REPERES - IREM . n°5 - octobre 1991

QUELQUES DIFFICULTES D'APPRENTISSAGE DU CONCEPT DE TANGENTE

Maggy SCHNEIDER-GILOT
Facultés Universitaires de Namur

Dans cet article, nous explorons quelques facettes de la tangente en tant qu'objet mental (au sens de H. Freudenthal, 1983), chez des élèves des deux dernières années du cycle secondaire. Il nous suffira, en commençant cet exposé, de considérer les objets mentaux comme des notions familières, sorte de substituts primitifs des concepts proprement mathématiques et qui peuvent à terme opposer des difficultés à la formation de ceux-ci.

Ce qui suit est pour l'essentiel extrait d'une thèse de doctorat (Schneider, 1988), consacrée principalement aux objets mentaux "aire" et "volume", mais aussi aux notions de vitesse, de débit instantanés et de tangente. Les observations recueillies à propos de ces derniers nous ont permis de corroborer ou d'éclairer plusieurs hypothèses émises à propos des premiers.

1. Une difficulté à associer la pente d'une tangente à la limite d'une suite de quotients différentiels.

Plusieurs faits relevés lors de cette expérimentation ou ailleurs témoignent d'une réelle difficulté des élèves du secondaire à associer la pente d'une tangente à la limite d'une suite de quotients différentiels.

1) En guise de séquence didactique, B. Cornu (1983) donne à plusieurs élèves en fin d'enseignement secondaire les instructions qui composent l'encadré ci-contre (encadré 1). Voici comment l'auteur commente les réactions des élèves :

"Venons-en à l'activité sur la tangente. Tous les élèves font allusion au mouvement de la règle (l'angle diminue, la distance diminue ; les mots "rotation", "translation", sont employés). Mais beaucoup ne font pas allusion à ce qui se passe lorsque le point M arrive en A`. Et parmi ceux qui y font allusion, beaucoup n'ont pas vu la notion de limite : "la règle tombe", "un point ne suffit pas pour déterminer une droite". Le mot "tangente" a été introduit par plusieurs élèves. Mais, pour calculer la pente d'une droite, tous affirment qu'il faut deux points, ce qui a incité plusieurs élèves à mesurer sur le dessin les coordonnées de deux points de la tangente pour calculer la pente. Là encore, on a donc trouvé l'idée d'un état final, mais qui est isolé, qui est tout à fait indépendant de ce qui s'est passé "avant" [B. Cornu, 1983].

2) A. Sierpinska (1985) met en évidence un fait comparable : un expérimentateur manipule devant deux élèves un matériel semblable à celui que décrit B. Cornu ; il leur montre ainsi, sans recourir à la parole, comment l'on peut regarder une tangente comme la "position limite" de sécantes qui tournent autour d'un point fixe. Ces mêmes élèves sont invités, deux semaines plus tard, à déterminer l'équation de la tangente à la courbe : $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, au point d'abcisse $x = 0$. Ils se souviennent de l'expérience mais : *"L'idée de calculer quelques valeurs du quotient différentiel au voisinage de zéro n'est pas venue des élèves ; elle leur a été soufflée par l'expérimentateur. La prise de conscience de la dépendance numérique de la position de la tangente à partir des positions de la sécante était très faible".*

3) Quant à nous, nous avons observé des élèves qui n'avaient reçu aucun enseignement sur les dérivées et qui étaient invités à déterminer les tangentes respectives aux graphes de $y = x^2$ et $y = x^3$ au point de coordonnées (1,1). Voici l'essentiel de nos observations.

a. La pente d'une tangente semble bien seconde, dans le chef des élèves, par rapport à la tangente elle-même : il s'agit pour eux de déterminer d'abord la tangente, ensuite sa pente, plutôt que le contraire. Aucune des conceptions de la tangente spontanément évoquées par ceux-ci ne fait mention de sa pente. Un élève propose même de prendre précisément la tangente pour trouver la pente d'une droite sécante dont les deux points d'intersection avec la courbe se sont rejoints. La plupart des élèves semblent donc très loin de l'idée de définir la tangente par le biais de sa pente. D'ailleurs, l'idée même d'une définition de la tangente est peu évoquée dans les classes : les élèves se posent la question du "comment déterminer la pente d'une tangente", jamais celle de définir la tangente elle-même, comme s'ils savaient depuis longtemps de quoi il s'agit.

b. La conception de la tangente la plus fréquemment rencontrée chez les élèves est la conception algébrique : une tangente est une droite qui n'a qu'un seul point d'intersection avec la courbe. Elle est à l'origine de la plupart des essais mis en œuvre pour

Encadré 1

Voici une courbe [Fig.1]. Au point A , je plante un clou (perpendiculairement à la feuille de papier). Je tiens un autre clou, perpendiculairement à la feuille, avec sa pointe sur le point M . J'appuie une règle sur les deux clous [Fig.2] : je déplace le point M vers le point A , le long de la courbe, en maintenant la règle appuyée contre les deux clous. Décrire ce que fait la règle.

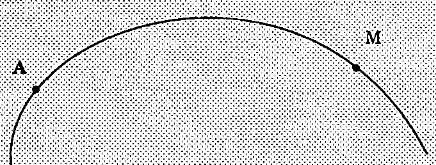


Fig. 1

Fig. 2

La courbe est maintenant la représentation graphique de la fonction

$$x \longmapsto x^2,$$

pour $x \geq 0$ [Fig.3].

Le point A est le point de coordonnées (1,1) .

Le point M est le point de coordonnées (m,m^2) .

Quelle est la pente de la droite AM ?

Quelle est la pente de la droite (D) ? (comment avez-vous fait pour la trouver ?)

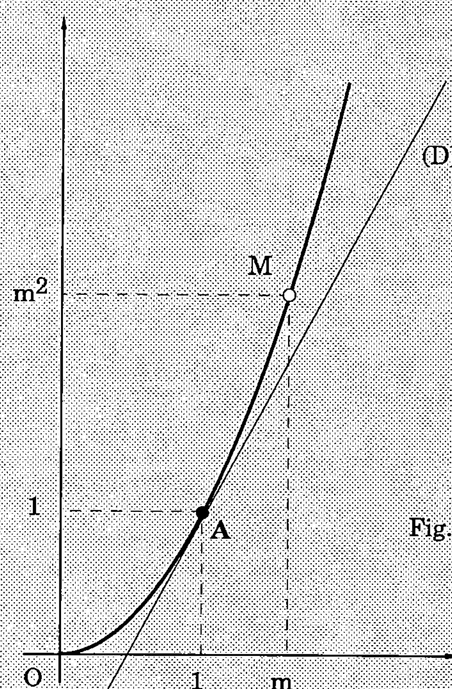


Fig. 3

résoudre le problème proposé... Cette conception algébrique est globale : elle concerne la tangente sur toute sa longueur. Elle est rapidement discréditée auprès des élèves eux-mêmes, lorsqu'on évoque devant eux, soit la tangente à $y = x^3$ au point (1,1) par exemple, soit un diamètre d'une parabole.

