REPERES - IREM . n°5 - octobre 1991

L'INDISPENSABLE HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

Jean Pierre FRIEDELMEYER
Irem de Strasbourg

Dans l'éducation, la notion d'obstacle pédagogique est également méconnue. J'ai souvent été frappé du fait que les professeurs de sciences, plus encore que les autres, si c'est possible, ne comprennent pas que l'on ne comprenne pas. Peu nombreux sont ceux qui ont creusé la psychologie de l'erreur, de l'ignorance et de l'irréflexion (...) Les professeurs de sciences imaginent que l'esprit commence comme une leçon, qu'on peut toujours refaire une culture nonchalante en redoublant une classe, qu'on peut faire comprendre une démonstration en la répétant point par point. Ils n'ont pas réfléchi au fait que l'adolescent arrive dans la classe de physique avec des connaissances empiriques déjà constituées.

BACHELARD
La formation de l'esprit scientifique

S'agissant d'introduire une défense d'une formation en histoire des mathématiques pour des professeurs de mathématiques, l'usage du texte de Bachelard mis en exergue ci-dessus peut apparaître comme un détournement déloyal pour deux raisons :

1) Le texte parle de professeurs de sciences et de classe de Physique.

2) Bachelard a toujours mis à part l'histoire des mathématiques dans sa réflexion épistémologique, expliquant que cette séparation *"est possible parce que la croissance de l'esprit mathématique est bien différente de la croissance de l'esprit scientifique dans son effort pour comprendre les phénomènes physiques. En fait l'histoire des mathématiques est une merveille de régularité. Elle connaît des périodes d'arrêt. Elle ne connaît pas des périodes d'erreurs"*.

Il me semble pourtant qu'au moins en ce qui concerne la première raison, le texte de Bachelard s'applique parfaitement à l'enseignement des mathématiques. Le professeur de cette discipline n'a-t-il pas trop tendance à considérer l'élève comme un simple récipient vide et vierge, qu'il faut remplir avec de la bonne science bien faite ? Et l'élève de la classe de mathématiques est-il si différent de celui de la classe de physique ?

"Oui mais — répond en général le professeur de mathématiques — les mathématiques que l'on enseigne aujourd'hui n'ont plus qu'un rapport lointain avec celles d'autrefois. Elles ont réussi justement à lever les hésitations, à clarifier les ambiguïtés, à purifier la pensée trop intuitive des Anciens, et donc elles ont gagné en qualité pédagogique. D'une pensée préscientifique concrète, empirique, fondée sur la sensibilité, jouant de l'intuition et de l'imagination, les mathématiques ont permis de passer à une science abstraite, déductive, rigoureuse, où la précision du calcul remplace les errements de l'imagination". Cela est vrai, comme il est vrai qu'un des rôles essentiels de l'enseignement des mathématiques est d'amener l'élève à une pensée claire, précise et rigoureuse. Ce qui signifie bien qu'il arrive en classe *"avec des connaissances empiriques déjà constituées"*, avec un langage où les mots ont déjà un sens, qui n'est pas forcément ou exactement le même que celui utilisé en mathématiques, avec une pensée et une logique mêlées d'imagination, de sensibilité, en un mot avec tout autre chose qu'un pur esprit logique et obéissant, qu'il suffirait de modeler. On pourrait schématiser la situation de la façon indiquée ci-dessous, en dégageant des couples antagonistes.

PENSÉE COMMUNE **PENSÉE PRÉSCIENTIFIQUE**	**PENSÉE SCIENTIFIQUE** **MATHÉMATIQUES**
• empirique	• hypothético - déductive
• concrète	• abstraite
• décrit les choses sensibles	• travaille sur des concepts
• perception globale	• méthode analytique
• décrit des qualités	• mesure des quantités
• par l'intuition	• par le calcul, les algorithmes
• par l'imagination	• par le raisonnement logique, rigoureux
IRRATIONNEL ?	**RATIONNEL**

——— ENFANT - ELEVE ———→

Or ce chemin n'est-il pas aussi, d'une certaine façon, *celui-là même de la science*, où l'histoire relie civilisations du passé et science contemporaine ?

civilisation du passé

HISTOIRE ↓

Science contemporaine

Alors, où va se situer le professeur de mathématiques ?

