q$ $(p>0\ ;\ q>0)$ pour laquelle il trouve la formule (en fait identique à la précédente en changeant p en $-p$, mais à cette époque les nombres négatifs étaient utilisés avec beaucoup de réticence) :

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}-\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{-p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$$

(cette équation ayant une seule racine positive (cf exercice 6)).

Petits travaux tranquilles

Appliquer la formule de Cardan pour résoudre l'équation : $x^3 = 18x + 35$

Résoudre de même $x^3 = 15x + 4$.

Bombelli, Mathématicien italien transgresse en 1550, les interdits. Il sait que 4 est solution et veut le retrouver à l'aide de la formule de Cardan. Voici, en substance et avec nos notations actuelles comment il s'y prend :

Il montre que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$; $(\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}})^3 = 2+\sqrt{-121} = 2+11\sqrt{-1}$ d'une part, et d'autre part :

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 8+3\times2\times(-1)+3\times4\times\sqrt{-1}-\sqrt{-1} = 2+11\sqrt{-1}.$$

Il calcule de même : $\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}} = -2+\sqrt{-1}$.

Ainsi $2+\sqrt{-1}-(-2+\sqrt{-1}) = 4$. Bombelli atteint son objectif.

(2) *Ars Magna* 1545.

(3) chose : inconnue.

(4) le binôme de deux quantités incommensurables.

(5) l'apotome de deux quantités incommensurables.

Encadré 2 : fiche guide.

Comment construire une activité ?

1/ Questions préalables :

— Quels objectifs sont visés ?
 • nouvelle notion
ou • nouveau champ de problèmes pour une notion connue.

— Quel est le rôle de la notion visée ? Quels problèmes permet-elle de résoudre ?

— Eventuellement, comment la notion est-elle apparue historiquement ?

— Quelles connaissances préalables sont nécessaires ? Quelles notions veut-on réinvestir ? (Préacquis).

2/ Construction de l'activité

— Choisir un support en relation avec le champ de problèmes que la notion permet de résoudre.

— Etudier les variables didactiques (figure, nombres,...) et faire un choix raisonné

— Choisir avec attention le libellé de la consigne.

3/ Analyse a priori de l'activité

— Etude des stratégies possibles des élèves en relation avec le choix des variables.

— Y a-t-il une solution court-circuitant la connaissance visée ?

— La connaissance visée est-elle plus performante que ce que l'élève sait déjà ?

— Quelle validation ?
 • par la situation elle-même
 • par une preuve donnée par l'élève
 • par une preuve donnée par le professeur.

4/ Synthèse de l'activité

— Que va-t-on retenir de l'activité ?

— Que va-t-on institutionnaliser ?

5/ Quelle suite va-t-on donner ?

4 - Gestion d'une activité en classe

a) Exemples

Ces exemples sont des témoignages de situations vécues dans nos classes. Ils doivent permettre aux lecteurs de mieux se représenter ce qui se passe dans la classe, de mesurer les écarts entre le vécu et l'analyse *a priori*, et la façon dont on peut gérer "à chaud" ces écarts.

Exemple 1 **: REPERES EN 3EME**

Outre ce qui vient d'être dit, l'intérêt ici est aussi de montrer que nous reprenons certaines de nos activités avec des préacquis parfois différents (qui peuvent dépendre de la classe ou de notre progression), ce qui évidemment modifie l'analyse *a priori* et certaines stratégies des élèves. Dans le cas présent les élèves n'avaient pas encore vu les équations de droites.

Cette activité a été proposée à des élèves de 3ème (analyse faite au paragraphe précédent, exemple 1).

ENONCE :

On donne un repère orthonormal d'origine O et les points E(-6 ; 1) ; R(1 ; -5) S(6 ; 2) et T(-1 ; -2) . Que dire du quadrilatère ERST ? Comment le prouver ?

L'objectif est d'établir les formules donnant les coordonnées du milieu d'un segment, les coordonnées d'un vecteur, la distance de deux points.

La figure étant tracée, les élèves constatent que ERST est un parallélogramme ; la question suivante les oblige à revenir sur les différentes façons de démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme. Aucune des méthodes n'apparaît préférable aux autres, les seules données étant les coordonnées de points.

Deux groupes ont choisi de prouver que les diagonales ont le même milieu. Les élèves arrivent à l'idée qu'il serait utile de savoir calculer les coordonnées du milieu de [RT] et [ES]. Le choix des abscisses (opposées) les amène à ajouter les abscisses pour trouver 0 (abscisse du milieu lue sur la figure). La formule ne se vérifie pas pour les ordonnées ; une nouvelle recherche est nécessaire pour arriver à la demi-somme des coordonnées. Le professeur propose à ce groupe de chercher une démonstration utilisant une autre propriété caractéristique du parallélogramme. Les élèves choisissent de montrer l'égalité des longueurs des côtés.