Une autre conception, plus locale celle-là, est présente dans l'un ou l'autre propos ou procédure : une tangente est une sécante dont les deux points d'intersection avec la courbe se sont rejoints. Ainsi, un élève détermine spontanément la tangente au graphe de $y = x^2$ au point (1,1) par une procédure mobilisant implicitement le passage à la limite :

Soit $x_1 = 1$ *, donc* $y_1 = 1$ *; le point passant par* (1,1) *;* $x_2 = 1 - n$ *, on prend un nombre quelconque sur la tangente :* $y_2 = (1 - n)^2$. *Avec* x_2*, on calcule* y_2 : pente =

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{1-(1-n)^2}{1-(1-n)} = \frac{-n^2+2n}{n} = -n+2 \,;$$

calcul de la pente par n *, en général. On prend* $n = 0$ *;* pente = 2 *, donc la pente tend vers* 2 = pente instantanée".

Il interprète son calcul, non en termes de limite d'une suite de quotients différentiels, mais en parlant de la tangente comme d'une droite qui rencontre la courbe en deux points confondus. Les autres élèves interprètent sa procédure comme lui ou, en tout cas, sans évoquer de suite de nombres et expriment, à l'égard de ce calcul, de nettes réticences telles que : *"Oui, mais si* $n = 0$, $x_1 = x_2$ *, mais* n *ne peut pas être égal à* 0 *, sinon on a* 0 *au dénominateur dans l'expression de la pente"*. La conception de la tangente décrite dans ce paragraphe est sous-jacente à la procédure par laquelle Fermat détermine des tangentes et que nous décrirons plus loin.

A. Sierpinska (1985) a observé, chez des élèves, une conception proche de la précédente : une tangente est une droite joignant deux points de la courbe infiniment proches. C'est, entre autres, celle de Leibniz.

Il est à noter que la plupart des élèves qui partagent ces conceptions locales de la tangente font bouger les deux points d'intersection plutôt que d'en laisser un fixe et de rapprocher l'autre de celui-là. En aucun cas, ils n'évoquent spontanément le mouvement de rotation d'une sécante autour d'un point fixe.

c. L'unicité de la tangente en un point d'une courbe est mise en cause par quelques élèves interrogés ici ou ailleurs et ce, semble-t-il, indépendamment de la manière dont ils se représentent cette droite. En effet, certains expriment leurs doutes quant à cette unicité, avant que la tangente ait été évoquée comme "position-limite" de sécantes qui tournent autour d'un point. D'autres le font après : nous avons rencontré, en 15 ans d'enseignement, plusieurs élèves dont c'était le cas. De même, en parlant d'une manipulation qui consiste à montrer une sécante qui tourne autour d'un point jusqu'à devenir tangente, A. Sierpinska (1985) écrit : *"Cela s'exprime par la naissance d'un doute sur le caractère déterministe du processus en question : "Quand on arrivera au point S on n'aura plus qu'un seul point, mais par un seul point on peut mener beaucoup de droites" [...]"*.

4) Des élèves échangent à propos d'un problème de débit instantané. Ils ont reçu,

quelques semaines auparavant, un enseignement sur les limites et les dérivées, interprétées comme pentes de tangentes. Ils dessinent le graphe du volume d'eau V versé en fonction du temps t ; ils interprètent correctement le débit moyen DV/Dt comme pente de sécante à ce graphe ; ils évoquent, ici le mot "dérivée", là "l'endroit de la courbe qui a une pente supérieure à 100" et, ailleurs, "le débit au bout du temps" qu'ils opposent au débit moyen. Cependant, malgré ces rapprochements, ils n'associent pas explicitement la pente en un point de la courbe à la limite du rapport DV/Dt, lorsque Dt tend vers zéro, et ce, durant toute leur recherche qui dure 50 minutes. Bien sûr, on peut supposer qu'ils n'évoquent pas cette limite parce qu'ils ne savent ni comment l'exprimer, ni comment la calculer. Il n'empêche, cette omission est d'autant plus étonnante que, comme indiqué déjà, cette limite leur a été enseignée systématiquement — peu de temps auparavant — et qu'elle a été bien assimilée, aux dires de leur professeur.

5) D'autres élèves résolvent un problème de vitesse instantanée : il s'agit de déterminer les instants en lesquels deux voitures ont même vitesse instantanée. Ils exploitent correctement, dans l'ensemble, les graphes de position de ces voitures qui sont donnés : ils repèrent les abcisses en lesquelles les deux graphes (ou leurs tangentes) ont même pente. Mais plusieurs échouent déjà à interpréter les vitesses comme pentes de tangentes, oubliant celles-ci dès qu'il s'agit de calculer les premières. En outre, quelques-uns de ceux qui y réussissent ont été conditionnés à le faire au cours de physique. Mais le fait le plus significatif n'est-il pas que la double association : de la vitesse instantanée à la pente de la tangente et de la vitesse moyenne à la pente d'une sécante ne suggère aux élèves qui la font aucun calcul de limite permettant d'obtenir l'expression de la vitesse instantanée à partir de celle de la vitesse moyenne ? Quand d'autres élèves utilisent le mot limite, c'est pour évoquer deux points de la courbe qui se rapprochent l'un de l'autre jusqu'à se confondre, mais ils ne transposent pas effectivement cette idée de limite au calcul d'une pente. Evidemment, on peut invoquer la difficulté de manipuler des expressions littérales. Il n'empêche qu'une fois le calcul de limite mené à bien par le professeur, les élèves, dans l'ensemble, éprouvent de la peine à l'interpréter en termes de pente de sécante et de tangente.

6) Le calcul de la pente d'une tangente ne se transfère pas aisément d'un contexte à l'autre : d'un problème de vitesses à un problème de tangentes, de ce dernier à un problème d'extréma et vice-versa.