Bien sûr, il est d'abord du côté de la pensée scientifique, du rationnel, de la raison. Mais son savoir, ses connaissances, ses certitudes auront vite fait de lui façonner comme une seconde nature où le trait en pointillé le séparant de la pensée incertaine de l'élève risque de se fermer totalement et où ses évidences *"feront écran entre l'élève et lui"* (selon la belle expression de C. Hauchart(1)). Et c'est alors qu'**il ne comprendra plus que l'élève ne comprenne pas.** Le professeur de mathématiques, s'il veut aller sur le terrain de l'élève devra se dépouiller de ses évidences acquises. *"Il devra retrouver une vision en quelque sorte primitive de chaque concept, de chaque problème, la vision de celui qui n'a encore rien théorisé"* (1). Mais comment réalisera-t-il ce dépouillement ? Comment déchirera-t-il cet écran ? Une possibilité irremplaçable en est offerte au professeur là où il peut voir fonctionner cette pensée empirique, là où il peut la voir à l'œuvre dans sa création lente de ce qui est devenu la science d'aujourd'hui. Le pont qui peut relier le savoir constitué du professeur au savoir en formation de l'élève, c'est aussi celui qui relie les civilisations du passé à la nôtre : l'histoire.

Non qu'il faille reproduire chez l'élève les modèles d'évolution fournis par l'histoire. Celle-ci est passée par des détours inutiles et des hésitations.

Les constructions mathématiques de chaque époque ont répondu aux problèmes d'alors, dans un contexte de civilisation donnée. L'enseignement mathématique d'aujourd'hui doit partir du quotidien des élèves d'aujourd'hui, tout différent de celui du scribe Ahmes ou de Descartes. Là où l'histoire avançait à tâtons, le professeur, lui, sait où il veut mener l'élève. Mais il saura aussi mieux d'où l'élève est parti s'il plonge son enseignement dans une connaissance de l'histoire. La connaissance du passé l'aidera peut-être à mieux comprendre certaines difficultés de l'élève, et à construire en raccourci un chemin où les obstacles sont affrontés en toute connaissance de cause.

En particulier, ce retour à l'histoire permettra au professeur de donner du sens aux mots et aux concepts, sens que les mathématiciens ont souvent dû épurer de leurs connotations trop concrètes, trop intuitives et de ce fait ambigües. Il peut être utile de retrouver le sens origninel d'un mot, beaucoup plus proche de la représentation de l'élève, et suivre son développement jusqu'à aujourd'hui. Les exemples ne manquent pas :

— mots qui sont aussi utilisés dans le langage courant mais avec un sens différent, ou plus large : *limite, irrationnel réel, imaginaire, chiffre, etc.*

(1) C. Hauchart : *Sur l'appropriation des concepts de suite et de limite.* Dissertation doctorale. Université catholique de Louvain.

PLAN DU CHAPITRE 6

Chapitre 6

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Dans le chapitre 5 on a vu que toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Mais ce n'est pas parce que l'on peut affirmer qu'une fonction admet des primitives que l'on sait pour autant les calculer...

Les formules données dans les tableaux ne permettent pas par exemple d'obtenir les primitives de fonctions simples comme la fonction définie sur $]0, +\infty[$ *par* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. *La fonction logarithme népérien est une primitive de cette fonction.*

Encadré 1 : une présentation du logarithme en terminale F

1 Définition de la fonction logarithme népérien

John Neper (ou Napier), baron de Merchiston (1550-1617) est le mathématicien écossais qui découvrit les logarithmes, inventa des règles à calcul et réalisa les premières tables de logarithmes.
La principale des fonctions logarithmes porte son nom.

La fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur cet intervalle, donc y admet des primitives

Définition :
On appelle fonction *logarithme népérien* la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui prend la valeur 0 pour $x = 1$.
Cette fonction est notée ℓn.

Les valeurs de $\ell n\, x$ ne sont accessibles que par la touche ℓn des calculatrices. Les calculatrices actuelles ne sont apparues qu'à partir de 1970. Avant on lisait dans des tables les valeurs de $\ell n\, x$. Sur les calculatrices on trouve une autre fonction logarithme accessible par la touche log. Cette fonction est étudiée à la fin du chapitre.

Conséquences de la définition :

- La fonction ℓn est définie sur $]0, +\infty[$.
(On peut observer ce qui « se passe » lorsque l'on cherche l'image par ℓn, sur une calculatrice, d'un nombre négatif...)
- La fonction ℓn est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc continue sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout x de $]0, +\infty[$, $\ell n'\, x = \frac{1}{x}$.
- $\ell n\, 1 = 0$.

