Point de vue

QUE VIVENT LES CAS D'EGALITE DES TRIANGLES

Jean Michel BAUCRY
Irem de Lille

ENFIN !

Enfin une démonstration du théorème "des cas d'égalité des triangles". Aucun triangle à découper, ou à superposer. Aucun recours à une intuition malsaine de ce que pourrait être un mouvement. Et pour seules bases, quelques connaissances élémentaires — programme de sixième — sur les symétries orthogonales. Lisez et jugez par vous-même. Ou si les banalités vous ennuient, survolez, sautez, et rendez-vous directement à la conclusion ...

Note de l'éditeur : la revue Repères et les éditions Topiques remercient Nicolas B. pour l'autorisation de disposer des quatre pages qui suivent, extraites du chapitre MCCXLIII de son célèbre traité « Eléments de Mathématique » (Livre CCV consacré à la *géométrie élémentaire*), dont la parution est prévue aux alentours d'octobre-novembre 1998.

CHAPITRE MCCXLIII (*)

LES CAS D'EGALITE DES TRIANGLES

Tous les triangles considérés ici sont des triangles quelconques du plan euclidien. Sauf mention expresse du contraire, les seules isométries utilisées sont les symétries orthogonales. En plus des propriétés fondamentales de ces symétries, les résultats supposés connus sont résumés au § 1, n° 1.

§ 1. Triangles égaux.

1. Prérequis.

Soient A , B deux points distincts d'un plan euclidien ; la droite unique contenant ces deux points (*Géo.*, chap. MCI, § 13, n° 4) est notée (AB) . Rappelons (*Géo.*, chap. MCVI, 3e éd. § 17) les propriétés suivantes des symétries planes :

(P1). — Les symétries conservent les distances,

(P2). — Une symétrie transforme une droite (*resp.* une demi-droite, un segment) en une droite (*resp.* en une demi-droite, en un segment).

Rappel : $M \in [AB] \Leftrightarrow AM + MB = AB$

$M \in]AB) \Leftrightarrow$ « $M \in (AB)$ et $A \notin [MB]$ »

$M \in [AB) \Leftrightarrow$ « $M \in]AB)$ ou $M = A$ »

(*) Sauf aux §§ 17-18, qui utilisent les résultats du chapitre MCCXIX, § 5, et par conséquent des notions du programme de cinquième, il n'est fait, dans ce chapitre, aucun usage d'autres livres que ceux qui relèvent du programme de sixième.

(P3). — Si A, B, C, D sont des points tels que : $A \neq B$, $AC = AD$ et $BC = BD$, alors : ou bien $C = D$ ou bien C et D sont symétriques par rapport à la droite (AB).

(P4). — Soient D une droite et A un point hors de D. Alors pour tout point M, si on note M' son symétrique par rapport à D, $[AM]$ coupe D *ou* $[AM']$ coupe D et ce "ou" est exclusif si $M \notin D$.

2. Le lemme préparatoire.

DÉFINITION 1. — *Nous dirons de deux triangles* ABC *et* $A'B'C'$ *qu'ils sont égaux (et nous noterons* $ABC = A'B'C'$ *) si on peut passer simultanément de* A *à* A', *de* B *à* B' *et de* C *à* C' *par une succession de symétries orthogonales.*

Exemple. — Si ABC est un triangle, alors $ABC = ABC$.

DÉFINITION 2. — *Soient* $([AB), [AC))$ *et* $([A'B'), [A'C'))$ *deux couples de demi-droites de même origine. Nous dirons que les angles* $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'A'C'}$ *sont égaux (ce que nous noterons :* $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ *) s'il est possible de passer simultanément de* $[AB)$ *à* $[A'B')$ *et de* $[AC)$ *à* $[A'C')$ *par une succession de symétries orthogonales.*

Exemples. — Si ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles tels que $ABC = A'B'C'$, alors $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$. Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer et de démontrer les autres égalités d'angles qui résultent des hypothèses.