Un groupe choisit de montrer que les côtés opposés ont la même longueur. Le problème étant un calcul de distances, les élèves pensent : "énoncé de Pythagore" ou trigonométrie. Ils recherchent donc des triangles rectangles où apparaissent [RS] ou [ET] comme hypoténuses. [RS] est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont la longueur des côtés de l'angle droit, 5 et 3, est donnée par $6 - 1 = 5$; $5 - 2 = 3$ d'où l'idée de calculer une différence de coordonnées. Les calculs de ET, ST, RE posent plus de problèmes à cause des coordonnées négatives : les élèves, travaillant de fait sur les valeurs absolues, font tantôt la somme, tantôt la différence, et ils ne parviennent pas à trouver une méthode (commune) à leur quatre calculs.

En recentrant l'intérêt sur la différence trouvée au début, le professeur repose le problème : "Dans le premier cas, vous avez fait une soustraction, est-ce que dans les trois autres cas, vous ne pouvez pas faire la même chose ?".

Dans un groupe, on arrive finalement à : "Pour trouver la longueur des côtés du triangle rectangle on fait : le plus grand nombre – moins le plus petit" et ensuite on applique l'énoncé de Pythagore. Dans l'autre groupe : "on fait la soustraction des deux coordonnées ; si c'est positif on garde et si c'est négatif on prend l'opposé car il nous faut une longueur".

Un groupe a choisi de montrer que deux vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{ET}$ sont égaux. On aboutit en fait à un calcul des longueurs RS et ET avec les mêmes problèmes que dans les groupes précédents (soustraction ? addition ?), le groupe veut ensuite montrer que (RS) et (ET) sont parallèles, mais ne trouve rien.

Après une demi-heure de recherche, chaque groupe expose à la classe la méthode qu'il a choisie pour montrer que REST est un parallélogramme, les problèmes qu'il a rencontrés et ce qu'il a été obligé d'établir pour faire sa démonstration.

On arrive donc à un résultat concernant le calcul des coordonnées du milieu qui ne suscite pas de discussion et à deux méthodes pour calculer la distance de deux points dont on connaît les coordonnées. Tous les groupes se sont posé ce problème et la règle : "le plus grand nombre moins le plus petit" n'emporte pas immédiatement l'adhésion de tous. Il faut repréciser la distinction entre nombre, valeur absolue, l'ordre des nombres négatifs...

Il reste à reposer à toute la classe le problème du dernier groupe : comment pourrait-on montrer l'égalité de deux vecteurs ? Est-ce que la démarche commencée par le groupe peut aboutir ? Est-ce qu'il suffit de prouver le parallélisme pour conclure à l'égalité des vecteurs ?

Comment associer des nombres aux vecteurs pour pouvoir reconnaître des vecteurs égaux ?

Il semble évident que le vecteur $\overrightarrow{RS}$ soit associé aux nombres 5 et 3. Un élève ayant dit : "Pour aller de R à S on fait 5 horizontalement et 3 verticalement" dans tous les groupes on associe 7 et 4 à $\overrightarrow{TS}$ et $\overrightarrow{ER}$.

Le professeur introduit alors de nouveaux points M(6,8) ; N(100,1) ; V(-82, -45) et la consigne est de trouver les nombres associés à de nouveaux vecteurs : $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{RM}$, $\overrightarrow{ET}$, $\overrightarrow{SN}$, $\overrightarrow{EV}$, $\overrightarrow{VR}$, ...

Il apparaît alors la nécessité d'introduire des nombres négatifs pour préciser le sens du déplacement, puis de trouver une méthode de calcul quand la lecture devient impossible.

Dans chaque groupe, l'idée de la différence demeure à cause du travail sur les distances, mais les élèves partent de conditions sur les nombres. Dans un groupe, on arrive à : "on fait la différence des coordonnées : si le vecteur monte vers la droite,... si le vecteur descend vers la gauche...", si le vecteur monte vers la gauche, les résultats des groupes sont à nouveaux exposés. Le professeur propose que la classe vérifie sur plusieurs exemples de la figure, un résultat sur le calcul des coordonnées. Il est ensuite intéressant de confronter ce résultat avec les calculs des distances proposées par les élèves, et de donner une formule de calcul des distances s'appuyant sur les coordonnées de vecteurs.

Exemple 2 : MONSIEUR VALENTINE (niveau 5ème)

Compte rendu d'une expérience ou "comment se sortir d'une situation délicate ?".

OBJECTIFS VISES :

— comparaison de fractions,

— notion de proportionnalité.

PREACQUIS : notion de fraction.

ENONCE :

Monsieur Valentine veut repeindre sa salle de bain avec de la peinture rose. Pour la fabriquer, il mélange 2 pots de peinture rouge et 3 pots de peinture blanche. Madame Valentine trouve que le rose obtenu n'est pas assez foncé et propose de mettre 3 pots de peinture rouge pour 4 pots de peinture blanche. Monsieur Valentine affirme que la couleur sera la même.