Encadré 2 : une présentation du logarithme en terminale F (suite)

— mots spécifiquement mathématiques mais dont l'histoire permet de restituer un sens perdu : *algorithme, logarithme, algèbre, zéro, quadrature, etc.*

Chacun de ces mots pourrait faire l'objet, à lui seul de tout un chapitre, sinon pour certains un livre entier, de l'histoire des mathématiques. Nous illustrerons notre propos par un seul exemple, mais qui nous paraît tout à fait significatif : celui du mot LOGARITHME. (On verra dans les encadrés 1 et 2 des deux pages précédentes, avec quelle présentation, le mot et le concept LOGARITHME sont introduits aujourd'hui dans un cours de Terminale(2)).

Passons sur la méconnaissance, voire l'inculture historique de la présentation qui prêterait à rire si elle ne reflétait justement une attitude totalement antipédagogique et sur laquelle nous reviendrons. Une photographie de Descartes écrivant son *Discours de la méthode* à la lumière d'une lampe électrique ne serait pas plus scandaleuse. Cela serait amusant dans une présentation humoristique affichée et explicite, ce qui n'est visiblement pas le cas ici. J'en veux pour preuve que dans tout le livre c'est l'unique référence historique.

Quelles réflexions, quelles questions ces deux pages peuvent-elles susciter parmi les élèves ?

— les plus curieux : "pourquoi appelle-t-on cela LOGARITHME ?",

— les plus logiques : "Neper n'a rien de génial : on ne voit pas ce qu'il a inventé, puisque dans la page introductive il est marqué que *"Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I "*. Tout un chacun peut donc en conclure que :

$x \mapsto \frac{1}{x}$ a des primitives sur $]0, +\infty[$ ",

— les plus blasés (et comment ne le seraient-ils pas par ce type d'enseignement coupé de toute problématique réelle, de tout questionnement) : *"il faut être prof de maths pour inventer des trucs pareils"*.

Ces deux pages sont d'autant plus regrettables qu'elles s'insèrent dans un manuel qui a par ailleurs le souci d'ancrer le cours et surtout les exercices dans des situations concrètes à caractère technologique, et qui le fait très bien. Or il est significatif que pour le chapitre des LOGARITHMES, contrairement à tous les autres il n'y a que deux tels exercices où la fonction logarithme intervient, et seulement dans des formules empiriques. Il y en a d'autres c'est vrai, mais qui sont en réalité basés sur la fonction exponentielle, ce qui est tout à fait normal, lorsque l'on connaît la véritable histoire de l'invention des logarithmes. Ceux-ci sont intervenus d'abord pour rendre continue une progression géométrique que les calculateurs ne pouvaient appréhender que de façon dicrète. Par exemple dans le problème du tonneau(3), dont la résolution est amorcée dans l'encadré 3 de la page suivante :

Un tonneau se vide chaque jour du dixième de son contenu restant ; au bout de combien de temps le tonneau sera-t-il à moitié vide ?

Un calcul simple permet de conclure que le laps de temps nécessaire pour vider la moitié du tonneau est *compris entre six et sept* jours. La difficulté était évidemment de *penser une variable continue* afin de déterminer la valeur précise du temps écoulé.

Le génie de Neper se situe là : il utilisera la continuité du temps et de l'espace

(2) *Mathématiques Terminale F.* Collection N. DIMATHEME - DIDIER 1989

(3) Voir : Ch. Naux. *Histoire des Logarithmes.* Ed. Blanchard 1966

Le problème du tonneau

Un tonneau se vide chaque jour du dixième de son contenu restant ; au bout de combien de temps le tonneau sera-t-il à moitié vide ?

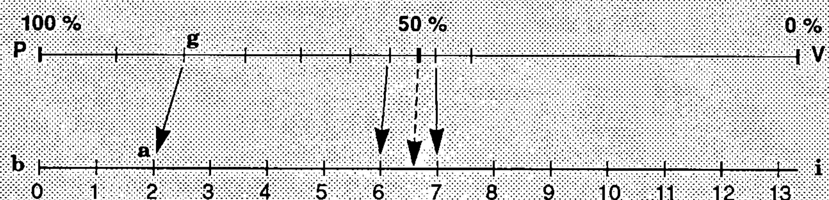
Un calcul simple donne les résultats suivants :

au bout du 1^{er} jour il reste :	0,9	de la capacité totale,
au bout du $2^{\text{ème}}$ jour il reste :	$(0,9)^2$	de la capacité totale,
--------------------		

--------------------		
au bout du $6^{\text{ème}}$ jour il reste :	$(0,9)^6 \cong 0,53$	de la capacité totale,
au bout du $7^{\text{ème}}$ jour il reste :	$(0,9)^7 \cong 0,48$	de la capacité totale.

