L'UNIFORMITE, UN CONCEPT IMPLICITE EFFICACE CHEZ CAUCHY

Henri LOMBARDI
Irem de Besançon

Résumé : *Nous analysons plusieurs définitions et preuves du cours d'Analyse de Cauchy, en relation avec la notion d'uniformité (fonction uniformément continue sur un intervalle, uniformément dérivable sur un intervalle, suite uniformément convergente de fonctions).*

Les preuves de Cauchy sont réputées fautives, mais elles sont parfaitement correctes si on utilise l'interprétation «uniforme» des définitions. En outre, les preuves sont particulièrement simples et claires. Enfin, les définitions uniformes ont, contrairement aux définitions «ponctuelles», un réel caractère opératoire, constructif.

Le problème épistémologique suivant se pose donc :

pourquoi a-t-on, à un certain moment, décidé de faire compliqué quand on pouvait faire simple ?

En d'autres termes : pourquoi a-t-on choisi comme concepts de référence des concepts qui d'une part sont non opératoires et, d'autre part, rendent les preuves inutilement subtiles et compliquées ?

Introduction

Le but de cet article n'est pas de «réhabiliter» les preuves de Cauchy, ni de soutenir la thèse selon laquelle Cauchy «pensait uniforme», au sens moderne de la chose. Les preuves de Cauchy peuvent aussi bien être rendues correctes par une lecture «non-standard» que par notre lecture «uniforme»(1). Mais la thèse selon laquelle Cauchy aurait pensé ceci ou cela est futile et de peu d'intérêt. L'état des mathématiques à son époque, avant toute définition claire des nombres réels, avant l'introduction des quantificateurs et bien avant l'invention d'une analyse non-standard formalisée, ne permettait tout simplement pas de penser «uniforme» ou «non-standard» au sens où nous l'entendons aujourd'hui.

Cauchy passait à l'époque aux yeux de certains pour un coupeur de cheveux en quatre et un dangereux faiseur de contre-exemples, mais la clarté de son exposition finit par convaincre. Il eut l'immense mérite de commencer à fonder l'analyse sur des bases simples, en fournissant des définitions relativement précises pour les notions de limite, de continuité, de dérivabilité, et surtout en élaborant des preuves pour des

(1) Au sujet de l'intérêt et des abus d'une lecture non-standard de Cauchy, on lira «Imre LAKATOS : Cauchy and the Continuum, the Significance of Non-Standard Analysis for the History and Philosophy of Mathematics» in Math. Intelligencer, 1978, vol 1, n°3, p 151-161.

résultats considérés par les uns comme évidents et par les autres comme parfaitement obscurs. Bien que certains de ses théorèmes «souffraient(2) des exceptions», au moins des preuves relativement précises étaient-elles en place(3), qu'il suffirait d'examiner à la loupe pour faire évoluer définitions, énoncés des théorèmes, et interprétations sémantiques des résultats obtenus.

La thèse que nous défendons est que la manière la plus simple de rétablir les preuves de Cauchy dans les canons de la rigueur contemporaine est de n'y pas toucher et de procéder au contraire à une lecture «uniforme» systématique des définitions qu'il donne.

Les infiniment petits comme «manière de parler» d'autre chose

Nous commençons par examiner un premier passage où Cauchy introduit la notion d'infiniment petit. Comme on peut le constater, il ne s'agit pas d'un infiniment petit en acte, d'une quantité infinitésimale, mais bien d'une «manière de parler» d'une quantité variable tendant vers 0. Il s'agit donc plutôt d'une notion dynamique, où la variable *varie effectivement*. Notons à ce sujet que cette notion si intuitive de variable n'a pas de contrepartie théorique dans les différents modèles mathématiques abstraits ayant cours aujourd'hui. Variable, inconnue, paramètre, sont trois dénominations pour "une lettre désignant un nombre réel", et c'est seulement depuis l'extérieur de la théorie que l'utilisateur opte pour l'un des trois termes, conformément à ses besoins et à son intuition.

(2) «souffrissent», pour les formalistes à qui ça ferait plaisir.

(3) On consultera Lakatos «Preuves et Réfutations» (chez Hermann) au sujet de la place centrale des preuves, plutôt que les théorèmes, dans l'activité mathématique, ainsi que sur le sujet plus précis des «théorèmes prouvés mais souffrant des exceptions» chez Cauchy.

Encadré 1 : *La notion d'infiniment petit vue comme «manière de parler» d'une suite, (ou plus généralement d'une quantité variable), convergeant vers zéro.*

Cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique

(1ère partie, chap. II, Œuvres complètes, sér. II, t. 3)

§ I. — Des quantités infiniment petites et infiniment grandes.

