REPERES - IREM . n°5 - octobre 1991

CONNAISSANCES OU CAPACITES ?

Robert NOIRFALISE
Irem de Clermont-Ferrand

Résumé : *S'opposant à des approches postulant l'existence de capacités générales indépendantes des contenus, nous développons dans cet article des arguments en faveur d'un modèle du fonctionnement cognitif en termes de connaissances, métaconnaissances et traitement de l'expérience.*

INTRODUCTION

P.E.I (Programme d'enrichissement instrumental), A.R.L (Atelier de raisonnement logique), ou encore Profils pédagogiques d'A. de la Garanderie connaissent aujourd'hui sur le "marché" de la formation continue des enseignants un succès certain. On ne saurait trop s'en étonner dans la mesure où ces approches sont présentées comme pouvant fournir les outils nécessaires à une lutte efficace contre l'échec scolaire : Le P.E.I. développerait ainsi chez l'apprenant les fonctions cognitives de base pour apprendre, les A.R.L. les capacités de raisonnement formel et A. de la Garanderie propose une méthode d'activation de gestes mentaux servant à apprendre.

La séduction opérée par ces modèles auprès des enseignants, leur éventuelle sophistication théorique ne les rend pas pour autant valides. Un travail réalisé par A. Noirfalise[1] à l'Irem de Clermont-Ferrand montre par exemple que si le P.E.I. permet un accroissement significatif des performances à des tests d'intelligence, il ne s'accompagnent pas pour autant de gains sur le plan de la réussite dans les disciplines scolaires.

(1) A. Noirfalise : *Compte rendu d'une expérience d'utilisation du PEI en 6ème / 5ème.* Irem de Clermont-Ferrand (1988).

Ces approches indépendantes des contenus sont souvent présentées comme devant rendre les enfants aptes à apprendre : elles postulent, bien qu'en termes différents, l'existence de capacités mentales indépendantes des contenus, rejoignant ainsi une idée largement répandue : En effet, lorsque dans le langage courant, on évoque l' idée "d'esprit d'analyse, de synthèse", "l'esprit logique" ou "critique", "la rigueur", il semble bien que l'on fasse référence à de telles capacités et certains contenus comme les mathématiques, l'informatique permettraient de les développer plus que d'autres !

Nous opposant à ce type d'approche, nous voudrions, ici, proposer les éléments d'un modèle qui infirme plutôt le rôle différentiateur de grandes capacités transversales indépendantes des contenus[2] et qui, en revanche, fait jouer un rôle central à des connaissances acquises par le sujet avec des thèses comme les suivantes :

"*L'univers du savoir d'un individu est constellé (ou peuplé) de beaucoup plus de savoirs que ne le laisse supposer le discours officiel ou public sur le savoir*" et "*Ce sont ces savoirs qui déterminent la conduite cognitive d'un élève et qui expliquent les variations inter-individuelles*".

Des corollaires en seraient :

"*Pour être un bon élève en mathématiques, et réussir les tâches demandées par l'institution scolaire, il faut beaucoup plus de connaissances que le seul savoir public ou académique*". Et "*Ce sont des connaissances qui distinguent le bon élève en maths de celui qui ne réussit pas*".

Ceci s'oppose à une idée assez communément partagée, comme quoi les mathématiques sont une discipline où il n'y a pas besoin de savoir beaucoup de choses, mais que c'est plus une affaire, comme l'on dit, de tournure d'esprit, d'intuition (avoir ou ne pas avoir la bosse des maths).

Les thèses énoncées ci-dessus impliquent :

1) *De s'interroger sur la nature des connaissances constellant l'univers du savoir d'un individu.*

— Il ne s'agit pas de réhabiliter un système encyclopédiste de formation, déjà condamné maintes fois, contenant beaucoup trop de connaissances que l'on peut qualifier de mortes, ne servant pas à grand chose si ce n'est à être énoncées le jour de l'examen. Il s'agit bien de présenter un univers peuplé de *connaissances vives*, ayant un sens pour celui qui les utilise, qui lui permettent d'agir et de comprendre.

— Beaucoup de connaissances stipulées dans le modèle proposé *n'appartiennent pas au champ de la conscience* ; nous y retrouverons ainsi des connaissances en acte (au sens donné à ce terme par G. Vergnaud[3]) ou des connaissances incluses dans la représentation implicite que se fait le sujet du contrat didactique (cf. Brousseau[4]). Il s'agit donc surtout de *connaissances inconscientes*, ne faisant pas partie du discours officiel sur le savoir, *mais réglant cependant la conduite cognitive d'un élève*. Nous examinerons cela dans une première partie où nous emprunterons tout d'abord quelques résultats à l'intelligence artificielle, puis des éléments d'étude sur les processus d'initialisation de résolution de problèmes qui nous conduiront à distinguer divers types de savoirs. Dans une seconde partie, nous reprendrons un exemple dû à Y. Chevallard montrant le rôle que peuvent jouer des connaissances "non-essentielles" dans la conduite d'un sujet ayant à réaliser une activité mathématique.