La solution est donc : « entre le sixième et le septième jour ». Mais comment obtenir précisément (en heures minutes, secondes) l'*instant où il est exactement à moitié vide* ?

On peut schématiser ainsi l'écoulement du tonneau :



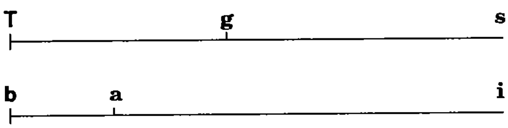
Sur la première ligne, un point **g** décrit (PV) selon une progression géométrique, de raison 0,9 ; ce point **g** est en relation avec un point **a** de la 2ème ligne (bi) qui la décrit selon la progression arithmétique de raison 1. Lorsque ce problème a été posé, à la fin du Moyen Age, les mathématiciens ne pouvaient l'appréhender que de façon discrète, tout en comprenant bien que la solution se trouvait quelque part entre 6 et 7...

Ils pouvaient même approcher la solution en insérant des "moyens arithmétiques ou géométriques". Par exemple : $\mathbf{g}(6,5) = \sqrt{\mathbf{g}(6)\,\mathbf{g}(7)} = 0,504$.

Mais comment penser *une variable variant de façon continue*, alors que la notion de fonction n'existe pas ?

Encadré 3.

pour penser une correspondance continue entre progression géométrique et arithmétique, et étendre ainsi à tous les nombres cette propriété connue depuis longtemps pour les entiers et les puissances d'un entier : que l'exposant du produit est égal à la somme des exposants ; autrement dit, transformant une progression géométrique en progression arithmétique, mais pensées de façon continue et non plus discrète. Et Neper utilisera exactement le schéma du problème du tonneau, avec deux mobiles **g** et **a** :



g se déplace sur Ts : vitesse proportionnelle à **gs** avec $v_0 = 10^7$
a se déplace sur bi , vitesse constante égale à v_0

En l'absence d'un formalisme et du concept de fonction Neper s'arrête sur les points :

$$x_1 = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right),$$
$$x_2 = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2,$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$x_n = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^n,$$

A chaque position x_i de **g** correspond une position de **a** : son *logarithme*. C'est la première table de logarithmes transformant une progression géométrique (LOGOS) en une progression arithmétique (ARITHMOS).

Mais comme il faudrait environ :

n = 6.9000.000 étapes

pour arriver à la moitié de Ts , Neper utilise en pratique d'autres progressions de la forme :

$$10^7\left(1-\frac{1}{10^5}\right)^2,$$

ou

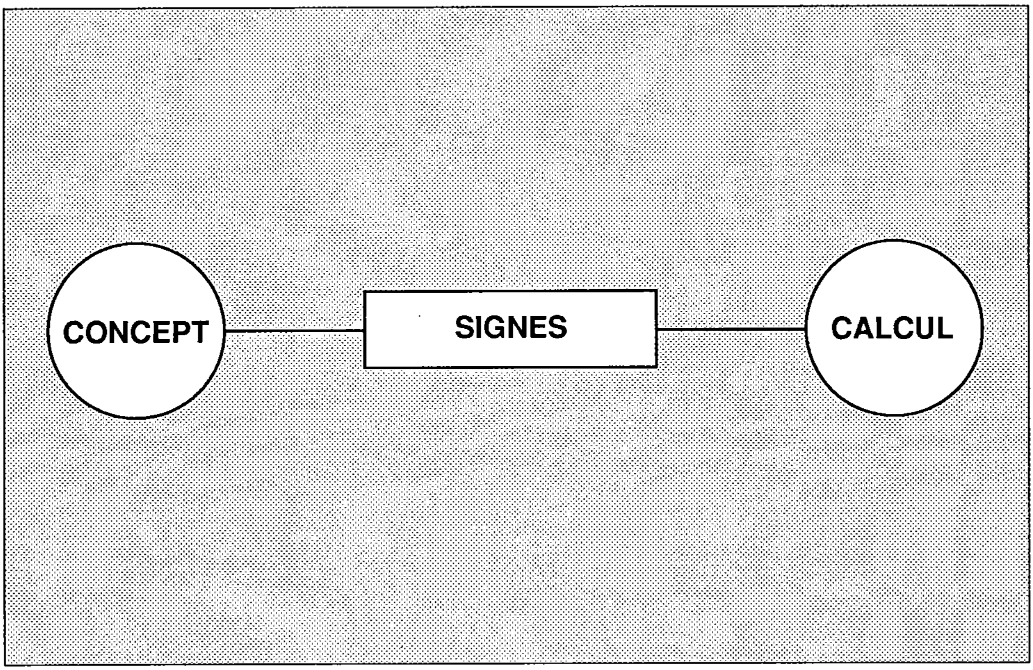
$$10^7\left(1-\frac{1}{2000}\right)^p\left(1-\frac{1}{100}\right)^q.$$