On dit qu'une quantité variable devient infiniment petite, lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro. Il est bon de remarquer à ce sujet qu'on ne doit pas confondre un décroissement constant avec un décroissement indéfini. La surface d'un polygone régulier circonscrit à un cercle donné décroît constamment à mesure que le nombre des côtés augmente, mais non pas indéfiniment, puisqu'elle a pour limite la surface du cercle. De même encore, une variable qui n'admettrait pour valeurs successives que les différents termes de la suite

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$$

prolongée à l'infini, décroîtrait constamment, mais non pas indéfiniment, puisque ses valeurs successives convergeraient vers la limite 1. Au contraire, une variable qui n'aurait pour valeurs successives que les différents termes de la suite

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \ldots$$

prolongée à l'infini, ne décroîtrait pas constamment, puisque la différence entre deux termes consécutifs de cette suite est alternativement positive et négative ; et, néanmoins, elle décroîtrait indéfiniment, puisque sa valeur finirait par s'abaisser au-dessous de tout nombre donné.

Continuité, le global et le local

Nous entrons maintenant dans le vif de notre sujet, en examinant en détail le paragraphe un peu ambigu où sont proposées plusieurs définitions pour la notion de continuité d'une fonction (d'une variable réelle) définie sur un intervalle.

Dans ce que nous appelons la "**définition 1**", Cauchy s'attaque *pour commencer* à la définition pour la continuité d'une fonction sur un intervalle $[x_0\ , x_1]$, c.-à-d. selon ses termes, « entre deux limites assignées de la variable x » :

> Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction continue de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence
>
> $$f(x+\alpha)-f(x),$$
>
> décroît indéfiniment avec celle de α.

Pour comprendre cet énoncé, il faut d'abord rappeler que "valeur numérique" signifie à l'époque ce que nous désignons aujourd'hui par "valeur absolue"[4].

Si nous cherchons quelle serait la traduction contemporaine la plus fidèle de cette "**définition 1**", nous aboutissons à la définition actuelle de : *fonction continue en tout point de l'intervalle*, c.-à-d. avec les quantificateurs :

$$\forall x \in [x_0\ , x_1]\ , \forall \varepsilon > 0\ , \exists \eta > 0$$
$$\forall \alpha\ , |\alpha < \eta| \Rightarrow |f(x+\alpha) - f(x)| < \varepsilon\ .$$ [5]

Il y a évidement un effort considérable à faire pour obtenir cette traduction. Et elle nous laisse comme un goût amer dans la bouche. Car si Cauchy avait eu clairement cela en tête, pourquoi n'aurait-il pas commencé par définir la continuité en un point ?[6]

Résumant sa pensée, soulignant la mise en forme définitive par un passage en italique, Cauchy énonce ensuite ce que nous appelons la "**définition 1bis**", 1bis parce qu'elle est simplement censée répéter plus clairement la définition 1 :

> En d'autres termes, *la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*

Mais là, la traduction la plus fidèle de cette phrase en langage moderne est celle de "*fonction uniformément continue sur l'intervalle*". C.-à-d. avec les quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0\ , \exists \eta > 0\ , \forall x \in [x_0\ , x_1]$$
$$\forall \alpha\ , |\alpha < \eta| \Rightarrow |f(x+\alpha) - f(x)| < \varepsilon\ .$$

(4) En 1820, on n'ose pas encore vraiment affirmer que -3 est un nombre à part entière. Par contre la révolution des mathématiques modernes a imposé à des élèves très jeunes que -3 est un nombre entier (ou entier relatif), et 3 un nombre entier positif (ou naturel, ça dépend de la mode). Cela a semblé à nos législateurs bourbakistes beaucoup plus intelligent que l'ancienne conception selon laquelle 3 est un nombre entier "tout court" et -3 un nombre entier "algébrique".

(5) Pour ne pas alourdir encore cet énoncé, ni non plus l'éloigner trop de la formulation de Cauchy, nous n'insisterons pas plus que lui sur le fait que $x+\alpha$ doit encore être sur l'intervalle.

(6) Comme nous le faisons aujourd'hui sans jamais nous poser le moindre problème à cet égard (à cause de notre désinformation concernant l'histoire du concept ? ou de notre non-formation à un réel esprit "scientifique", c.-à-d. critique ?, ou à cause de la nécessité de "terminer le programme" lequel comporte 99% de technique et 1% de réflexion ?)

Encadré 2 : *Définitions concernant la continuité des fonctions d'une seule variable.*
Cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique (1ère partie, chap. II. Œuvres complètes, sér. II, t. 3)

De la continuité des fonctions.