LEMME 1. — *Soit des points* M, N, P, M', N' *tels que* $MN = M'N'$. *Alors il existe un point* P' *tel que :* $MNP = M'N'P'$.

Il est clair qu'il existe une symétrie orthogonale σ qui transforme M en M'. Elle transforme N en N_1 ; on a donc :

$$M'N_1 = MN = M'N'.$$

Dès lors, M' appartient à la médiatrice Δ de $[N_1N']$; la symétrie orthogonale σ' par rapport à Δ transforme par conséquent M' en M' et N_1 en N'. Finalement on passe de M à M', de N à N' et de P à un certain point P' par la succession $\sigma' \circ \sigma$ de symétries orthogonales ; il existe donc bien un point P' tel que $MNP = M'N'P'$, ce qui achève la démonstration du lemme.

3. Critères d'égalité.

PROPOSITION 1. — *Soient* A, B, C *et* A', B', C' *six points tels que* $B \neq A$, $C \neq A$, $B' \neq A'$ *et* $C' \neq A'$. *Pour que* $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, *il faut et il suffit qu'il existe* $C_1 \in]A'C')$ *et* $B_1 \in]A'B')$ *tels que les triangles* ABC *et* $A'B_1C_1$ *soient égaux.*

[La démonstration de cette assertion est laissée au soin du lecteur]

THEOREME 1 (conditions nécessaires d'égalité des triangles). — *Si les triangles* ABC *et* $A'B'C'$ *sont égaux alors :*

$$AB = A'B' ; \quad AC = A'C' ; \quad BC = B'C' .$$

Si en outre les points A, B, C *sont deux à deux distincts, il en est de même des points* A', B', C' *et on a :*

$$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} ; \widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'} ; \widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'} .$$

C'est une conséquence immédiate de la propriété (P1) rappelée § 1, n° 1 et de la proposition 1 du § 1, n° 2.

THEOREME 2 (« cas d'égalité des triangles »). — *Soient* ABC *et* $A'B'C'$ *deux triangles.*

(i) *Si* $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$,
alors $ABC = A'B'C'$.

(ii) *Si* $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et si $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$,
alors $ABC = A'B'C'$.

(iii) *Si* $AB = A'B'$ et si $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$,
alors $ABC = A'B'C'$.

(i) Le lemme 1 du n° 2 assure l'existence d'un point D tel que $ABC = A'B'D$, puisque $AB = A'B'$. Alors $A'D = A'C'$ et $B'D = B'C'$, et comme $A'B' \neq 0$, C' et D sont confondus ou symétriques par rapport à (AB) (cf. (P3), § 1, n°1). Dans les deux cas $A'B'C' = A'B'D = ABC$, ce qui prouve l'assertion (i).

(ii) Le Lemme 1 assure encore l'existence de D tel que $ABC = A'B'D$. Alors $A'C' = AC = A'D$ et $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC} = \widehat{B'A'D}$; et il existe (proposition 1 du n° 2) $D_1 \in]A'D)$ et $B_1 \in]A'B')$

tels que $A'B_1D_1 = A'B'C'$. De l'égalité $A'B_1 = A'B'$, on déduit que $B_1 = B'$ (car $B_1 \in]A'B')$) ; des égalités $A'C' = A'D1 = A'D$, on déduit que $D = D_1$ puisque $D_1 \in]A'D)$; donc $A'B'D = A'B'C'$ et, puisque $A'B'D = ABC$, on conclut que $A'B'C' = ABC$, ce qui achève la démonstration du point (ii).

(iii) Il existe, toujours pour les mêmes raisons, un point D tel que $ABC = A'B'D$. On a alors :

(1) $\widehat{B'A'C'} = \widehat{B'A'D}$ (2) $\widehat{A'B'C'} = \widehat{A'B'D}$.