(2) Il existe certainement des capacités propres à l'espèce humaine comme la mémoire de travail, qui sont effectivement indépendantes des contenus. Mais on peut supposer, dans le modèle que nous proposons, que tout un chacun "physiologiquement normal" en dispose.

(3) G. Vergnaud : *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Peter Lang (1981).

(4) G. Brousseau : Fondements et méthodes de la didactique in *RDM* 1986, n°7.2.

Il convient aussi :

2) *De se demander comment un sujet peut apprendre beaucoup de connaissances et pourquoi ce qui est possible à certains, semble inaccessible à d'autres.*

Nous le verrons, dans une troisième partie, cela renvoie à la façon dont *un sujet, en temps réel, traite son expérience*. Des connaissances, concernant le rapport du sujet au savoir, peuvent intervenir pour déclencher des traitements divers de l'expérience, qui à leur tour engendrent des apprentissages de nouvelles connaissances pertinentes, ou au contraire, empêchent de tels apprentissages. Nous avons là un point fort du modèle proposé : *ce sont des connaissances, et non plus des capacités transversales, qui pilotent l'acquisition ou non de nouvelles connaissances...*

C'est un modèle inspiré par les travaux en didactique, en psychologie cognitive, que nous proposons pour débattre des moyens à employer dans la lutte contre l'échec scolaire, avec certains arguments inspirés de résultats existant, d'autres sont des hypothèses qu'il convriendrait de vérifier.

I — ELEMENTS SUR LA RESOLUTION DE PROBLEMES plaidant en faveur du rôle de connaissances contre le rôle de grandes capacités transversales :

1) *L'échec de l'explication de la réussite par des démarches heuristiques générales : le cas du jeu d'échecs*[5].

Dans leur ouvrage "Human problem solving", Newell et Simon consacrent plus de deux cents pages au jeu d'échecs. Au début de leurs travaux sur la modélisation des activités de résolution de problèmes, ces auteurs pensaient pouvoir trouver une méthode générale (une heuristique) de résolution de problème (the "general problem solver"), simulant le comportement humain et "implantable sur ordinateur". Le jeu d'échecs était alors une situation intéressante pour concrétiser les recherches sur ce programme, car chaque coup devant être joué, est à lui seul un problème. On peut implanter sur ordinateur les règles de base du jeu d'échecs, peu nombreuses. Une première solution, partant de là, était de faire que l'ordinateur, grâce à sa puissance et à sa rapidité de calculs, puisse examiner l'ensemble des coups permis à partir d'une situation donnée. C'est théoriquement possible, et l'ordinateur possède alors un algorithme gagnant, mais même pour un ordinateur puissant, il faudrait pour déterminer le coup optimal ou gagnant, *plusieurs siècles de calculs*. Dès lors, il devenait intéressant d'essayer de trouver des heuristiques permettant de réduire le nombre de cas possibles à envisager pour déterminer le coup à jouer. Les essais en terme d'heuristique générale (indépendante du contenu spécifique) ont quelque peu permis de réduire le nombre de coups, mais sans que cela permette d'atteindre des délais d'exécution à dimension humaine, le temps d'exécution restant fabuleusement long.

Aujourd'hui, pour régler ce PROBLEME CRUCIAL DU TEMPS D'EXECUTION, les modèles de l'I.A. stipulent la nécessité de disposer de beaucoup de connaissances pour déterminer rapidement le bon choix du traitement à exécuter (cf. Pitrat[6]).

"POUR CHOISIR LE COUP A JOUER, IL FAUT BEAUCOUP DE CONNAISSANCES"

(5) Pour un développement de ces résultats, cf. : Lemoigne : *Intelligence des mécanismes de l'intelligence*. Ed. Fayard (1986).

(6) Pitrat : "Connaissances et métaconnaissances" in Lemoigne (*op. cité*).

Il convient, d'après des auteurs comme Pitrat([6]), d'imaginer des connaissances mobilisées par l'expert, souvent de façon inconsciente, du type suivant :

— *Si telle pièce ennemie est sans protection, alors... avoir un mode d'emploi pour profiter de cette faiblesse,*

ou de façon beaucoup plus précise :

— *Si le fou peut aller en* h2 *en faisant échec au roi en* g1,

si, en se déplaçant, le fou ouvre une ligne qui crée une attaque supplémentaire sur la pièce ennemie,

s'il existe une case où la dame peut aller d'où elle attaque simultanément h2 *et la pièce P.*

Alors sacrifier le fou en allant en h2.