Qu'en penses-tu ? Qui a raison ? Pourquoi ?

Le problème est tout de suite parfaitement compris (sondage rapide du professeur), le problème étant de savoir si les deux mélanges sont de même couleur ou non.

Au bout de dix minutes, chaque élève croit avoir trouvé la solution. Le professeur demande à chacun d'écrire la réponse et la raison de ce choix sur le cahier de brouillon. Tout le monde, sans exception, est convaincu que la couleur est la même car on a ajouté un pot de chaque teinte. Un élève surenchérit en précisant que Madame Valentine si elle voulait une peinture plus foncée, elle n'avait qu'à rajouter un pot de peinture rouge et pas de peinture blanche ! Pas un élève n'a le moindre doute, il n'y a que le professeur... !

La situation est bloquée. Comment les faire se rendre compte qu'ils sont dans l'erreur ?

Il faut relancer le problème en essayant d'éviter de retomber dans le "cours magistral". Reprenant le raisonnement (erroné) des élèves, le professeur écrit au tableau :

3 Blanc et 2 Rouge		*rose*
$+1 \downarrow$	$+1 \downarrow$	
4 Blanc et 3 Rouge		*même rose*
$+1 \downarrow$	$+1 \downarrow$	
5 Blanc et 4 Rouge		*même rose*
$+1 \downarrow$	$+1 \downarrow$	
...	...	

Tout le monde est d'accord, on peut continuer ainsi...

"On va procéder autrement"

Faisons deux fois le même mélange :

3 Blanc + 2 Rouge   3 Blanc + 2 Rouge

et mélangeons-les, on obtient :

6 Blanc + 4 Rouge

Les élèves affirment que la peinture a la même nuance dans les deux seaux et, bien sûr, dans le grand mélange.

Aucun doute n'est possible... ! "Recensons les mélanges obtenus" :

- n° 1 : 3 Blanc et 2 Rouge ;
- n° 2 : 4 Blanc et 3 Rouge ;
- n° 3 : 5 Blanc et 4 Rouge ;
- n° 4 : 6 Blanc et 4 Rouge.

ces mélanges ont tous la même couleur...

C'est à ce moment-là qu'est arrivé le doute tant espéré. Plusieurs élèves remarquent que les peintures n° 3 et n° 4 ne peuvent être de la même couleur car dans le n° 4, il y a 1 pot de blanc de plus que dans le n° 4 et la même quantité de peinture rouge.

Le problème est relancé : "cherchez l'erreur !" demande le professeur. Les élèves sont motivés par la recherche et la majorité d'entre eux met en défaut leur première conjecture : les peintures n° 1 et n° 2 n'ont pas la même nuance. La notion de proportion des deux couleurs apparaît :

Soit par le rapport

$$\frac{\text{peinture blanche}}{\text{peinture rouge}} : \frac{3}{2} \text{ et } \frac{4}{3},$$

Soit par le rapport

$$\frac{\text{peinture blanche}}{\text{mélange obtenu}} : \frac{3}{5} \text{ et } \frac{3}{7},$$

Soit par le rapport

$$\frac{\text{peinture rouge}}{\text{mélange obtenu}} : \frac{2}{5} \text{ et } \frac{3}{7},$$

Les élèves sont persuadés alors que dans chaque cas les fractions sont différentes car "si elles étaient égales cela se verrait" (les élèves savent simplifier les fractions et concluent qu'il faut les comparer pour savoir quelle fraction donnera la peinture plus claire (ou plus foncée). Le but est atteint.

La mise au même dénominateur apparaît comme une méthode pour comparer ces fractions... Le professeur institutionnalise le fait que la notion de proportion (ici reliée à la notion de nuance de la peinture) est bien représentée par des fractions et que l'on peut répondre au problème si on sait comparer des fractions.

ANALYSE DE L'ACTIVITÉ APRES SA PASSATION EN CLASSE :

Comment débloquer la situation ?

On pouvait peut-être continuer le raisonnement des élèves une 3ème fois pour obtenir les mélanges :

3 Blanc et 2 Rouge
4 Blanc et 3 Rouge
5 Blanc et 4 Rouge
6 Blanc et 5 Rouge

et relancer la comparaison ? (Toutefois, il n'est pas certain que le doute s'installe).

Le libellé est-il bien choisi ?

Dans une autre classe de 5ème avec le libellé suivant : *Monsieur Valentine veut repeindre sa salle de bains en rose. Il mélange 3 pots de peinture blanche et 2 pots de peinture rouge : la couleur obtenue lui plaît beaucoup mais il n'y aura pas assez de peinture.*

— "Je vais rajouter un pot de chaque couleur, comme cela j'obtiendrai la même nuance" dit-il à son épouse.

— "J'ai peur que ce ne soit pas la même couleur, elle sera plus foncée" répondit-elle.

Qu'en penses-tu ? Qui a raison et pourquoi ?