(1) assure qu'il existe D_1 sur $]A'D)$ et B_1 sur $]A'B')$ tels que $B'A'C' = B_1A'D_1$, alors $A'B' = A'B_1$ et $B_1 \in]A'B')$, donc $B_1 = B'$; donc $B'A'C' = B'A'D_1$ et de (P3) (cf. § 1, n° 1) on tire que D_1 et C' sont confondus ou symétriques par rapport à $(A'B')$. Quitte à remplacer D_1 et D par leurs symétriques par rapport à $(A'B')$, on peut toujours supposer que $D_1 = C'$.
De (2) on tire de même qu'il existe D_2 sur $]B'D)$ tel que $B'A'C' = B'A'D_2$. D'après (P3), D_2 et C' sont alors confondus ou symétriques par rapport à $(A'B')$. Dans ce dernier cas, puisque $[DD_2]$ ne coupe pas $(A'B')$, alors $[DC']$ le coupe (cf. la propriété (P4) du § 1, n° 1), ce qui contredit le fait que $D_1 \in]A'D)$ (rappelons-nous que $D_1 = C'$). Donc $D_2 = C' = D_1$ et D appartient à $(A'C')$ et à $(B'C')$. Donc $D_1 = D_2 = C' = D$, d'où : $ABC = A'B'D = A'B'C'$; ce qu'il fallait démontrer pour achever la preuve du théorème 2.

4. Critères d'aplatissement.

Nous allons indiquer dans ce n° d'importantes conséquences du théorème « des cas d'égalité » (théorème 2, § 1, n° 3) dans le cas particulier des triangles *aplatis* (*Géo.* chap. MIC, § 6, n° 9). Rappelons tout d'abord les critères d'aplatissement (au sens du chap. MIC, § 6, n° 10, définitions 7 et 8) déjà rencontrés jusqu'ici ; on pourra se reporter pour cela à la première partie de ce traité, livre II, chap. 9, §§ 2 et 3, ainsi qu'aux sixième et neuvième parties, livres IXL à XCII.

DÉFINITION 3. — *Soit* ABC *un triangle du plan. On dit que le triangle* ABC *est un triangle aplati en* A (*resp.* apla-

Voici donc démontré cet illustre théorème. Sa démonstration repose sur la symétrie orthogonale et s'intègre fort bien au programme actuel des collèges.

Pourquoi donc, compte tenu de l'efficacité et de la simplicité d'emploi de cet outil, n'en pas fournir la démonstration le plus tôt possible ?

D'autant qu'il peut aussi être le point de départ de prolongements intéressants : une isométrie étant définie comme une transformation conservant les distances, elle transforme, d'après le cas numéro 1 de ce théorème, tout triangle en un triangle qui lui est égal, et donc conserve les angles ; on prouve alors facilement qu'elle se décompose en un produit de symétries.

On peut aussi préférer quelques variantes : ainsi, ayant défini les symétries comme les involutions non identiques ayant deux points fixes et conservant alignement et perpendicularité, le théorème précédent permet de définir la congruence des segments sans qu'il soit nécessaire de définir la distance ...

Toutes ces démarches aboutissent à des exposés déductifs dont peut s'inspirer un cours : elles auraient plu dans les années soixante-dix. Un sage retour au bon sens a condamné ces élucubrations. On leur préfère l'étude de quelques outils bien choisis : symétries centrales, axiales et, plus délicates, les rotations qui n'apparaissent qu'en quatrième. Bien entendu il est difficile de faire de la géométrie, c'est-à-dire de mesurer, avec si peu de moyens.

Et d'aucuns de s'étonner que les cas d'égalité des triangles aient été les oubliés de cette résurrection. Ils ne sont pas en fait absolument nécessaires et l'outil trigonométrique les remplace avantageusement, de même qu'il fournit une démonstration simple du théorème de Thalès. Mais comment définit-on le cosinus sans le théorème de Thalès et surtout sans une théorie de la similitude des triangles rectangles ?