On le voit, on a là une connaissance d'expert, permettant d'agir et on peut concevoir qu'un expert ait en mémoire (inconsciemment souvent) un grand nombre de connaissances de ce type.

On peut, cependant, se demander très justement, si la difficulté rencontrée en I.A., relativement à la gestion du temps, et les réponses apportées ne sont pas spécifiques à la technologie informatique, et s'il en est bien de même pour le comportement humain.

On peut alors citer, ici, une expérience cruciale réalisée par le psychologue hollandais De Groot dès 1965 (citée par Pitrat) :

Le principe de cette expérience consiste à présenter, à de grands joueurs chevronnés et à des débutants au jeu d'échecs, des pièces sur un damier. Dans certains cas, la disposition des pièces correspond à une organisation que l'on peut trouver effectivement dans une partie d'échecs, dans d'autres cas, celle-ci est au contraire inhabituelle. On demande aux sujets de mémoriser la disposition des pièces et ensuite de rappeler celle-ci.

Voici les résultats obtenus par De Groot :

— Cas où la disposition des pièces est classique :

les grands joueurs retiennent la disposition de la quasi totalité des pièces, alors que les débutants en retiennent 5, 6 ou 7, conformément aux résultats sur la mémoire de travail.

— Cas où la disposition est inhabituelle :

les grands joueurs obtiennent alors les mêmes résultats que les débutants !

Ainsi, contrairement à ce qu'on pouvait peut-être penser, *les grands joueurs n'ont pas une capacité générale de mémorisation ou d'organisation de données plus grande que les débutants* car, alors, elle s'exercerait aussi dans le cas de dispositions inhabituelles. Non, les résultats de cette expérience montrent plutôt que le meilleur résultat obtenu par les grands joueurs, dans le cas d'une disposition du damier classique, est certainement lié à des connaissances acquises sur le jeu et sur les dispositions classiques. C'est ce type de résultat qui conduit à abandonner l'idée de grandes capacités transversales indépendantes des contenus (même si, pour ceux qui les évoquent, leur mobilisation ne peut se faire concrètement que sur des contenus).

Nous allons le voir, on arrive à des résultats analogues si l'on examine précisément les mécanismes cognitifs mis en jeu dans une activité de résolution de problème mathématique. Nous traiterons d'un cas spécifique, autour du théorème de Pythagore, mais cela pourrait se développer à partir de n'importe quel autre théorème, dès lors que l'on s'interroge sur ses utilisations possibles dans un problème. Nous nous limiterons à un type de tâche largement répandue en milieu scolaire : l'utilisation de théorèmes dans une activité de résolution de problèmes standards.

2) *Les connaissances nécessaires pour mobiliser un théorème : l'exemple de Pythagore.*

On va trouver dans le discours enseigné, celui que l'on peut qualifier d'officiel, celui qui est écrit dans les manuels par exemple, des déclarations, le théorème de Pythagore en est une, des certitudes, des démonstrations, des exemples, des illustrations, parfois la description précise d'algorithme conduisant à un résultat certain. C'est le côté de la rationalité positive, le discours public, celui qui, officiellement, doit se tenir et se retenir concernant le théorème de Pythagore.

Mais, dans les activités de résolution de problèmes proposées à un élève, qu'est-ce qui fait qu'il peut penser à Pythagore ?

Voici deux exercices classiques liés à Pythagore.

1) EFG est un triangle rectangle en E .
EF = 6 cm et EG = 8 cm . Calculer FG !

Dans cet exercice, il y a un appel assez direct au théorème de Pythagore car, expressément, il est fait référence à un triangle rectangle.

2) Calculer la longueur de la diagonale d'un carré de côté a.

Ici, le texte de l'énoncé ne contient pas explicitement de triangle rectangle permettant d'emblée de penser à Pythagore (l'éventuel tracé d'une figure ne saurait justifier la mobilisation du théorème adéquat. La perception d'un triangle rectangle ne va de soi que pour celui qui connait la solution).

Pour un élève, le lien avec Pythagore va d'abord s'instituer par le biais d'indices appartenant à la mise en scène didactique (situation didactique selon G. Brousseau). En effet, ces exercices sont souvent proposés par l'enseignant, ou dans les manuels, comme application du théorème de Pythagore : un élève sait, *c'est une connaissance du fonctionnement didactique de la classe,* qu'après un cours, il est d'usage d'utiliser ce qui vient d'être vu dans les exercices consécutifs à ce cours. Cependant, il convient de se demander quels sont les éléments appartenant spécifiquement à la logique du savoir (et non à une logique de situation) qui devraient être retenus par l'élève. Pour cela, on peut imaginer les mêmes exercices posés dans un contrôle trimestriel ou au BEPC, loin donc, dans le temps, du cours sur Pythagore.