Parmi les objets qui se rattachent à la considération des infiniment petits, on doit placer les notions relatives à la continuité ou à la discontinuité des fonctions. Examinons d'abord sous ce point de vue les fonctions d'une seule variable.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence

$$f(x+\alpha) - f(x),$$

qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction *continue* de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

définition 1

valeur numérique signifie valeur absolue

$$f(x+\alpha) - f(x),$$

décroît indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, *la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*

définition 1bis

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

définition 2

Enfin, lorsqu'une fonction $f(x)$ cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable x, on dit qu'elle devient alors *discontinue* et qu'il y a pour cette valeur particulière *solution de continuité.*

définition 3

Vient ensuite ce que nous appelons la **définition 2**, qui est une définition locale de la continuité. Cette définition venant après la **définition 1** (ou **1bis**) indique bien que cette première n'avait pas un caractère local, au moins dans l'esprit de Cauchy :

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

La traduction la plus fidèle en langage moderne semble ici être : la fonction sera dite continue au voisinage de x si on peut trouver un intervalle contenant x sur laquelle la fonction est "globalement" continue (c.-à-d. *uniformément continue* si on accepte la traduction proposée de la **définition 1bis**).

Insistons sur le fait que cette définition serait parfaitement inutile si on avait *a priori* une conception purement locale de la continuité au départ. Par contre, elle devient indispensable si la première forme de continuité envisagée est globale, car il faut quand même pouvoir parler de la continuité d'une fonction comme $f(x) = 1/x$ sur l'intervalle $]0, 1]$ par exemple.

Notons aussi que n'apparaît jamais dans ce texte la notion de continuité en un point, au sens où nous l'entendons aujourd'hui.

Ce que nous appelons la **définition 3**, enfin, concerne la *discontinuité* (la solution de continuité) en un point. La phrase est particulièrement malaisée à interpréter :

> Enfin, lorsqu'une fonction $f(x)$ cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable x, on dit qu'elle devient alors *discontinue* et qu'il y a pour cette valeur particulière *solution de continuité.*

Un point de rupture de continuité semble donc être un point au voisinage duquel la fonction n'est plus continue, alors qu'elle est continue en tout point voisin distinct, comme par exemple le point 0 pour la fonction $f(x) = 1/x$. Des exemples opposés fournis par des fonctions tarabiscotées comme : $f(x) = x$ si x est rationnel, $f(x) = 0$ sinon, ne sont tout bonnement pas envisagés. Et il semble peu probable que l'on puisse admettre dans le cadre fixé par Cauchy qu'une telle fonction soit continue au point 0. Bien au contraire, les points où la fonction est "continue" semblent nécessairement former un ouvert.

Pour nous résumer, disons que les notions modernes de continuité qui nous semblent traduire le mieux les notions relativement floues de Cauchy sont celles de *continuité uniforme pour le cas d'un intervalle fermé borné, et celle de continuité localement uniforme pour un intervalle arbitraire.*(7)

On peut se demander si l'interprétation «uniforme» que nous proposons pour la définition 1bis se trouve plutôt renforcée ou plutôt infirmée dans la suite du texte.

Les preuves de continuité qui sont données pour les fonctions usuelles, et que nous ne reproduisons pas ici, peuvent en fait être lues comme rigoureuses, aussi bien du point de vue de la continuité en tout point que de celui de la continuité uniforme ou localement uniforme.

C'est plutôt à l'occasion de la preuve d'un théorème réputé faux que nous pouvons constater à quel point l'uniformité semble présente en filigrane, c'est le théorème suivant : *une fonction de plusieurs variables qui est séparément continue par rapport à chaque variable est continue par rapport à l'ensemble des variables* (le texte de Cauchy est à la page suivante).

(7) Ces notions sont en fait très voisines de celles données en mathématiques constructives ou algorithmiques, à savoir la continuité uniforme pour un intervalle fermé borné et la continuité «uniforme sur tout sous-intervalle fermé borné» pour un intervalle arbitraire.

Encadré 3 : *Continuité des fonctions de plusieurs variables, un théorème surprenant.*
Cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique (1ère partie, chap. II. Œuvres complètes, sér. II, t. 3)

Soit maintenant $f(x, y, z, \dots)$

une fonction de plusieurs variables $x, y, z, \dots$, et supposons que, dans le voisinage de valeurs particulières $X, Y, Z, \dots$ attribuées à ces variables, $f(x, y, z, \dots)$ soit à la fois fonction continue de x, fonction continue de y, fonction continue de z, ... On prouvera aisément que, si l'on désigne par $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ des quantités infiniment petites, et si l'on attribue à $x, y, z, \dots$ les valeurs $X, Y, Z, \dots$ ou des valeurs très voisines, la différence

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \dots) - f(x, y, z, \dots)$$

sera elle-même infiniment petite. En effet, il est clair que, dans l'hypothèse précédente, les valeurs numériques des différences

$$f(x+\alpha, y, z, \dots) - f(x, y, z, \dots),$$
$$f(x+\alpha, y+\beta, z, \dots) - f(x+\alpha, y, z, \dots),$$
$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \dots) - f(x+\alpha, y+\beta, z, \dots),$$

décroîtront indéfiniment avec celles des quantités variables $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, savoir, la valeur numérique de la première différence avec la valeur numérique de x, celle de la seconde différence avec la valeur numérique de β, celle de la troisième avec la valeur numérique de g, et ainsi de suite. On doit en conclure que la somme de toutes ces différences, savoir

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \dots) - f(x, y, z, \dots),$$

convergera vers la limite zéro, si $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ convergent vers cette même limite. En d'autres termes,

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \dots),$$

aura pour limite

$$f(x, y, z, \dots).$$

....