La réaction des élèves a été sensiblement différente. Une majorité a réagi comme dans le premier libellé mais les autres ont douté. "Non ce ne peut pas être aussi simple !" D'où l'amorce d'une confrontation et l'installation immédiate du doute.

Remarque : Avec le premier libellé les élèves ont cru trouver la solution en découvrant l'addition d'un pot de chaque couleur.

Cette addition étant proposée dans le deuxième libellé, il n'y avait rien à faire...

Exemple 3 : LA SOMME DES ANGLES D'UN TRIANGLE (niveau 5ème)

Activités en plusieurs étapes.

OBJECTIF VISE : Angles dans un triangle. Initiation à la preuve.

PREACQUIS : Les élèves ont vu la symétrie centrale (les angles alternes-internes)

MODALITES : Elèves en groupe de quatre.

ACTIVITE 1 :

Choisir un nombre parmi les nombres suivants : 35 ; 42 ; 56 ; 70 ; 78 ; 105 ; 120 ; 128 (chaque groupe a un nombre différent).

Construire quatre triangles différents ayant l'un des angles qui mesure le nombre choisi en degrés. Que remarquez-vous pour les deux autres angles de ces triangles ?

MISE EN ROUTE :

Aucun problème, chacun a bien compris la consigne : d'abord construire des triangles puis faire des remarques.

Il y a un bon réinvestissement du programme de 6ème sur les angles, utilisation du rapporteur, revue des mots utilisés avec les angles (obtus, aigus...)

Le tableau est partagé en zones où chaque groupe va exprimer les résultats des recherches (mêmes partiels). Dans le cas présent cela provoque souvent des contestations au sein des autres groupes.

SYNTHESE :

Chaque groupe constate que la somme des deux autres angles est la même (ou presque) lorsqu'on a le même nombre. Cette somme diffère si on n'a pas le même nombre. Pas d'institutionnalisation du professeur pour la somme des trois angles (déjà vu en 6ème) certains élèves en ayant parlé. Pour la séance suivante, il est demandé (en travail à la maison) : de construire un triangle ABC tel que : AB = 15 , AC = 10 , BC = 6 ; de mesurer les angles de ce triangle et de noter ces mesures.

La séance suivante se déroule ainsi :

1. Nous demandons aux élèves de ranger le rapporteur, de placer le point I sur [AB] tel que AI = $\frac{2}{3}$ de AB et construire en rouge le triangle CIB .

2. Nous distribuons à chacun une petite feuille à compléter :

> Dans le triangle ABC que j'ai construit, j'ai mesuré les angles :
>
> $\widehat{A} = \boxed{}$ $\widehat{B} = \boxed{}$ $\widehat{C} = \boxed{}$
>
> La somme $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \boxed{}$
>
> Je pense que la somme des angles du triangle CIB est d'environ $\boxed{}$

3. Nous dépouillons immédiatement, en questionnant les élèves ayant fourni des réponses originales (125°, 140°,...). (explication de leurs réponses).

4. Nous faisons mesurer les angles du triangle CIB .

Remarque : certains élèves en nombre significatif qui avaient une somme proche de 180° et qui en avaient fait la remarque à l'activité 1 n'ont pas hésité à penser que la somme des angles de CIB était bien inférieure à 180° car CIB est dans le "grand triangle". Ceci montre que la connaissance du théorème de la somme des angles d'un triangle est encore très contextualisée : elle fonctionne sur un triangle isolé mais ne fonctionne plus dans une figure un peu plus complexe.

La synthèse est faite par les élèves : qu'il soit petit ou grand, la somme des angles d'un triangle est située aux alentours de 180°.

ACTIVITE 2 :

Enoncé :

"La somme des angles d'un triangle est-elle égale à 180° exactement ou est-elle seulement proche de 180° ? Analyser les cas de triangles où vous pouvez conclure d'une manière certaine. Trouver des preuves à ce que vous affirmez".

Les élèves ont sélectionné les trois triangles qui leur semblent simples :

— le triangle rectangle et isocèle (qu'ils intègrent aussitôt dans un carré)

— le triangle rectangle (intégré dans un rectangle)

— le triangle équilatéral.

Preuves proposées pour le triangle rectangle et isocèle :

1ère preuve apparue :

C'est la moitié d'un carré, or le carré a ses quatre angles droits donc on divise par deux et on obtient 180°.

Cette preuve est-elle acceptable ? Et la moitié d'un triangle ?

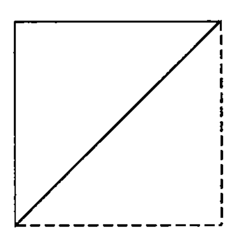


Fig. 10

2ème preuve :

Utilisation de la diagonale : Axe de symétrie qui est bissectrice des angles droits. D'où :

$$90° + 45° + 45° = 180° .$$

Preuve tout à fait convaincante.