Il s'agit sans doute de résultats suffisamment évidents pour qu'on puisse les admettre comme points de départ. Plus évidents dira-t-on que les cas d'égalité ses triangles.

Et comment définit-on l'égalité des angles ? Bien sûr la démonstration donnée ci-dessus est parfaitement illisible quoiqu'elle diffère peu de celle qu'en donna Euclide. La différence vient de ce qu'aucune référence au mouvement n'y apparaît, celui-ci ayant été effacé par l'usage des symétries. C'est en réalité une différence essentielle. Pourquoi s'intéresser à l'orbite d'un triangle par ce groupe si particulier, si l'on ignore qu'il n'est autre que le groupe des déplacements ? Cette démonstration et les prolongements ou variantes que j'en proposais ci-dessus participent d'une même démarche de "renversement épistémologique" : procédé qui consiste, par une analyse minutieuse du domaine étudié, à renverser l'ordre d'exposition des concepts.

Les concepts naïfs de départ (mouvement, superposition de figures) délicats à énoncer sont remplacés par les concepts abstraits qu'ils avaient engendrés, lesquels s'énoncent sans grande difficulté linguistique et dont découleront les concepts naïfs de départ ou plutôt leur version formelle (le mouvement devenant un déplacement par exemple).

Enseigner la géométrie ne se réduit pas à dresser un catalogue de recettes, pardon d'outils, comme le laisserait croire la lecture de certains manuels actuels. C'est d'abord choisir un exposé déductif cohérent qui structure les connaissances pour les déplacer du terrain expérimental au terrain déductif. C'est ensuite mettre en évidence auprès des élèves cet aspect de la démarche scientifique et son intérêt :

"Il n'est pas besoin que j'entreprenne de dire au vray quelle est sa nature, et je croy qu'il suffira que je me serve de deux ou trois comparaisons qui ayde à la concevoir en la façon qui me semble la plus commode, pour expliquer toutes celles de ses propriétés que l'expérience nous fait connoistre et pour déduire toutes les autres qui ne peuvent pas si aysément estre remarquées" (Descartes : "L'Optique").

Dans las années soixante-dix le souci de la commodité linguistique poussa au choix d'une exposition relevant du renversement épistémologique, cela conduisit rapidement à la fuite du sens. Il me semble qu'on a perdu aujourd'hui cette prétention à un exposé structuré et déductif, par réaction contre cette époque, mais aussi en partie par peur d'avoir dans les débuts recours à des concepts trop naïfs, comme le mouvement, que les mathématiques modernes ont rendu tabous.

Parce qu'il est un moyen clair et simple de démonstration, parce qu'il s'appuie sur des schémas de pensée spontanés (superposer pour mesurer), l'exposé euclidien me semble un passage obligé de l'enseignement de la géométrie. A l'ignorer on oblige l'élève à la schizophrénie : *je pense intérieurement ainsi, mais je démontre autrement.*

Résoudre et démontrer deviennent deux activités antagonistes, d'où ces débats sur le temps à consacrer à chacune d'elles comme si on pouvait démontrer sans résoudre ou résoudre sans démontrer.

En outre la démarche euclidienne est un remarquable exemple de renversement épistémologique, que nos élèves rencontreront ailleurs en mathématiques (dérivées / vitesse ou tangente par exemple). En effet une fois le théorème des cas d'égalité établi à l'aide du concept de mouvement, il devient le fondement de la géométrie. Dans bien des situations où il pouvait recourir à la notion de mouvement, Euclide l'évite et s'appuie sur ce théorème qui apparaît à nos yeux comme un axiome. Tous nos élèves, hélas, ne parviendront peut-être pas à ce stade de compréhension. Certains le pressentiront. Pour les autres, de toutes façons cette démarche a fait les preuves de sa simplicité et de son efficacité.

Pourquoi donc se priver de cet archaïsme ?