Est-il besoin d'ajouter que cette invention correspond à une nécessité urgente face aux calculs de plus en plus compliqués suscités par une science naissante et une astronomie en pleine mutation ?

Ce n'est pas le lieu ici de poursuivre l'histoire des logarithmes. La digression précédente était seulement nécessaire pour expliquer toute la distance existant entre la réalité historique et la présentation du manuel. Mais celle-ci est significative sur un autre plan : celui du contenu même de l'enseignement. Ce contenu semble se limiter de plus en plus à répondre à des questions que les élèves ne se sont pas posées, à calculer avec des objets dont ils ne voient pas l'utilité, chaque nouveau concept engendrant ses propres questions, suscitant ses propres développements : "*savoir dont la seule finalité est d'être enseigné et appris, l'apprentissage n'ayant d'autre but que l'apprentissage*"(5).

Les mathématiques enseignées se réduisent ainsi à un couple CONCEPT - CALCUL relié par des SIGNES, et l'apprentissage se limite à apprendre à calculer avec le nouveau concept, au moyen de signes.

(4) R. Bkouche : *Enseigner la géométrie, pourquoi ?* Repères-Irem n°1 octobre 1990



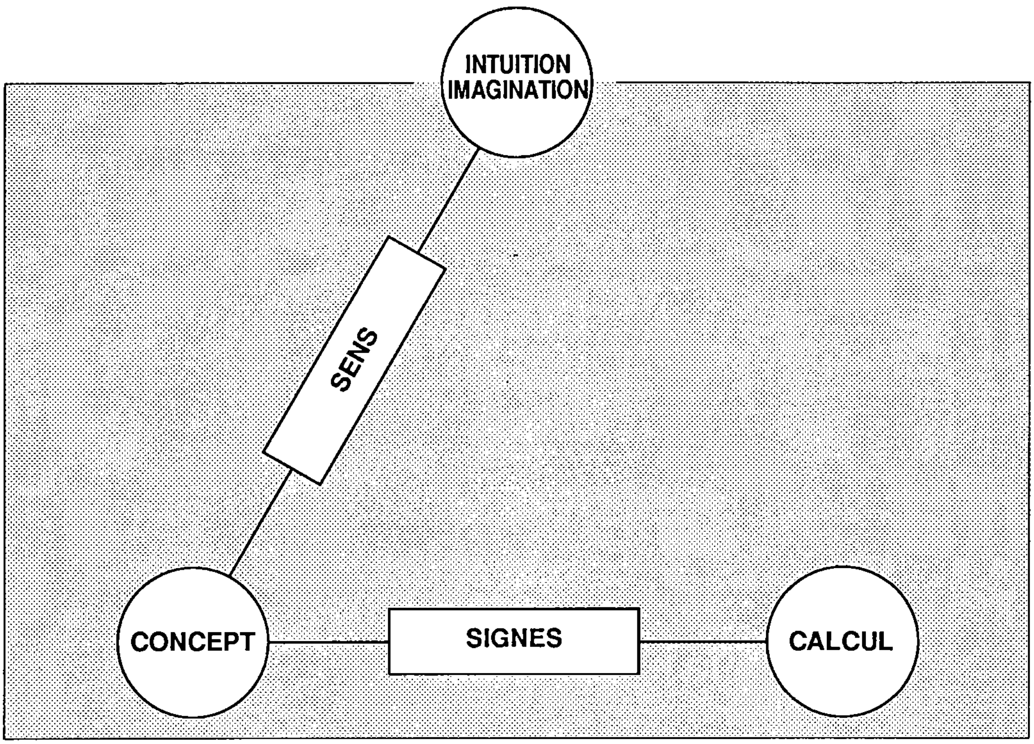
Par exemple, on apprendra les logarithmes, parce que le chapitre sur les primitives pose la question de la primitive de