THEOREME I — Si les variables $x, y, z, \dots$ ont pour limites respectives les quantités fixes et déterminées $X, Y, Z, \dots$, et que la fonction $f(x, y, z, \dots)$ soit continue par rapport à chacune des variables $x, y, z, \dots$ dans le voisinage du système des valeurs particulières

$$x = X, \ y = Y, \ z = Z, \dots$$

$f(x, y, z, \dots)$ aura pour limite $f(X, Y, Z, \dots)$.

Nous faisons deux remarques concernant la preuve fournie par Cauchy.

D'abord, ce qui est en vue est la *continuité locale* et non pas la *continuité ponctuelle*. La preuve n'est pas écrite pour fonctionner en *un* point $(X, Y, Z, \ldots)$, au contraire il est explicitement dit que tout se passe de la même manière pour un $(x, y, z, \ldots)$ suffisamment voisin de $(X, Y, Z, \ldots)$. Ce fait n'apparaît d'ailleurs clairement que dans la preuve et non dans l'énoncé du théorème.

La deuxième remarque est que la preuve fonctionne si on comprend la continuité par rapport à chaque variable *séparément*, $x, y, z, \ldots$ comme devant être chaque fois une *continuité uniforme* par rapport à l'*ensemble* des variables. C.-à-d. avec les quantificateurs, et pour l'exemple de la continuité par rapport à la variable x :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,$$
$$\forall x, y, z, \ldots, \forall \alpha \ |\alpha < \eta| \Rightarrow$$
$$|f(x+\alpha, y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)| < \varepsilon.$$

Ceci en langage savant s'appellerait l'*uniforme équicontinuité*(8) de la fonction par rapport à chacune des variables séparément, les autres variables étant considérées comme les paramètres pour une famille de fonctions d'une seule variable (la variable isolée).

Nous terminons ici nos commentaires concernant les questions de continuité. Il est néanmoins intéressant de rappeler qu'un autre fameux théorème «faux» de Cauchy :

> *toute série convergente de fonctions continues converge vers une fonction continue*

est rétabli «juste» par une définition uniforme pour la notion de suite convergente de fonctions.

(8) Sans doute la notion qui s'adapterait le mieux à la preuve de Cauchy est celle d'uniforme équicontinuité *locale* (au voisinage de tout point).

Fonction dérivée et théorème des accroissements finis

Commençons par lire la définition de la notion de fonction dérivée. (Cours d'Analyse Ec. Polytech. Œuvres compl., sér. II, t. 4)

> Lorsque la fonction $y = f(x)$ reste continue entre deux limites données de la variable x, et que l'on assigne à cette variable une valeur comprise entre les deux limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit, attribué à la variable, produit un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Par conséquent, si l'on pose alors $\Delta x = i$, les deux termes du *rapport aux différences*
>
> (1) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$
>
> seront des quantités infiniment petites. Mais, tandis que ces deux termes s'approcheront indéfiniment et simultanément de la limite zéro, le rapport lui-même pourra converger vers une autre limite, soit positive, soit négative. Cette limite, lorsqu'elle existe, a une valeur déterminée pour chaque valeur particulière de x ; mais elle varie avec x. Ainsi, par exemple, si l'on prend $f(x) = x^m$, m désignant un nombre entier, le rapport entre les différences infiniment petites sera :
>
> $$\frac{(x+i)^m - x}{i} =$$
>
> $$mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + x^{m-2}i + \ldots + i^{m-1}$$
>
> et il aura pour limite la quantité mx^{m-1} c'est-à-dire une nouvelle fonction de la

variable x . Il en sera de même en général ; seulement la forme de la fonction nouvelle qui servira de limite au rapport

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

dépendra de la forme de la fonction proposée $y = f(x)$.
Pour indiquer cette dépendance, on donne à la nouvelle fonction le nom de *fonction dérivée*, et on la désigne, à l'aide d'un accent, par la notation :

$$y' \text{ ou } f'(x).$$

Remarquons que la valeur de la dérivée en un point n'intéresse pas vraiment Cauchy, mais que c'est plutôt la notion de fonction dérivée qu'il cherche à définir. *A priori*, il y a donc au moins deux lectures modernes de cette définition, selon que l'on demande une convergence en tout point ou une convergence uniforme du taux d'accroissement moyen vers la fonction dérivée. Avec les quantificateurs, la définition ponctuelle s'écrit :

$$\forall x, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall \alpha \ |\alpha < \eta|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} - f'(x) \right| < \varepsilon .$$

C'est la définition habituellement donnée aujourd'hui. La définition «uniforme» s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [x_0, x_1], \forall \alpha \ |\alpha < \eta|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} - f'(x) \right| < \varepsilon .$$

C'est la définition que l'on donne en mathématique constructive. Elle implique que la fonction dérivée est elle-même continue.