Preuves proposées pour le triangle rectangle non isocèle :

1ère preuve proposée :

La diagonale est bissectrice (comme dans le carré)... Preuve contestée par quelques élèves, les autres ont été obligés de mesurer. A noter que la preuve de la moitié d'un rectangle n'est pas apparue.

2ème preuve :

Avec la symétrie centrale et les angles alternes-internes, plus difficile à mettre en forme (on n'a pas les mesures comme pour le 1er cas). Les élèves trouvent que la somme des deux angles aigus d'un triangle rectangle est égale à 90° .

Pour le triangle équilatéral les élèves demandent une preuve donnée par le professeur (ces deux preuves sont facilement généralisables au triangle quelconque) :

Première possibilité :

Découpage en deux triangles rectangles

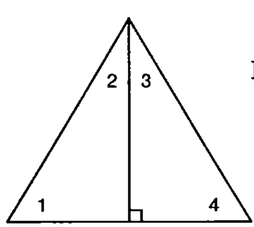


Fig. 11

$$\left.\begin{array}{l}\hat{1} + \hat{2} = 90° \\ \hat{3} + \hat{4} = 90°\end{array}\right\} \text{ somme } 180°$$

Deuxième possibilité :

Angles alternes-internes

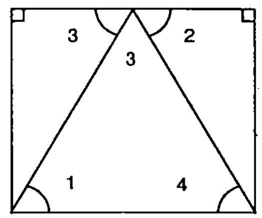


Fig. 12

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = \text{l'angle plat}$$

Synthèse finale de ces activités (faite par les élèves) :

— La somme des angles d'un triangle est 180°

— La somme des angles aigus d'un triangle rectangle est égale à 90°. (A noter que cette deuxième règle a semblé importante puisqu'on s'en est servi pour établir les preuves).

— Les trois angles d'un triangle équilatéral valent 60°.

Ce travail est suivi d'une série d'exercices de construction de triangles (de toutes sortes), constructions qui peuvent nécessiter, selon le cas, une recherche de mesure d'angle pouvant amener à poser des équations. Pour conclure ce travail, le problème suivant est proposé. Il est cherché en classe pendant une heure, rédigé à la maison sur feuille et corrigé par le professeur.

ABCD est un carré. BOC est un triangle équilatéral.

Quelle est la mesure de $\widehat{AOD}$?

Prouve-le.

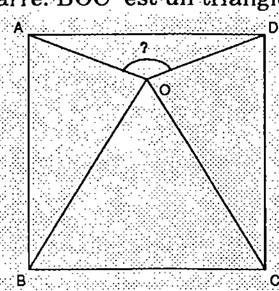


Fig. 13

Exemple 4 : RACINES CARREES (niveau 3ème)

(L'analyse a été faite au paragraphe 3, Exemple 5)

Nous donnons trois comptes rendus faits par trois d'entre nous, donc correspondant à des professeurs et des classes différentes pour donner une idée des adaptations nécessaires par rapport à l'analyse *a priori* qu'impose le principe des activités.

Compte rendu n° 1 de l'activité proposée à une classe de 3ème de 27 élèves.

• Les élèves sont tout de suite persuadés qu'ils savent résoudre ce problème ayant tout de suite reconnu une situation de Thalès et de Pythagore. Ils travaillent d'une manière individuelle. Au bout de 20 minutes, plusieurs élèves ont une réponse, il y a alors confrontation en groupe de 3 ou 4 élèves : dans plusieurs groupes les réponses de chacun étaient différentes, le doute s'est alors installé, le réflexe des élèves est alors de comparer avec la calculatrice et de vérifier sur la figure dessinée en grandeur réelle. Les élèves sont convaincus qu'il y a plusieurs manières différentes de donner la valeur exacte de SN. Le professeur recense les différentes réponses :

$$SN = \sqrt{125} - \sqrt{20}$$
$$SN = \sqrt{45}$$
$$SN = \sqrt{125} \times \frac{3}{5}$$
$$SN = \sqrt{125} - \sqrt{125} \times \frac{2}{5}$$
$$SN = \sqrt{20} \times \frac{5}{2} - \sqrt{20}$$

Un élève ayant annoncé $SN = \sqrt{105}$ a été tout de suite contesté car certains élèves s'étaient posés la question et avaient constaté avec la calculatrice que $\sqrt{125} - \sqrt{20}$ est différent de $\sqrt{105}$. Il était donc certain que $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a - b}$. Chaque groupe est chargé de rédiger sur un transparent l'une des solutions afin d'être sûr que les méthodes employées sont correctes. D'un commun accord les élèves réclament la solution donnant $SN = \sqrt{45}$ (résultat jugé le plus simple) pour la noter sur le cahier.

A ce moment de l'activité les élèves sont convaincus que les cinq nombres : $(\sqrt{125} - \sqrt{20})$; $\sqrt{125} \times \frac{3}{5}$; $(\sqrt{125} - \sqrt{125} \times 2)$; $\sqrt{45}$ et $(\sqrt{20} \times \frac{5}{2} - \sqrt{20})$ sont égaux.