7) Plusieurs élèves interrogés après un enseignement sur les tangentes, à propos de l'interprétation géométrique du nombre dérivé, parlent exclusivement des droites sécantes qui se rapprochent de la droite tangente et ne mentionnent pas la suite de leurs pentes. Le glissement verbal : tangente au lieu de pente de tangente est fréquent.

2. Quelques éléments d'interprétation de cette difficulté.

Tout semble donc indiquer que la pente d'une tangente n'a a priori, dans le chef des élèves, que fort peu de choses à voir avec la limite d'une suite de quotients différentiels. Dans les sections suivantes, nous tentons d'interpréter ce fait.

2.1. *Dans la théorie, la tangente est reliée aux sécantes par le biais de leurs pentes respectives.*

La tangente est, dans une certaine présentation de l'analyse au cycle secondaire, un objet second par rapport à sa pente, puisqu'elle est définie par le biais de celle-ci. Le circuit effectué dans la théorie est schématisé par la Fig. 4 : le point de départ est la sécante, droite définie par deux points. Celle-ci détermine une pente exprimée par la "fonction-taux d'accroissement" et la limite de cette fonction est un nouveau nombre grâce auquel on définit le point d'arrivée, à savoir la tangente. Ce qui fait qu'on ne peut aller de cet objet géométrique qu'est la sécante à cet autre objet géométrique qu'est la tangente sans passer par un domaine autre que la géométrie et que nous qualifierons de "numérique symbolisé". "Numérique" car la tangente est définie par le biais d'un nombre : sa pente. "Symbolisé" parce que cette pente est la limite d'une "suite" de pentes de sécantes et que l'acte de passage à la limite ne peut être identifié et accompli que si l'on dispose de l'expression littérale de ces pentes.

On pressent déjà ici une première difficulté. Pourquoi *a priori* considérerait-on des sécantes si ce n'est que pour approximer la pente de la tangente : en effet, aucune d'elles n'est la tangente ! Mais, mathématiquement parlant, il ne sert à rien d'évaluer *des* pentes de sécantes, si l'on vise un résultat exact, puisque la limite d'une suite est toujours indépendante d'un nombre fini quelconque de ses termes. Il est typique d'ailleurs que, lorsqu'on veut *estimer* la limite d'une suite convergente, on va toujours chercher un (et un seul !) terme le plus loin possible dans la suite. Le détour par les sécantes ne peut donc être opérationnalisé que si l'on pense à utiliser l'expression littérale de leurs pentes, au lieu de se contenter d'approximations numériques. Ces considérations nous donnent le sentiment fort qu'il est extrêmement difficile pour arriver quelque part, de ne pas y aller directement, mais au contraire de viser d'abord à côté. Or, n'est-ce pas une extraordinaire *excursion mentale* que de se dire : je vais écrire l'expression littérale de ces pentes de façon à pouvoir revenir par après à la tangente, par un passage à la limite ? Notons aussi que seule cette dernière perspective peut justifier que l'on prenne les sécantes *d'un seul côté* (à condition qu'on soit assuré de l'existence de la tangente) : s'il s'agit d'estimer seulement la pente d'une tangente, on obtient d'emblée une bien meilleure approximation lorsqu'on travaille symétriquement, de part et d'autre du point de tangence.

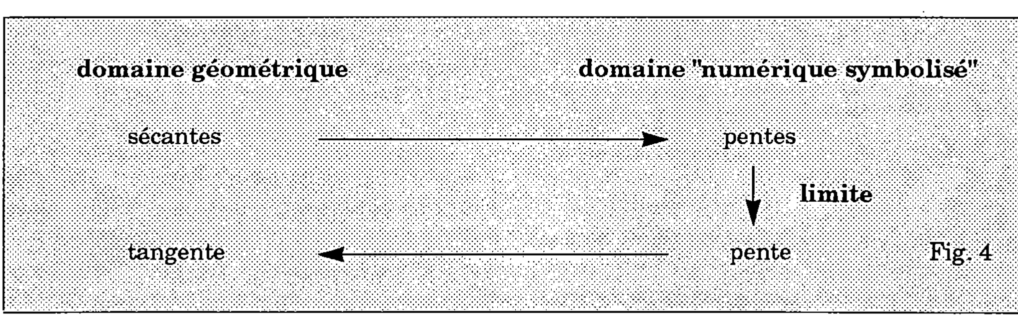


Fig. 4

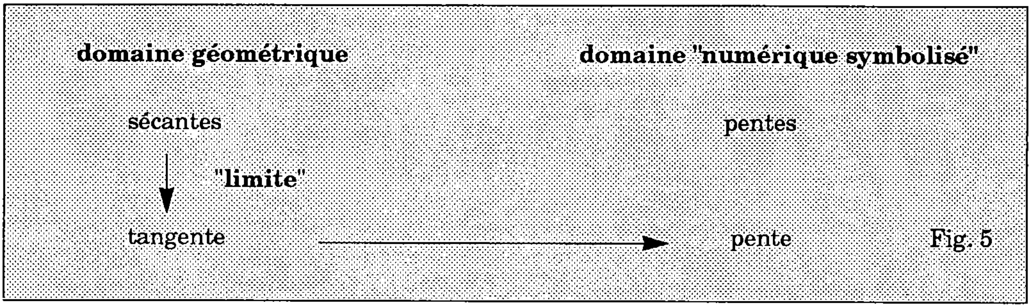


Fig. 5

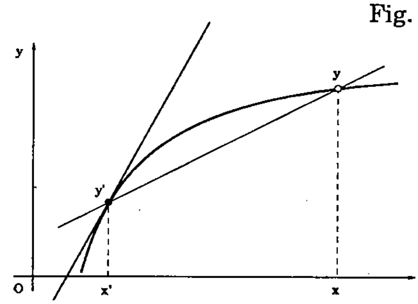
2.2. *Les élèves perçoivent le passage à la limite en termes géométriques.*

Ainsi que nous l'avons décrit plus haut, les élèves pensent plus volontiers à déterminer d'abord la tangente, ensuite sa pente, plutôt que le contraire. Cette prégnance de la tangente par rapport à sa pente peut s'expliquer par le fait que la pente est un rapport et donc n'est susceptible que d'une expression symbolisée, tandis que la tangente est un objet. La tentation est grande, dès lors, de concevoir la tangente comme un objet géométrique *défini* au moyen d'autres objets géométriques, à savoir les sécantes, pour ensuite seulement revenir à sa pente. Le circuit emprunté par les élèves aurait, dans ces conditions, plutôt la structure de la Fig. 5 que celle de la Fig. 4.