$$x \longmapsto \frac{1}{x},$$

d'où la définition d'un nouvel objet : la fonction logarithme. Cette définition entraîne des propriétés spécifiques qui sont l'objet d'autant d'exercices. Ces propriétés suscitent elles-mêmes des questions engendrant la création de nouveaux objets, etc., etc. Faut-il s'étonner alors que nos élèves ne sachent pas sortir de cet aller-retour perpétuel entre concepts et calculs et qu'en particulier ils ne sachent pas rassembler leur savoir pour résoudre de véritables problèmes ?

Ce qui manque c'est un lien avec leur intuition et leur imagination au moyen d'un complément de sens([5]). Ce complément de sens peut se trouver en de multiples endroits : problèmes pratiques, jeux, ... ; mais aussi dans l'histoire. En même temps l'intrusion de l'intuition et de l'imagination aidera l'élève à garder le goût des mathématiques qui lui paraîtront moins inhumaines, moins froides, moins étrangères à sa sensibilité et à sa personnalité. Au lieu du schéma réducteur et appauvri CONCEPT - CALCUL à deux termes, ne faut-il pas penser l'enseignement des mathématiques selon un schéma triangulaire tel que celui de la page suivante ?

(5) Rappelons-nous la phrase de Kant dans la "*Critique de la Raison Pure*" : « Un concept sans intuition est vide ».



Seulement on voit tout de suite qu'il manque alors un lien entre cette intuition et le calcul. Pourquoi ne pas se limiter au couple CONCEPT - INTUITION ? La réponse se trouve aussi dans l'histoire. La géométrie grecque s'est essentiellement développée autour de ce couple, en l'absence de signes et de symboles permettant un calcul efficace. Elle a abouti a ces chefs-d'œuvre que sont les *Eléments* d'Euclide ou les œuvres d'Archimède qui peuvent encore largement inspirer l'apprentissage du raisonnement déductif et de la rigueur. Mais la géométrie grecque a ses limites mises en évidence entre autres par Viète et Descartes puis par tout le développement du calcul infinitésimal au 17$^{\text{ème}}$ et 18$^{\text{ème}}$ siècle, avec pour conséquence de provoquer une dialectique extrêmement productive entre intuition et calcul, dont le moteur est le PARADOXE.

Pour prendre un exemple très simple : demandez à un élève de première ou terminale :

Quelle est la limite de

$$\left(1+\frac{1}{10^n}\right)^{10^n}$$

pour n *tendant vers l'infini ?*

Il répondra à coup sûr 1 .

En cela il sera d'ailleurs conforté par n'importe quelle calculatrice qui, pour n assez grand (par exemple $n \geq 10$ pour une HP 15 C), lui affiche 1 .

Par ailleurs, un raisonnement par récurrence assez simple permet de démontrer que :