Le professeur demande pourquoi ils sont convaincus :

— la calculatrice est le premier garant de leur conviction,

— la justesse de leur raisonnement n'en est que le deuxième.

• Le professeur pose alors la question : est-ce que la calculatrice permet de prouver que deux nombres sont égaux ? Certains élèves se souviennent qu'en d'autres occasions (la trigonométrie), on avait souligné que la calculatrice donnait des valeurs approchées. Le professeur demande quelle réponse on attend si on calcule la différence $(\sqrt{125} - \sqrt{20}) - \sqrt{45}$; zéro est attendu mais la plupart des calculatrices ne répondent pas zéro : un seul élève dans la classe a la réponse zéro sur sa calculatrice, les autres ont soit $- 8 \times 10^{-8}$; soit $- 3 \times 10^{-10}$; soit :

$\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{125} \rightarrow$ réponse : 0 ,

$\sqrt{125} - \sqrt{20} - \sqrt{45} \rightarrow$ réponse : $- 8 \times 10^{-11}$,

bonne occasion de revenir sur la signification de ces nombres... de destabiliser les élèves vis-à-vis de leur calculatrice et de conclure que celle-ci donne une idée, permet de vérifier que deux nombres ont une différence (ex : $\sqrt{125} - \sqrt{20} \neq \sqrt{105}$) mais ne permet pas de lever le doute devant deux nombres très proches l'un de l'autre.

• Apparaît donc la nécessité de découvrir pourquoi ces nombres sont égaux. Il doit donc exister des règles pour transformer les écritures avec des racines carrées. Le professeur propose de découvrir les règles existantes. Pour cela, il est nécessaire de revenir sur la signification de $\sqrt{a}$. A partir d'un exemple (que représente le nombre écrit $\sqrt{45}$?) apparaissent les deux formulations :

" $\sqrt{a}$ est le nombre qui élevé au carré donne a"
" $\sqrt{a}$ est le nombre qui multiplié par lui-même donne a"

Remarque : Le fait que a et $\sqrt{a}$ sont des nombres positifs, ne fait pas l'ombre d'un doute pour l'élève qui se réfère à la situation de Pythagore qui lui a permis de découvrir ces nouveaux nombres. L'analyse du cas de $\sqrt{25}$ amène à analyser $\sqrt{a^2}$ et les trois règles suivantes sont énoncées (a étant un nombre positif) :

$$(\sqrt{a})^2 = a \ ; \quad \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a \ ; \quad \sqrt{a^2} = a .$$

Les deux règles suivantes :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \ ; \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

peuvent à ce moment-là être admises (on peut néanmoins les démontrer par exemple en comparant les carrés des deux nombres).

Un nouveau travail s'impose maintenant, il faut prouver en utilisant les règles précédentes que les cinq nombres précédents sont égaux : c'est la première occasion de faire fonctionner ces nouvelles règles et de découvrir comment on peut transformer les écritures des nombres comportant des racines carrées.

Compte rendu n° 2 (seules sont indiquées les variantes par rapport au compte rendu précédent) :

La variété des résultats interroge les élèves :

(1) $SN = \sqrt{45}$

(2) $SN = \sqrt{125} - \sqrt{20}$

(3) $SN = \sqrt{125} - 0{,}4 \times \sqrt{125}$

(4) $SN = \frac{3}{5} \times \sqrt{125}$ } vite reconnues

(5) $SN = 0{,}6 \times \sqrt{125}$ } égales

(6) $SN = 3 \times \sqrt{5}$.

Les expression trouvées sont-elles toutes égales ? Les raisonnements géométriques utilisés par les élèves sont exposés :

(1) Calcul de SC dans ANI *(Thalès)*
Calcul de ES = EC - SC
Calcul de SN dans ESN *(Pythagore)*

(2) Calcul de AN dans ANI *(Pythagore)*
Calcul de SC dans ANI *(Thalès)*
Calcul de AS dans ASC *(Pythagore)*
Calcul de SN : SN = AN - AS

(3) Calcul de SC dans ANI *(Thalès)*
Calcul de AN dans ANI *(Pythagore)*
Calcul de AS dans ANI *(Thalès)*
Calcul de SN : SN = AN - AS

(4) Calcul de AN dans ANI *(Pythagore)*
Calcul de AS dans ANI *(Thalès)*
Calcul de SN : SN = AN - AS

(5) Calcul de AN dans ANI *(Pythagore)*
Calcul de cosN dans RNA ($= 5/\sqrt{125}$)
Calcul de cosN dans ENS (= 3/SN)
Calcul de SN par égalisation SN

(6) Même procédure qu'au (1) ; l'élève qui redouble la 3ème, donne : $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ sans explication.

Ces raisonnements géométriques reconnus corrects laissent à penser que toutes les réponses sont acceptables et sont égales. Mais comment en être sûr ?