Le passage à la limite serait interprété, de ce fait, de manière presque exclusivement géométrique : le mot *limite* du langage savant étant compris comme "position limite" de droites, au sens d'une topologie — implicite et confuse bien entendu — sur l'ensemble des droites. Pour illustrer ce décalage, décrivons comment J. M. Nachtergaele et al. (1978) présentent la tangente :

« [...] *lorsque* x *tend vers* x' , *le point* y *de la courbe tend vers* y' , *ou* "a pour limite y' " [Fig. 6]. *Quand on passe à la limite, la droite* yy' *qui avait, avec la courbe, au moins deux points communs distincts :* y *et* y', *voit ces deux points se confondre en un seul. A ce moment, la droite* yy' *est devenue tangente : elle est devenue la limite, lorsque le point* y *tend vers* y' *sur la courbe, de la sécante* yy' .

Fig. 6



Définition : *La tangente au point* (x', f(x')) *du graphe d'une application* f *est la limite de la sécante comprenant ce point et un point* (x, f(x)) *du graphe, lorsque* x *tend vers* x' . »

Bien sûr, ces auteurs ne confondent pas la limite mathématique avec la "limite de droites" en un sens intuitif, mais néanmoins placent les guillemets à mauvais escient. Ceux-ci sont inutiles autour de l'expression *a pour limite y'*, puisqu'il est mathématiquement vrai qu'un point peut en avoir un autre pour limite, au sens de la distance usuelle dans $\mathbb{R}^2$, mais ils devraient entourer les deux derniers mots *limite* de la citation, aucune distance n'ayant été définie sur l'ensemble des droites. Cet abus — que nous ne critiquons pas dans la mesure où il témoigne du souci de rejoindre l'intuition des élèves et qui ne prête pas à conséquence si le professeur précise les choses — n'en serait pas un pour les élèves : ceux-ci confondraient le mot *limite* utilisé à propos des droites avec le concept de limite au sens mathématique du terme.

Ce glissement indu du domaine numérique à celui des grandeurs géométriques rejoint ce que A. Sierpinska (1985) appelle *la conception géométrique de la notion de limite*. Il s'inscrit également dans le contexte plus global d'un obstacle que nous avons décrit *in* Schneider (1988), sous le nom d'*obstacle de l'hétérogénéité des dimensions* et qui permet d'interpréter d'autres erreurs ou réactions des élèves dans les calculs d'aires et de volumes.

2.3. *Un "passage à la limite" plus actuel que potentiel.*

Ce "passage à la limite" sur les sécantes, décrit à la section précédente, relève plus de l'infini actuel que de l'infini potentiel (en un sens que nous précisons ci-après). A cet égard, la définition que propose G. Chilov pour la tangente représente un contraste intéressant. Nous la décrivons ci-dessous (encadré 2), aux seules fins de cerner, *a contrario*, la position des élèves.

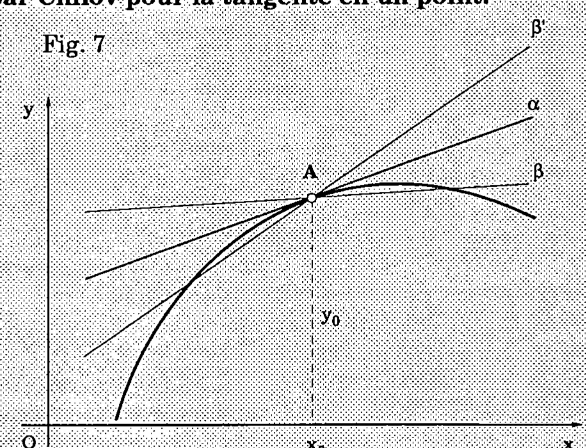
Cette définition ne fait pas sortir non plus du domaine des *objets* géométriques, en ce sens qu'elle ne suppose aucun détour par les pentes, mais, contrairement à la perception des élèves, elle évoque plus une *possibilité de dépassement* (c'est en ce sens que

Une définition proposée par Chilov pour la tangente en un point.

"La tangente en un point A *du graphique* y(x) *est définie en tant que droite* α *menée par le point* A *et telle que la courbe* y(x) *, en s'approchant du point* A *, pénètre dans tout angle de sommet* A *contenant la droite* α *et y reste, aussi petit que soit cet angle ".* [G. Chilov, 1974]

(NB : Il faut prendre "pénétrer" au sens large, au cas où la courbe serait une droite.)

Fig. 7



Encadré 2.

nous parlerons d'*infini potentiel*) qu'une *réalisation effective* (auquel cas, nous évoquerons l'*infini actuel*, quitte à élargir quelque peu son acception habituelle). Elle revient à dire qu'on *peut* trouver une sécante aussi "près" que l'on veut de la tangente. En effet, le fait que la courbe y(x) pénètre dans tout angle de sommet A signifie qu'on peut trouver une sécante β et une sécante β' qui forment cet angle autour de la droite α : en pénétrant dans l'angle, la courbe coupe effectivement chacune de ces droites en A et un autre point. Mais cette définition maintient comme une sorte de séparation entre la tangente d'une part et les sécantes d'autre part : une tangente n'est pas une sécante et vice-versa. Rien de tel chez les élèves ou chez les auteurs de manuels cités plus haut : *la sécante devient tangente* (qu'elle tourne autour d'un point fixe ou que ses deux points d'intersection avec la courbe se rapprochent l'un de l'autre). Le passage à la limite devient ainsi *actuel* au sens philosophique du terme, c'est-à-dire qu'il est accompli effectivement. Le mouvement (vu ou du moins imaginé) joue un rôle dans cet accomplissement : un point de la courbe que l'on voit se rapprocher d'un autre n'a aucune raison de ne pouvoir rejoindre cet autre effectivement ; de même une sécante qu'on voit tourner autour d'un point ne s'arrête pas avant d'occuper la position de la tangente.

2.4. *De la sécante à sa pente, par le biais d'un triangle. De la tangente à sa pente par le biais d'un point.*

Une fois la tangente perçue comme "limite géométrique" de sécantes, il faut pouvoir repasser à sa pente. Cela soulève d'énormes difficultés pour les élèves, étant donné la façon dont ils perçoivent cette "limite". Voici pourquoi.