$$(1+\varepsilon)^N > 1 + N\varepsilon \text{, dès que } N \geq 2.$$

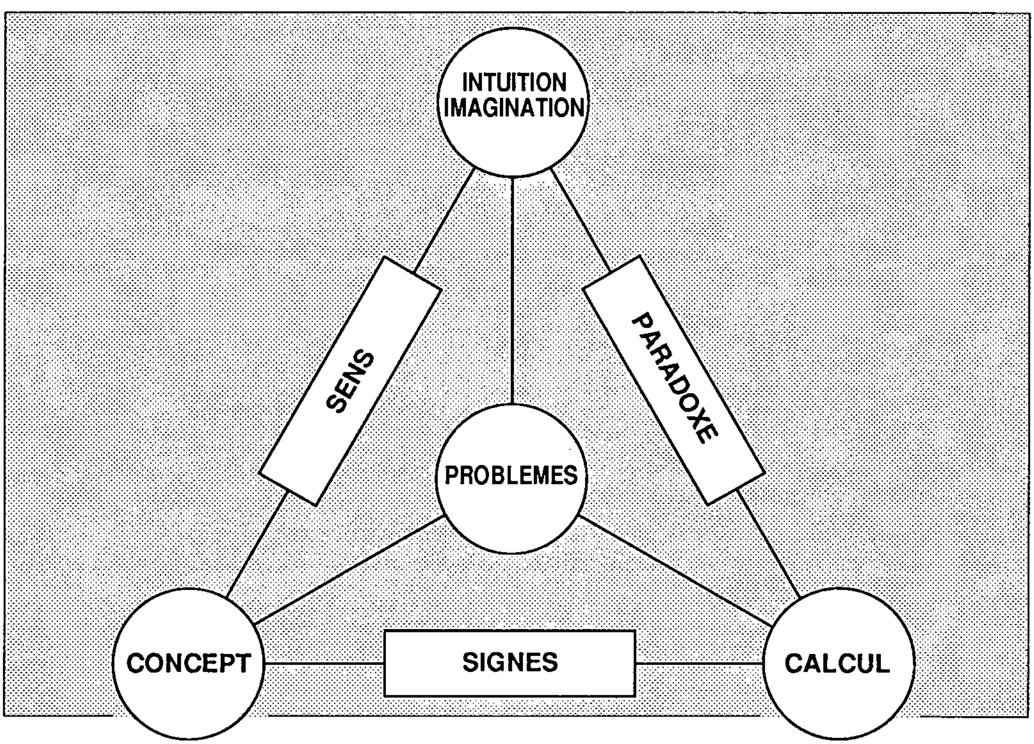
Donc en prenant $N = 10^n$ on arrive au résultat contradictoire avec la réponse de l'élève que :

$$\left(1+\frac{1}{10^n}\right)^{10^n}$$

est supérieur à 2 dès que $n \geq 1$.

Que se passe-t-il ? C'est que l'intuition est totalement incapable d'appréhender simultanément le fait que $1/10^n$ tend vers 0 mais que le nombre de termes multipliés est d'autant plus grand que $1/10^n$ est petit et que les deux phénomènes ont des effets contraires que l'intuition est incapable de saisir. D'où la nécessité du calcul, seul capable de pallier les insuffisances de notre intuition et de notre imagination.

Le paradoxe et plus généralement le problème jouent donc en fin de compte le rôle de moteurs mettant en mouvement l'ensemble des éléments constitutifs de l'activité mathématique, selon le schéma ci-dessous.



Négliger un seul des quatre pôles de ce schéma dans son enseignement conduit à plus ou moins brève échéance à une sclérose ou a un échec. Le danger actuel n'est évidemment pas de négliger le pôle CALCUL qui a, tout au contraire, tendance à s'hypertrophier au détriment des trois autres. Je souhaite avoir montré par la présente étude que le pôle INTUITION - IMAGINATION est le plus menacé, alors que c'est celui-là qui est le plus apte à associer chaque élève individuellement et avec toute sa personnalité à un enseignement des mathématiques qui réponde à **ses questions** avec **son langage** et son **appréhension du monde.** Aurai-je assez montré l'importance d'une connaissance de l'histoire des mathématiques pour nous aider à réaliser un tel enseignement ?

BIBLIOGRAPHIE

BACHELARD G. *La formation de l'esprit scientifique,* 13e édition, Vrin, 1986.

Essai sur la connaissance approchée, 6e édition, Vrin, 1987.

BKOUCHE R. *Enseigner la géométrie, pourquoi ?* in *Repères-IREM,* n° 1, octobre 1990.

BOREL E. *Les paradoxes de l'infini,* collection "L'avenir de la Science" - 25, 6e édition, Gallimard, 1946.

FRIEDELMEYER J.P. L'infini en mathématiques, *Actes de l'Université d'Eté de La Rochelle sur l'histoire des mathématiques,* IREM de Poitiers, 1988.

HAUCHART C. *Sur l'appropriation des concepts de suite et de limite de suite.* Dissertation doctorale, Louvain-la-Neuve, 1985.

KANT E. *Critique de la raison pure,* 4e édition revue et corrigée, PUF, 1965.

NAUX Ch. *Histoire des logarithmes,* 2 tomes, Blanchard, 1966.

RICŒUR P. Signe et sens, *Encyclopedia Universalis,* éd. 1981, tome 14, p. 1011 à 1014.

SERFATI M. La question de la chose (Mathématiques et Ecriture), *Actes du colloque inter-IREM. Histoire et épistémologie des mathématiques,* IREM de Strasbourg, 1987.

Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, Bulletin inter-IREM d'épistémologie, IREM de Lyon, 1988.

Histoire des mathématiques pour nos classes, Brochure de l'IREM de Strasbourg, 1991.