Le calcul naturel $\sqrt{125} - \sqrt{20} = \sqrt{105}$, théorème-élève classique ($\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a \pm b}$) est mis en défaut car $\sqrt{105} \neq \sqrt{45}$.

Un élève propose d'utiliser la calculatrice pour comparer les nombres. Les calculatrices affichent des valeurs approchées identiques. Est-ce suffisant pour conclure ? Le professeur fait alors calculer la différence $(\sqrt{125} - \sqrt{20}) - \sqrt{45}$, les calculatrices ne donnent pas toutes les mêmes résultats, et surtout ne donnent pas 0. Le doute subsiste. Un autre élève fait remarquer que si on élève $\sqrt{45}$ et $3\sqrt{5}$ au carré, on obtient la même chose... Les deux nombres positifs sont donc égaux d'où : $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Les résultats :

$$(\sqrt{45})^2 = 45$$
$$\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$$
$$\sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

sont énoncés et prolongés aux cas des nombres positifs : (comparaison par passage aux carrés)

pour $a, b > 0$

$$(\sqrt{a})^2 = a$$
$$\sqrt{a^2} = a$$
$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$
$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$$

La deuxième règle $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est démontrée par la même méthode. On se propose alors de montrer l'égalité des nombres en utilisant les règles énoncées précédemment, c'est l'occasion de se familiariser avec ces règles. Pendant la synthèse, la situation géométrique est dépassée. Nous sommes dans le domaine numérique : il y a eu *décontextualisation* et *changement de cadre.*

Compte rendu n° 3 (durée 2 heures, calcul compris, 28 élèves) :

Les valeurs trouvées sont écrites au tableau :

(1) $SN = \sqrt{125} - (\sqrt{125} \times 0,4)$

(2) $SN = \sqrt{125} \times \frac{3}{5}$

(3) $SN = \sqrt{45}$

(4) $SN = \sqrt{125} - \sqrt{20}$

(5) $SN = \sqrt{125} - \frac{\sqrt{500}}{5}$

(6) $SN = \sqrt{125} - \frac{\sqrt{125}}{2,5}$

Chaque groupe expose brièvement à la classe sa méthode de calcul. Certains élèves pendant ce temps "vérifient" à la calculatrice qu'à chaque fois c'est bien le même nombre que l'on trouve. Le professeur pose alors le problème de la recherche de règles de calcul qui permettraient de transformer ces écritures et de prouver que ces écritures sont celles d'un même nombre, exactement comme on peut expliquer par une règle que $5 + \frac{1}{3}$ et $\frac{16}{3}$ c'est le même nombre.

Un bilan de recherches fait au fur et à mesure donne :

1° preuve : (1) = (2) mais sans aucune règle sur le calcul des racines.

2° preuve : (4) = (5) avec mise en évidence de deux règles :

$$a = \sqrt{a^2} \text{ et } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad : \quad \frac{\sqrt{500}}{5} = \frac{\sqrt{500}}{\sqrt{25}} = \sqrt{20}$$

3° preuve : (4) = (6), sur le même modèle.

4° preuve : (2) = (3) amène : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ à partir de $\frac{3}{5} = \sqrt{\frac{9}{25}}$ première règle trouvée et très utilisée.

5° preuve : (3) = (4) la plus difficile, amène les décompositions standard en $a\sqrt{b}$.

Les trois règles sont institutionnalisées et notées sur le cahier de cours. Puis on les fait fonctionner sur des exercices variés (Voir brochure 3ème, fasicule 1, Irem de Poitiers).

Remarque : *On ne peut tout prévoir, il faut faire face avant.*

Il y a trois ans, une élève ayant trouvé la valeur exacte $SN = \dfrac{3}{\sin \operatorname{inv} \tan 0{,}5}$. Le professeur l'a félicitée et lui a demandé alors de calculer la valeur de SN, mais sans utiliser la trigonométrie.

Exemple 5 : INTRODUCTION A LA GEOMETRIE DANS L'ESPACE EN 2nde.

(L'analyse a été faite au paragraphe 3, exemple 6.)

Durant une demi-heure les groupes mettent au point leurs réponses aux questions posées. S'ensuit alors un débat dans lequel aucun argument ne peut vraiment convaincre toute la classe.

Le professeur pose alors la question à la classe : "comment être sûr "? Les avis divergent :

— les uns proposent une expérience : on construit et on voit ce qui se passe.

— d'autres proposent une démonstration (proposition contestée par certains : démontrer quoi ? on ne sait rien dans l'espace).

Le professeur introduit alors du matériel (non visible jusqu'à cet instant) :

— des cubes en tiges filetées pour matérialiser la situation (avec des ficelles)

— un ordinateur avec le logiciel "dessiner l'espace" pour simuler la situation dans différentes perspectives.

L'utilisation de ce matériel permet pratiquement aux élèves de se convaincre de la vérité ou de la fausseté de certaines propositions.