Remarquez que la preuve donnée ci-dessus par Cauchy concernant la dérivée de la fonction puissance fonctionne parfaitement dans le cadre de la définition «uniforme» (sur un intervalle fermé borné).

Examinons maintenant la preuve du théorème des accroissements finis donnée par Cauchy (encadré 4). Elle a l'immense mérite d'être simple et *naturelle*, contrairement aux preuves actuellement en vigueur dans les cours élémentaires de calcul différentiel.

On constate sans difficulté que la définition «uniforme» pour la notion de fonction dérivée rend la preuve élémentaire de Cauchy parfaitement rigoureuse (alors qu'elle est souvent considérée comme incorrecte, parce qu'on se réfère à la définition «ponctuelle»).

En outre on constate également que les théorèmes usuels concernant la dérivée de fonctions élémentaires, ou sur la dérivée d'un produit, d'une somme, d'un quotient (sur un intervalle où le dénominateur reste de signe constant et en valeur absolue > h > 0 donné), sont de démonstration aussi facile en version «uniforme» (dérivabilité uniforme sur tout intervalle fermé borné contenu dans l'intervalle de définition) qu'en version «ponctuelle».

Terminons ce paragraphe par un commentaire sur une deuxième version du théorème des accroissements finis (Cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique 1ère partie, Œuvres complètes, série II, tome 4) :

Corollaire. – Si la fonction dérivée $f(x)$ est elle-même continue entre les limites $x = x_0$, $x = X$, en passant d'une limite à l'autre, cette fonction variera de manière à rester toujours

Encadré 4 : *Fonction dérivée, théorème des accroissements finis.*
Cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique (Œuvres complètes, série II, tome 4)

Nous allons maintenant faire connaître une relation digne de remarque([1]) qui existe entre la dérivée $f'(x)$ d'une fonction quelconque $f(x)$ et le rapport aux différences finies

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Si dans ce rapport on attribue à x une valeur particulière x_0, et si l'on fait, en outre, $x_0+h = X$, il prendra la forme $\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}$. Cela posé, on établira sans peine la proposition suivante :

THEOREME. — Si, la fonction $f(x)$ étant continue entre les limites $x = x_0$, $x = X$, on désigne par A la plus petite, et par B la plus grande des valeurs que la fonction dérivée $f'(x)$ reçoit dans cet intervalle, le rapport aux différences finies

$$(4)\qquad \frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}$$

sera nécessairement compris entre A et B.

Démonstration.— Désignons par δ, ε deux nombres très petits, le premier étant choisi de telle sorte que, pour des valeurs numériques de i inférieures à δ, et pour une valeur quelconque de x comprise entre les limites x_0, X, le rapport

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

reste toujours supérieur à $f'(x)-\varepsilon$ et inférieur à $f'(x)+\varepsilon$. Si, entre les limites x_0, X, on interpose $n-1$ valeurs nouvelles de la variable x, savoir : $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, de manière à diviser la différence $X-x_0$ en éléments

$$x_1-x_0,\ x_2-x_1,\ \ldots,\ X-x_{n-1},$$

qui étant tous de même signe, aient des valeurs numériques inférieures à δ, les fractions

$$(5)\qquad \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},\ \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},\ \ldots,\ \frac{f(X)-f(x_{n-1})}{X-x_{n-1}}$$

se trouvant comprises, la première entre les limites $f'(x_0)-\varepsilon$, $f'(x_0)+\varepsilon$, la seconde entre les limites $f'(x_1)-\varepsilon$, $f'(x_1)+\varepsilon$, ... seront toutes supérieures à la quantité $A-\varepsilon$, et inférieures à la quantité $B+\varepsilon$. D'ailleurs, les fractions (5) ayant des dénominateurs de même signe, si l'on divise la somme de leurs numérateurs par la somme de leurs dénominateurs, on obtiendra une fraction *moyenne*, c'est-à-dire comprise entre la plus petite et la plus grande de celles que l'on considère *(voir l'Analyse algébrique,* Note II, théorème XII). L'expression (4), avec laquelle cette moyenne coïncide, sera donc elle-même renfermée entre les limites $A-\varepsilon$, $B+\varepsilon$, et, comme cette conclusion subsiste quelque petit que soit le nombre ε, on peut affirmer que l'expression (4) sera comprise entre A et B.