La définition "géométrique" que donne G. Chilov de la tangente est en symbiose avec celle qu'on en propose en analyse, dans le sens où l'une comme l'autre relèvent de l'infini potentiel. [Rien d'étonnant à cela puisqu'il est mathématicien et qu'il tâche sans doute d'élaborer une définition proche de la théorie qu'il connaît ; en ce sens sa définition est peu "naturelle"].

C'est déjà montré pour la première. C'est évident pour la seconde, puisque la tangente y dépend, par le biais de sa pente, d'une définition de la limite en "ε, δ" : c'est une droite dont la pente *peut* être approchée d'aussi près que l'on veut par celle d'une sécante bien choisie. Cette symbiose aide à comprendre que la tangente ne peut avoir comme pente que la limite de celles des sécantes. D'une part, la tangente est une droite qui n'appartient pas à l'ensemble des sécantes, mais qui peut être "approchée" d'aussi près que l'on veut par celles-ci. Et c'est la seule droite qui jouisse de cette propriété, puisqu'en faisant tourner d'aussi peu que ce soit la droite qui était tangente, celle-ci peut déterminer avec une sécante un angle dans lequel la courbe ne pénètre pas autour de A . D'autre part, le nombre dérivé est un nombre qui n'est pas la pente d'une sécante, mais qui peut être approché d'aussi près que l'on veut par les pentes des sécantes. Et c'est le seul. C'est donc le seul candidat-pente de la tangente. Cette conséquence vient dès lors d'une mise en parallèle de deux "infinis potentiels".

Mais en "actualisant" le passage à la limite dans le domaine géométrique, en se précipitant à l'état final, les élèves s'enfoncent dans une impasse. En effet, le passage d'une sécante à sa pente s'effectue au moyen d'un autre objet géométrique qui sert de médiateur : un triangle [Fig. 8]. Or, pour la tangente, il n'existe plus d'objet géométrique intermédiaire, sinon un point en lequel le triangle s'est réduit ("visuellement"). [cf. Fig. 9 , encadré 3 ci-dessous]

On comprendra mieux la difficulté soulevée par ce fait si l'on imagine la situation que voici. Supposons que l'on dessine une tangente en un point d'une courbe et quelques sécantes dont elle est la "position

Encadré 3.

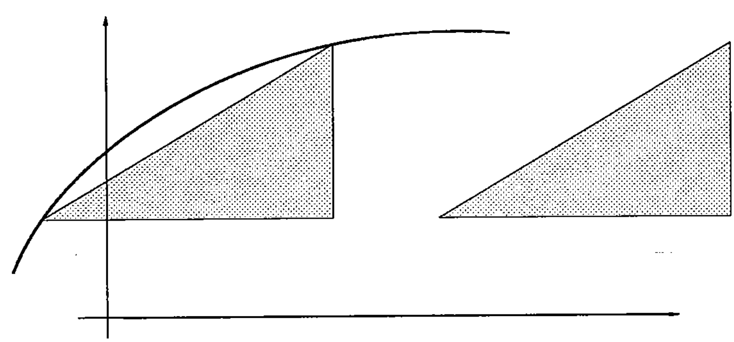


Fig. 8

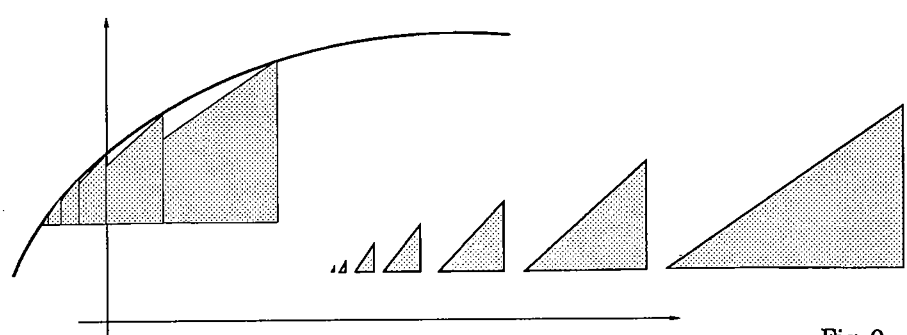


Fig. 9

En "actualisant" le passage à la limite dans le domaine géométrique, en se précipitant à l'état final, les élèves s'enfoncent dans une impasse : le passage d'une sécante à sa pente s'effectue au moyen du triangle de la figure 8. Mais pour la tangente, il n'existe plus d'objet géométrique car ce triangle se réduit à un point [Fig. 9].

limite" [Fig. 10] et qu'ensuite, on efface la courbe [Fig. 11].

Pour comparer les pentes de ces droites, il serait naturel de choisir un même incrément Δx pour toutes, auquel cas on compare les Δy correspondants [cf. le schéma de la Fig. 12]. Ou bien de choisir un même Δy et de comparer les Δx , comme sur le schéma de la Fig. 13.

Vue comme cela la pente de la tangente s'inscrit dans une sorte de continuité avec celles des sécantes : il y a bien un triangle pour la tangente comme pour les sécantes et, pour un même Δx , les Δy des sécantes successives augmentent (sur le cas de figure que nous examinons) jusqu'à valoir le Δy de la tangente. Mais les sécantes restant intimement liées à la courbe f , on est forcé de calculer leurs pentes successives au moyen du taux d'accroissement de la fonction considérée, soit :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

d'où, on ne peut passer d'une pente à l'autre qu'en diminuant conjointement et le Δx et le Δy . Tout d'abord, cela complique la comparaison des pentes qui sont des rapports. Ensuite, cela crée une discontinuité, une cassure entre les sécantes et la tangente : au lieu d'avoir une suite de triangles qui se termine par un vrai triangle comme aux Fig. 12 et 13, on a une suite de triangles qui se termine par un point comme sur la Fig. 9.