Le débat est relancé par le professeur : ces expériences suffisent-elles pour être persuadé de l'*universalité* des résultats (vrais pour tous les cubes) ? Les élèves font alors apparaître un parallèle avec la géométrie plane : "on démontre avec des théorèmes".

La conclusion est apportée par le professeur : démontrer c'est relier logiquement des énoncés connus à un énoncé inconnu. Dans l'espace pour faire des démonstrations il faut des énoncés et définitions.

b) Points de repère

Les élèves travaillent par groupe de 4, ce qui signifie que pendant la *phase d'action,* le travail est d'abord individuel puis des échanges ont lieu à l'intérieur des groupes. Ces échanges peuvent revêtir plusieurs formes : entraide, comparaison des méthodes, comparaison des résultats.

La *phase de recherche individuelle* doit être suffisamment longue pour que chaque élève ait le temps de s'approprier le problème (et non pas répondre hâtivement en essayant de deviner ce qui fera plaisir au professeur). Le problème doit devenir son problème, il en prend la responsabilité. C'est la dévolution du problème.

Il ne faut pas perdre de vue que l'objectif de l'activité est de permettre à l'élève d'acquérir de nouvelles connaissances en prenant conscience dans un 1er temps de l'insuffisance de celles qu'il a.

Pendant cette phase, le professeur s'assure simplement que l'énoncé est bien compris (en circulant entre les groupes). Cette phase se poursuit par une *phase de formulation* où le groupe explicite par écrit ou oralement, les outils utilisés, les démarches suivies, les solutions trouvées. Cette phase est importante : elle permet le développement de conflits socio-cognitifs, source de remise en cause des connaissances produites et occasion d'en reconstruire de nouvelles qui résistent à la critique. Elle permet également une verbalisation des procédures utilisées, et donc un retour réflexif sur l'action. Le professeur ne prend pas parti, mais aide éventuellement les groupes dans ce travail de verbalisation. C'est une tâche délicate car il ne doit pas répondre aux questions des élèves mais au contraire les faire se questionner, il ne doit pas donner des éléments de solution mais amener les élèves à prendre du recul et à analyser leurs stratégies. Une technique consiste à renvoyer les questions au groupe, à s'interroger en faisant "le naïf", mieux encore à demander aux éléments du groupe comment ils ont fait, comment ils s'y sont pris, comment ils savent que ce qu'ils disent est juste..., donc poser des questions en termes de "comment ?".

Pendant la *phase de validation*, chaque groupe doit prouver que sa solution est valable (pas forcément une démonstration). La validation est gérée par le groupe.

La *phase d'institutionnalisation* est faite par le professeur qui va identifier les nouveaux savoirs et savoir-faire et va préciser les conventions. Il s'agit d'homogénéiser les connaissances de la classe et de préciser dans les savoirs construits ceux qui sont à retenir et sous quelle forme (c'est la décontextualisation). Les élèves peuvent alors formuler les objectifs de l'étude qui va suivre. Les exercices qui suivent ont pour but de bien faire acquérir les nouveaux savoirs et savoir-faire en les mettant à l'épreuve dans des situations très diverses (ce qui permet également d'élargir le champ, et d'en établir les limites). Le professeur peut organiser une analyse d'erreurs, de démarches, et ainsi mieux individualiser la fin de l'apprentissage. Pendant toute la phase d'exercices, les élèves ont à leur disposition :

— leur manuel,

— un répertoire ou un cahier où sont consignés les contenus,

— le fichier méthodologique édité par l'IREM DE POITIERS .

CONCLUSION

L'activité telle que nous l'avons définie est pour nous un moment fort de la situation d'apprentissage mise en place : elle se situe en son début et son importance nous semble capitale tant en ce qui concerne la construction des connaissances qu'en ce qui concerne l'image que peuvent se faire les élèves des mathématiques. Ils vivent et construisent leurs connaissances dans un travail de recherche face à un vrai problème. Cela demande au professeur de ne pas "émietter" le contenu de l'année en un nombre important de chapitres, mais au contraire de baliser les thèmes essentiels de l'année, là où vont se faire les apprentissages clés. C'est pourquoi, dans l'esprit même des programmes , nous découpons chaque année en un certain nombre de "dominantes", et pour chaque dominante nous concevons une "activité", ou situation-problème, telle que nous en avons expliqué la conception et la mise en œuvre.

[On trouvera une opérationnalisation complète de notre démarche dans les brochures publiées à l'IREM de POITIERS :
6ème : Symétrie orthogonale, Reproduction de figures planes, Les fractions en 6ème (fasc. 1 et 2)
5ème : Symétrie centrale, Les fractions en 5ème, Calcul littéral au collège, Géométrie plane en 5ème. Géométrie dans l'espace (avec logiciel) 6ème - 5ème.
4ème : Travaux numériques (fascicules 1 et 2), Géométrie (fascicules 1 et 2)
3ème : Programme de 3ème (fascicules 1, 2, 3).
Fichier "Méthodes" avec fasc. professeur.]