([1]) On peut consulter sur ce sujet un mémoire de M. Ampère, inséré dans le XIIIe Cahier *du Journal de l'Ecole Polytechnique.*

comprise entre les deux valeurs A et B, et à prendre successivement toutes les valeurs intermédiaires. Donc alors toute quantité moyenne entre A et B sera une valeur de $f'(x)$ correspondante à une valeur de x renfermée entre les limites x_0 et $X = x_0 + h$ ou, ce qui revient au même, à une valeur de x de la forme :

$$x_0 + \theta h = x_0 + \theta(X - x_0),$$

θ désignant un nombre inférieur à l'unité. En appliquant cette remarque à l'expression (4), on en conclura qu'il existe entre les limites 0 et 1 une valeur de θ propre à vérifier l'équation

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f'(x_0 + \theta(X - x_0)).$$

Chez Cauchy, cette deuxième forme est prouvée en utilisant la continuité de la fonction dérivée. Comme nous l'avons déjà signalé, cette continuité est nécessaire lorsqu'on adopte la définition uniforme.

Il est bien connu que la première forme du théorème des accroissements finis se généralise aisément en plusieurs variables, ce qui n'est pas le cas de la seconde forme.

La démarche la plus courante aujourd'hui utilise la deuxième forme pour prouver la première forme. La deuxième forme est prouvée à partir du théorème de Rolle. Mais le théorème de Rolle est lui-même prouvé en utilisant une technique «non opératoire» : chercher un point sur l'intervalle où la fonction atteint son maximum. Or il n'y a pas d'algorithme général pour cette recherche, même si la dérivée est donnée comme fonction uniformément continue sur l'intervalle. Le théorème de Rolle ne peut être réalisé par un algorithme qu'en imposant des restrictions sévères à la fonction étudiée, et le point obtenu est un extrémum local, mais non nécessairement global de la fonction(9).

Conclusion

Notre sentiment est donc que la démarche générale de Cauchy concernant la question centrale des accroissements finis présente de nombreux avantages, essentiellement la simplicité des preuves et leur caractère opératoire.

Le problème épistémologique suivant se pose donc :

pourquoi a-t-on, à un certain moment, décidé de faire compliqué quand on pouvait faire simple ?

En d'autres termes : pourquoi a-t-on choisi comme concepts de référence des concepts qui d'une part sont non opératoires et, d'autre part, rendent les preuves inutilement subtiles et compliquées ?

Des avantages de même nature s'appliquent aussi au traitement de la continuité en version «uniforme».

Néanmoins, il serait abusif de prétendre que tout est toujours plus simple en version uniforme. Les trois notions : «continuité en tout point», «continuité uniforme sur tout intervalle fermé borné», «continuité localement uniforme», ne sont pas équivalentes du point de vue algorith-

(9) La référence pour l'analyse constructive est : Bishop, Bridges «Constructive Analysis» chez Springer (1985) (réédition, améliorée, d'un livre datant de 1967). Aucun éditeur français n'accepte aujourd'hui de publier une traduction de cet ouvrage fondamental. Il faut dire que leurs «conseillers scientifiques» sont tous des bourbakistes. La traduction de «Preuves et Réfutations» de Lakatos avait de la même manière été bloquée pendant plus de vingt ans... La désinformation ne s'applique pas seulement à la guerre du Golfe !

mique (opératoire), mais certaines preuves ne fonctionnent que dans la premier cadre, tandis que d'autres sont plus simples dans le deuxième cadre.

En outre des fonctions tarabiscotées de toutes sortes se sont imposées *dans la pratique* (fonctions intégrables au sens de Lebesgue, espace de Hilbert des fonctions de carré sommable ...) sans qu'on se soit d'emblée rendu compte que ces objets n'avaient pas leur statut le plus naturel en tant que fonctions, mais en tant qu'éléments d'espaces fonctionnels. De même qu'un nombre réel est un objet idéal nécessaire pour comprendre des calculs dont les entrées-sorties sont des nombres rationnels, de même, il est nécessaire d'utiliser des fonctions de carré sommable abstraites, limites «en un sens bien précisé» de fractions rationnelles à coefficients rationnels, pour comprendre des calculs dont les entrées-sorties sont des objets de cette dernière sorte.

Dans une généralisation ultérieure, les distributions, ces nouvelles «fonctions» ne sont plus définies nulle part (au moins une fonction de carrée sommable est-elle réputée définie presque partout). Et la «rigueur française» rejette la terminologie de «fonctions généralisées» pour les distributions. Cette même «rigueur» devrait en bonne logique bourbakiste frapper d'oukase la terminologie de «fonction de carré sommable» puisqu'une telle fonction, n'étant définie que «presque partout» n'est en fait définie nulle part (quoique en un sens moins fort que pour les distributions).