Or, — et c'est là le point-clé de notre argumentation — un point ne peut servir de médiateur entre une droite et sa pente, s'il a perdu la mémoire de la pente du triangle dont il est le vestige. Un détour assez

Fig. 10

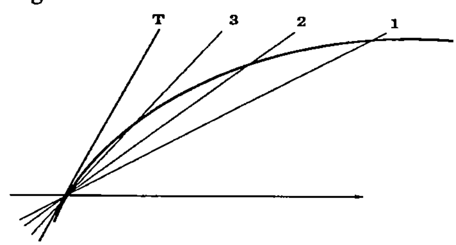


Fig. 11

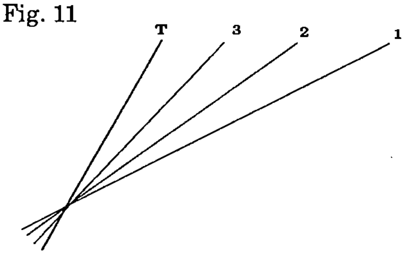


Fig. 12

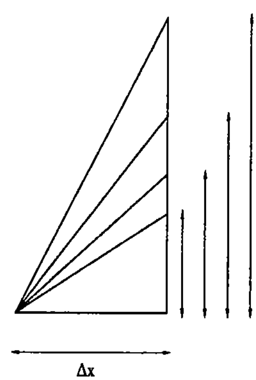
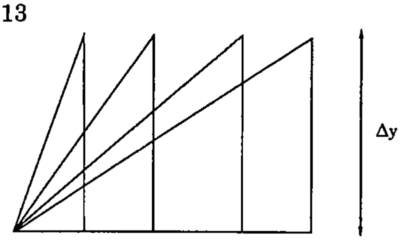


Fig. 13



long par les procédures mises respectivement en œuvre par Fermat et Barrow pour déterminer des tangentes aidera à comprendre cette difficulté. On trouvera ci-dessous, dans l'encadré 4, un résumé de la méthode exposée par Fermat (édité en 1891) ; et, dans l'encadré 5 de la page suivante, la méthode quelque peu différente donnée par Barrow, telle qu'elle est décrite par M. Kline (1972).

Comment Fermat détermine la tangente en un point d'une parabole.

Exploitant la similitude des triangles DFE et DBA :

$$\frac{BA}{FE} = \frac{DB}{DF},$$

la propriété spécifique de la parabole :

$$\frac{BC}{CF} = \frac{BA^2}{FI^2}$$

et assimilant FI à FE, il trouve :

$$\frac{BC}{CF} = \frac{DB^2}{DF^2}$$

ou en notant $BC = d$, $FB = e$ et $BD = a$:

$$\frac{d}{d-e} = \frac{a^2}{(a-e)^2}$$

Il égale le produit des moyens au produit des extrêmes :

$$da^2 - 2dae + de^2 = da^2 - a^2e,$$

simplifie les termes communs de part et d'autre du signe d'égalité :

$$-2dae + de^2 = -a^2e,$$

divise par e :

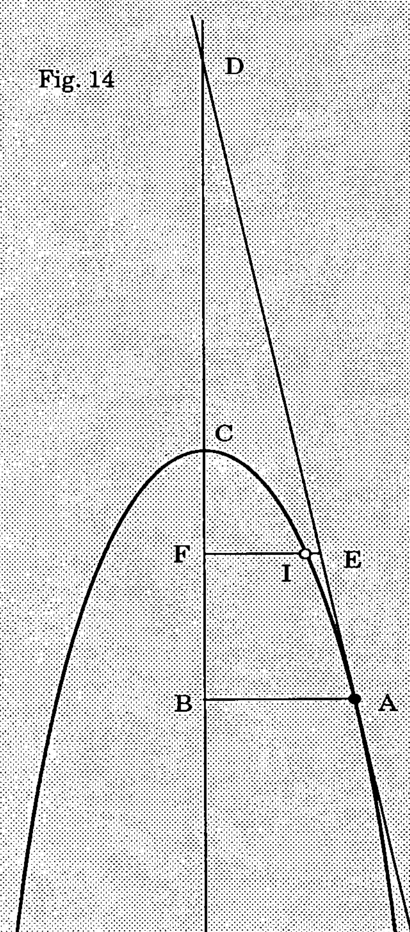
$$-2da + de = -a^2$$

et supprime le dernier terme qui contient encore e :

$$-2da = -a^2,$$

ce qui donne la valeur $a = 2d$ de la sous-tangente.

Fig. 14

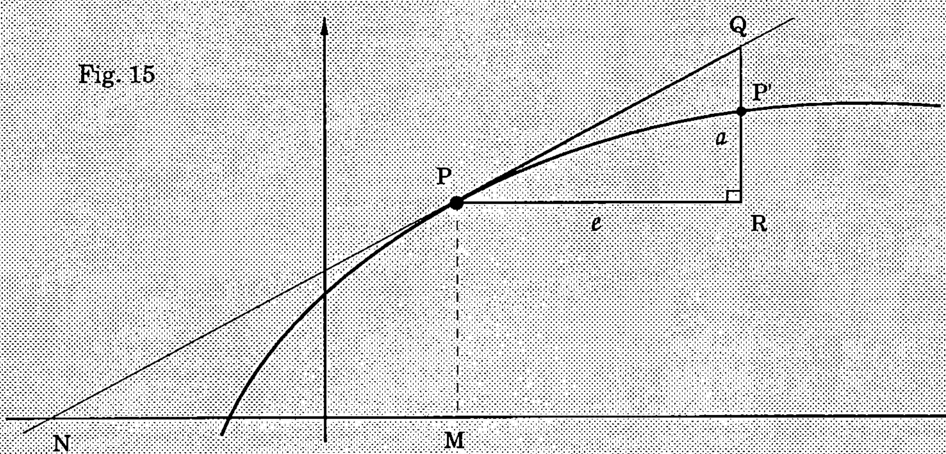


Encadré 4

D'un certain point de vue, ces deux procédures sont tout de même assez semblables : d'abord, Fermat et Barrow prennent, tous deux, deux points communs à la tangente et à la courbe [chez Fermat, les points A et I = E , le segment FI étant assimilé au segment FE ; chez Barrow, les points P et Q = P' , le triangle PQR étant assimilé au triangle PP'R] ; ensuite, ils font coïncider ces deux points, le premier

Comment Barrow détermine la tangente en un point d'une parabole.

Fig. 15



Barrow assimile, tout comme Fermat, un arc de courbe PP' au segment PQ de la tangente, ce qui lui permet de conclure à l'égalité des rapports

$$\frac{a}{e} = \frac{PM}{MN}, \qquad \text{où } e = PR \text{ et } a = P'R .$$

(il assimile le triangle PP'R au triangle PQR)

Ensuite, il utilise l'équation de la courbe $y^2 = px$ où il remplace x par $(x + e)$ et y par $(y + a)$, ce qui donne :

$$y^2 + 2ay + a^2 = px + pe .$$

Il soustrait $y^2 = px$ et obtient : $2ay + a^2 = pe$.