Il nous semble quant à nous que la vraie rigueur devrait se préoccuper des questions de fond plus que des questions de forme. Une terminologie intuitive nous semble toujours préférable à une terminologie abstraite. Une preuve qui se termine par «et ainsi de suite ...» est tout aussi rigoureuse qu'une preuve formalisée par récurrence. Seul le degré de formalisation est en cause, non le fond de la démonstration. Par contre la différence entre théorèmes «opératoires» et théorèmes «non opératoires» en analyse est une réelle question de fond qui n'est pratiquement jamais prise en compte par les théoriciens. Enfin, la nécessité d'avoir des preuves simples pour les théorèmes intuitivement vrais et fondamentaux, comme le théorème des accroissements finis, devrait être un critère de discrimination décisif quant au choix du modèle mathématique et de l'exposé pédagogique.

ANNEXES

Encadré 5 : *Le célèbre critère de Cauchy.*
Cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique. 1ère Partie, chap. VI (Œuvres complètes, série II, tome 3)

D'après les principes ci-dessus établis, pour que la série

(1) $$u_0\,,\ u_1\,,\ u_2,\ \ldots\,,\ u_n\,,\ u_{n+1}\,,\ \ldots$$

soit convergente, il est nécessaire et il suffit que des valeurs croissantes de n fassent converger indéfiniment la somme

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

vers une limite fixe s ; en d'autres termes, il est nécessaire et il suffit que, pour des valeurs infiniment grandes du nombre n , les sommes

$$s_n\,,\ s_{n+1}\,,\ s_{n+2}\,,\ \ldots$$

diffèrent de la limite s , et par conséquent entre elles, de quantités infiniment petites. D'ailleurs, les différences successives entre la première somme s_n et chacune des suivantes sont respectivement déterminées par les équations

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= u_n \\ s_{n+2} - s_n &= u_n + u_{n+1} \\ s_{n+3} - s_n &= u_n + u_{n+1} + u_{n+2} \end{aligned}$$

Donc, pour que la série (I) soit convergente, il est d'abord nécessaire que le terme général u_n décroisse indéfiniment, tandis que n augmente : mais cette condition ne suffit pas, et il faut encore que, pour des valeurs croissantes de n , les différentes sommes

$$\begin{aligned} &u_n + u_{n+1}\,, \\ &u_n + u_{n+1} + u_{n+2}\,, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que les sommes des quantités $u_n\,,\ u_{n+1}\,,\ u_{n+2}\,,\ \ldots$, prises, à partir de la première, en tel nombre que l'on voudra, finissent par obtenir constamment des valeurs numériques inférieures à toute limite assignable. Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est assurée.

On notera que Cauchy n'éprouve absolument pas le besoin de donner une preuve. Et pour cause ! Aucune définition précise de la notion de nombre réel n'était encore clarifiée. Nous voyons par contre aujourd'hui dans cet énoncé la base sur laquelle peuvent être définis les nombres réels. C'est d'ailleurs à Cantor que revient la mérite d'avoir construit une définition des nombres réels à partir des «suites de Cauchy de nombres rationnels».

Encadré 6 : *La somme d'une série convergente de fonctions continues est une fonction continue (avec une preuve « déficiente »).* **Cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique** (Œuvres complètes, série II, tome 4)

De cette dernière équation, il résulte que les quantités

$$u_n \ , \ u_{n+1} \ , \ u_{n+2} \ , \ \ldots$$

formeront une nouvelle série convergente dont la somme sera équivalente à $s - s_n$. Si l'on représente cette même somme par r_n, on aura $s = s_n + r_n$; et r_n sera ce qu'on appelle le reste de la série (1) à partir du $n^{ième}$ terme.

Lorsque, les termes de la série (I) renfermant une même variable x, cette série est convergente, et ses différents termes fonctions continues de x, dans le voisinage d'une valeur particulière attribué à cette variable, s_n, r_n *et* s sont encore trois fonctions de la variable x, dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissements que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite ; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n, si l'on attribue à n une valeur très considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante :

THEOREME 1. — *Lorsque les différents termes de la série (1) sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.*

Encadré 7 : *Continuité de la fonction obtenue en composant deux fonctions continues.*
Cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique 1ère Partie, chap. II (Œuvres complètes, série II, tome 3)

THEOREME II. — *Désignons par*

$$x \, , y \, , z \, , \ldots$$

plusieurs fonctions de la variable t, qui soient continues par rapport à cette variable dans le voisinage de la valeur particulière $t = T$. Soient, de plus,

$$X \, , Y \, , Z \, , \ldots$$

les valeurs particulières de $x, y, z, \ldots$ correspondantes à $t = T$; et supposons que, dans le voisinage de ces valeurs particulières, la fonction

$$u = f(x \, , y \, , z \, , \ldots)$$

soit en même temps continue par rapport à x, continue par rapport à y, continue par rapport à z, ... ; u, considérée comme une fonction de t, sera encore continue par rapport à t dans le voisinage de la valeur particulière $t = T$.