En négligeant a^2 , il trouve : $\frac{a}{e} = \frac{p}{2y}$, d'où $\frac{PM}{MN} = \frac{p}{2y}$,

ou encore $\frac{y}{MN} = \frac{p}{2y}$ et aboutit à :

$$MN = \frac{2y^2}{p} = 2x .$$

Encadré 5

en "annulant" e , le second en "annulant" a^2 . Mais une différence entre elles deux nous paraît fondamentale pour notre propos : c'est que Barrow ne néglige ni a ni e , mais qu'il "passe à la limite" au niveau du quotient a/e , un peu comme s'il voulait que le point P , vestige du triangle PP'R , conserve en lui, intacte, cette idée de pente dont le triangle est porteur, comme s'il partageait, avec Leibniz, le sentiment que : *"Quand la réalité sensible d'un objet s'évanouit, reste son essence et non le néant, la forme de l'objet survit à sa matière"* (cité dans un autre contexte par P. Raymond, 1976). Tandis que dans les calculs de Fermat, on ne retrouve trace d'aucune pente, comme s'il envisageait le point résiduel I (= E) comme le vestige, non d'un triangle mais du segment EA qui joint les deux points d'intersection de la droite (sécante) avec la courbe.

De ce point de vue, les élèves semblent plus proches de Fermat que de Barrow. N'est-ce pas le cas de l'élève qui détermine la tangente à $y = x^2$ au point (1,1) par "une procédure de limite" ? Pour se justifier, il n'évoque pas l'évolution des pentes de sécantes mais le fait "*qu'on a deux points en un*". N'est-ce pas encore plus évident chez un autre élève qui dit "*qu'un point est toujours parallèle à un point*" en concluant qu'on trouve toujours deux vitesses égales, lorsqu'on coupe, par une droite perpendiculaire à l'axe des temps, les courbes représentatives des lois de position de deux voitures ? N'est-ce pas aussi le cas de ceux qui doutent de la possibilité de déterminer une tangente unique en faisant tourner une sécante autour d'un point : en effet, si le point de tangence gardait la mémoire des pentes des sécantes, la direction de la tangente ne serait-elle pas univoquement déterminée ? Seul un élève semble associer au point de tangence le souvenir d'une pente : "[...] *N'importe quel point de la coube = une toute petite différence sur une petite différence*" (cet élève se réfère au point comme à un vestige du triangle de côtés Δx et Δy).

Tout ceci expliquerait pourquoi les élèves éprouvent quelque peine à penser la pente d'une tangente comme limite d'une suite de pentes de sécantes, une fois qu'il ont perçu la tangente comme "position limite" de sécantes. Le schéma de la Fig. 16 en résume la raison. Ils perçoivent bien la filiation entre les sécantes et la tangente (flèche 1), mais non pas celle entre les triangles et le point (flèche 2) (c'est-à-dire que ce dernier est plus perçu comme le vestige d'un segment que comme celui d'un triangle, seul susceptible d'être porteur de

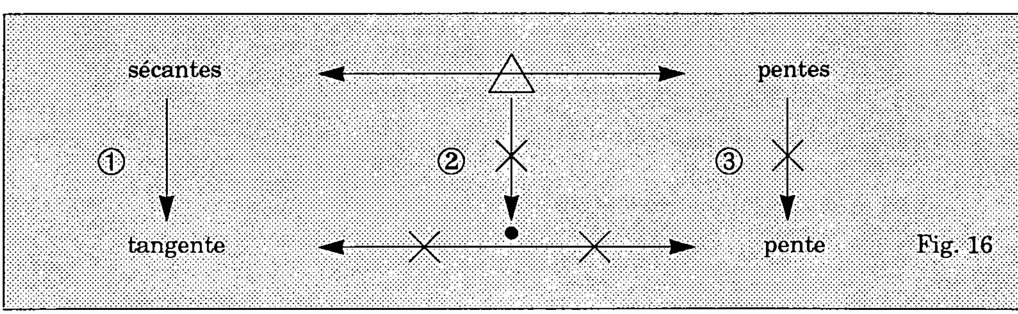


Fig. 16

l'idée de pente), ce qui fait que le rôle de médiateur que joue chaque triangle entre une sécante et sa pente ne se transfère pas au point. Cette cassure, de nature géométrique, serait cause d'une autre cassure, de nature numérique celle-là, entre les pentes des sécantes d'une part, et celle de la tangente d'autre part (flèche 3). Et c'est pourquoi les élèves n'établiraient pas de filiation, en ce qui concerne les pentes, entre l'état final (la tangente) et les états antécédents (les sécantes).

Quant au doute exprimé par certains élèves sur l'unicité de la tangente, il est vrai qu'on ressent une certaine incertitude quand on dessine une tangente en un point d'une courbe. C'est que tout trait de crayon, si fin soit-il, est doté d'une certaine épaisseur : ce qui peut donner l'impression qu'on peut incliner légèrement la règle autour d'un point sans qu'elle devienne sécante, le petit bout de sécante entre les deux points d'intersection avec la courbe formant un gros point noyé dans le trait qui représente cette dernière.

Mais les élèves qui disent qu'il y a plusieurs tangentes en un point ne veulent-ils pas tout simplement dire qu'on ne sait pas par quelle pente les déterminer, auquel cas on peut de nouveau incriminer leur difficulté à associer pente de tangente et limite de quotients différentiels ?

3. En guise de synthèse : la limite telle qu'elle apparaît dans les réactions des élèves

Dans Schneider (1988), nous avons montré en quoi la perception qu'ont les élèves du processus de limite diffère de la conception des mathématiciens, à l'occasion du calcul de l'aire d'une surface délimitée partiellement par une courbe. Les hypothèses formulées alors permettent également d'interpréter les difficultés des élèves dans leur apprentissage du concept de tangente.

En ce qui concerne la tangente, les élèves "voient" (en tout cas imaginent) une sécante tourner autour d'un point jusqu'à devenir tangente à la courbe. Durant ce mouvement, les incréments "dy" et "dx" qui déterminent la pente de la sécante évoluent vers 0 conjointement, mais de manière autonome, c'est-à-dire sans référence à la progression de leur rapport alors que, dans la théorie, c'est l'évolution du "rapport dy/dx " qui commande celle de ses termes. Les élèves, eux, n'évoqueront à nouveau ce rapport qu'une fois que "dx" et "dy" seront devenus nuls, irrémédiablement. C'est cette imagerie mentale animée d'un mouvement qui donne un sens, dans le chef des élèves, à l'expression

$$dx \longmapsto 0,$$

expression qui, prise isolément, n'a aucun sens en analyse classique.

Comme on l'a montré plus haut, ce "passage à la limite" sur les sécantes va jusqu'à son accomplissement et cette limite, étant atteinte, relève plus d'un infini actuel que d'un infini potentiel. Alors que dans la définition mathématique de la limite d'une fonction en " ε , δ ", les comportements respectifs de x et $f(x)$ sont envisagés d'un point de vue potentiel seulement. On y évoque deux possibilités de dépassement liées l'une à l'autre : $f(x)$ peut se rapprocher indéfiniment de b , pourvu que x puisse se rapprocher indéfiniment de a . Les réels ε et δ qui précisent respectivement la proximité entre f(x) et b et celle entre x et a sont strictement positifs : on n'a donc à considérer ni $\varepsilon = 0$, ni corrélativement $\delta = 0$. Il n'y a pas à se demander si f(x) finit ou non par égaler b ou si x finit ou non par égaler a .

Il y a *antériorité*, au sens du temps de déroulement de la pensée, de " dx $\longmapsto$ 0 " ou " dy $\longmapsto$ 0 " par rapport à

$$dy/dx \longmapsto 0$$

les élèves pensent à l'évolution de dx et de dy d'abord et ne reviennent à celle de dy/dx qu'ensuite, une fois que " dx = 0 " et " dy = 0 " sont effectivement réalisés. Et le retour à la variable dépendante de la fonction concernée débouche sur une impasse comme dans le cas de l'aire : la pente de la sécante devenue tangente s'écrit 0/0 .

Ce scénario n'est-il pas propre à expliquer l'origine d'un débat survenu dans l'histoire (cf. e.a. C. Boyer, 1949) et observé chez les élèves (cf. e.a. B. Cornu, 1983) et qui peut se résumer par la question : "*La limite est-elle atteinte ou pas ?*". Question vaine qui est source de perplexité : une pente de tangente peut-elle être égale à celle d'une sécante ?

Les éléments d'interprétation avancés dans cet article ne suffisent pas à expliquer les difficultés d'apprentissage décrites supra. Ainsi, la pente d'une tangente est, tout comme n'importe quelle autre pente de droite, un objet mental pour les élèves, eussent-ils ou non reçu un enseignement sur les dérivées. Et à ce titre, elle est porteuse d'intuitions qui peuvent paraître étrangères au calcul infinitésimal et que nous n'avons pas approfondies ici : références à la verticalité, à l'horizontalité, à la gravité, aux angles, aux axes ... Mais dans quelle mesure ces intuitions sont-elles étrangères au calcul infinitésimal ? Il faudrait distinguer ici, d'une part, le lien entre les notions en question et le calcul infinitésimal tel qu'il est défini aujourd'hui et, d'autre part, le lien entre ces mêmes notions et le calcul infinitésimal se construisant ; cela permettrait sans doute de mieux définir la place de ces notions dans l'enseignement du calcul infinitésimal.

4. En guise de conclusion : quelques considérations sur l'enseignement.

Comme cet article le montre, l'acquisition des liens divers entre tangente, pente de tangente, limite de quotients différentiels, n'est en rien spontanée. Les élèves rencontrent les mêmes difficultés conceptuelles que les inventeurs du calcul infinitésimal et les liaisons qui nous paraissent naturelles viennent de notre propre pratique. C'est pourquoi, l'enseignement doit permettre aux élèves d'acquérir cette pratique, sans présupposer de leur part aucune acquisition *a priori*. En effet, le développement du calcul infinitésimal s'est joué historiquement à travers un constant déplacement de l'intuition via la construction de nouvelles formes d'intuition, et l'on peut imaginer que l'enseignement du calcul infinitésimal se joue de façon analogue.

A cet égard, les exemples, à la fois proches et différents, de Fermat et de Barrow sont significatifs, car ils montrent non seulement la diversité des approches (et il n'y a aucune raison que l'on ne retrouve

pas une telle diversité chez les élèves), mais aussi la part nécessaire d'invention pour retrouver la tangente, que ce soit via l'adégalité (qui n'a rien de *naturel* et qu'un élève habitué à la rigueur d'aujourd'hui pourrait considérer comme *fausse*), que ce soit le passage à la limite après avoir assimilé, chez Fermat comme chez Barrow, un petit arc de courbe à un segment (ce qui n'a encore rien de *naturel*, c'est au contraire l'analyse qui nous apprend ce mode d'assimilation en montrant qu'on a le *droit* de le faire, moins un droit formel qu'un droit heuristique, ce qui est plus difficile).

Je remercie N. Rouche et R. Bkouche de m'avoir suggéré des corrections qui ont permis d'améliorer cet article.

BIBLIOGRAPHIE

Boyer C., *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover Publications, New York, 1949.

Chilov G., Analyse mathématique dans la classe des fonctions rationnelles, *Initiation aux mathématiques*, Editions MIR, Moscou, 1974.

Cornu B., *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*, thèse de doctorat de 3ème cycle, Université de Grenoble, 1983.

Œuvres de Fermat, publiées par Tannery P. et Henry C., tome premier, Gauthier-Villars, Paris, 1891.

Freudenthal H., *Didactical phenomenology of mathematical structures*, D. Reidel, Dordrecht, 1983.

Kline M., *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, 1972.

Nachtergaele J. M., Van Cutsem M., Louviaux A., *Mathématique Moderne, cinquième livre AB*, Editions Erasme,Anvers, 1978.

Raymond P., La philosophie dans tous ses états : De Platon à Hegel, dans *Philosophie et calcul de l'infini*, F. Maspero, Paris, 1976.

Schneider M., *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives*, thèse de doctorat, Louvain-la-Neuve, 1988.

Sierpinska A., *Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite*, Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol. 6.1. (1985), 5-67.

Université Catholique de Louvain,
Département de Mathématique,
2, Chemin du Cyclotron,
1348, Louvain-la-Neuve, Belgique.

adresse actuelle:

Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix,
Département de Mathématique,
8, Rempart de la Vierge,
5000, Namur, Belgique.