Encadré 8 : *La somme d'une série convergente de fonctions est une fonction continue.*
Compte rendu de l'Académie des Sciences 14 mars 1853 (Œuvres complètes, série I, tome 12)

ANALYSE MATHEMATIQUE — *Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données.*

En établissant, dans mon Analyse Algébrique, les règles générales relatives à la convergence des séries, j'ai, de plus, énoncé le théorème suivant :

Lorsque les différents termes de la série

(1) $$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$$

sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable, dans le voisinage d'une valeur particulière ; pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue x.

Comme l'ont remarqué MM. Bouquet et Briot, ce théorème se vérifie pour les séries ordonnées suivant les puissances ascendantes d'une variable. Mais, pour d'autres séries, il ne saurait être admis sans restriction. Ainsi, par exemple, il est bien vrai que la série

(2) $$\sin x, \frac{\sin 2x}{2}, \frac{\sin 3x}{3}, \dots,$$

toujours convergente pour des valeurs réelles de x, a pour somme une fonction de x qui reste continue, tandis que x, supposée réelle, varie, dans le voisinage d'une valeur distincte d'un multiple $\pm 2n\pi$ de la circonférence 2π, et qui se réduit, en particulier, à $\frac{\pi - x}{2}$, entre les limites $x = 0$, $x = 2\pi$. Mais, à ces limites mêmes, la somme s de la série (2) devient discontinue, et cette somme, considérée comme fonction de la variable réelle x, acquiert à la place de la valeur

$$+\frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2},$$

donnée par la formule

$$s = \frac{\pi - x}{2},$$

la valeur singulière $s = 0$, qui reparaît encore quand on suppose

$$x = \pm 2n\pi,$$

n étant un nombre entier quelconque.

Au reste, il est facile de voir comment on doit modifier l'énoncé du théorème, pour qu'il n'y ait plus lieu à aucune exception. C'est ce que je vais expliquer en peu de mots.

D'après la définition proposée dans mon *Analyse algébrique,* et généralement adoptée aujourd'hui, une fonction *u de la variable* réelle x sera continue entre deux limites données de x, si, cette fonction admettant pour chaque valeur intermédiaire de x une valeur unique et finie, un accroissement infiniment petit attribué à la variable produit toujours, entre les limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.

Cela posé, concevons que la série (1) reste convergente, et que ses divers termes soient fonctions continues d'une variable réelle x, pour toutes les valeurs de x renfermées entre certaines limites.

Soient alors

s la somme de la série ;

s_n la somme de ses n premiers termes ;

$r_n = s - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots$ le reste de la série indéfiniment prolongée à partir du terme général u_n.

Si l'on nomme n' un nombre entier supérieur à n, le reste r_n ne sera autre chose que la limite vers laquelle convergera, pour des valeurs croissantes de n', la différence

(3) $$s_{n'} - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n'-1}$$

Concevons, maintenant, qu'en attribuant à n une valeur suffisamment grande on puisse rendre, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites données, le module de l'expression (3) (quel que soit n'), et, par suite, le module de r_n, inférieurs à un nombre aussi petit que l'on voudra. Comme un accroissement attribué à x pourra encore être supposé assez rapproché de zéro pour que l'accroissement correspondant de s_n offre un module inférieur à un nombre aussi petit que l'on voudra, il est clair qu'il suffira d'attribuer au nombre n une valeur infiniment grande, et à l'accroissement de x une valeur infiniment petite, pour démontrer, entre les limites données, la continuité de la fonction

$$s = s_n + r_n$$

Mais cette démonstration suppose évidemment que l'expression (3) remplit la condition ci-dessus énoncée, c'est-à-dire que cette expression devient infiniment petite pour une valeur infiniment grande attribuée au nombre entier n. D'ailleurs, si cette condition est remplie, la série (1) sera évidemment convergente. En conséquence, on peut énoncer le théorème suivant :

THEOREME I. — *Si les différents termes de la série*

(1) $$u_0\ ,\ u_1\ ,\ u_2\ ,\ \ldots,\ u_n\ ,\ u_{n+1}\ ,\ \ldots$$

sont des fonctions de la variable réelle x, continues, par rapport à cette variable, entre les limites données ; si, d'ailleurs, la somme

(3) $$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n'-1}$$

devient toujours infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes des nombres entiers n et $n' > n$, la série (1) sera convergente, et la somme s de la série (1) sera, entre les limites données, fonction continue de la variable x.