Nous pensons alors, qu'il convient que l'élève mobilise des connaissances du type :

"Si j'ai la longueur d'un segment à calculer (but à atteindre),

Si de plus, ce segment est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont on connaît les mesures des côtés de l'angle droit, ALORS on peut utiliser Pythagore".

Nous appellerons, empruntant le terme à la psychologie cognitive, ce type de savoir, un *savoir procédural*, ou encore une *règle de production*.

Remarquons que l'expression "appliquer Pythagore" est impropre, bien que classiquement utilisée : elle désigne, ici, l'usage d'un algorithme du type suivant :

Elever AB au carré, puis AC au carré,

Faire la somme, en extraire la racine carrée,

Afficher la valeur de BC comme étant la longueur cherchée.

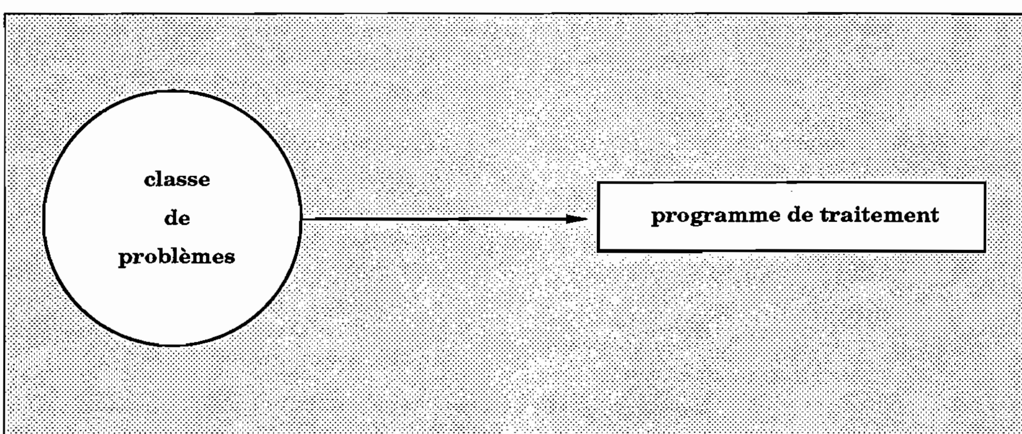
Pour que le propos puisse se généraliser à d'autres tâches scolaires, nous emprunterons à P. Meirieu(7) le terme de "PROGRAMME DE TRAITEMENT". L'algorithme décrit ci-dessus est un exemple d'un tel programme. Un savoir procédural apparaît alors comme assurant une mise en correspondance entre une classe de problèmes et un, ou, des programmes de traitement.

Les savoirs procéduraux ne sont pas donnés d'emblée, car il convient de spécifier, progressivement, la classe de problèmes correspondant à un programme de traitement.

Il peut y avoir, *surspécification* : la classe est trop restreinte ; l'élève ne pense pas, face à certains problèmes, au programme de traitement adéquat. C'est ainsi qu'un élève ne pensant pas à Pythagore pour calculer la diagonale d'un carré, serait dans ce cas : on peut, en effet, imaginer que cet élève ne pense au programme de traitement lié à Pythagore, que s'il y a une référence explicite à un triangle rectangle dans l'énoncé du texte.

A l'inverse, il peut aussi y avoir *surgénéralisation* : la classe est trop grande. L'élève mobilise, de façon non pertinente, le programme de traitement. Ce serait le cas d'un élève qui penserait à Pythagore pour calculer la surface d'un triangle rectangle connaissant deux des côtés de l'angle droit.

On peut ainsi percevoir que l'apprentissage d'un savoir procédural ne va pas de soi, car on ne peut définir, de façon stricte, la classe de situation le caractérisant.



(7) P. Meirieu : Guide pour la pratique du conseil méthodologique (Annexe à la 2e édition : *Enseigner, scénario pour un métier nouveau.* ESF 1989)

Avec le repérage de ce type de connaissances, on peut, dès lors, comprendre que l'aptitude à résoudre un problème spécifique en mathématiques va être largement conditionnée par un jeu d'activation et d'inhibition de savoirs procéduraux, donc par des connaissances spécifiques. Là aussi, donc, peu de place pour une capacité générale à résoudre des problèmes, mais une focalisation, au contraire, sur des connaissances.

Connaissances permettant de retrouver des programmes de traitement :

Lorsqu'un élève arrive en 4ème et étudie Pythagore, il a déjà eu l'occasion de pratiquer des formules du type :

$$y^m = ax_1^p + bx_2^q + \ldots$$

avec des exposants m, p, q ... égaux à 0,1 ou 2 et sait alors, connaissant toutes les valeurs des variables sauf une, calculer la dernière.

Il a acquis une connaissance schématique du type :

"Si plusieurs grandeurs variables sont liées par une expression algébrique d'un type standard, si on connaît toutes les grandeurs sauf une, alors on peut en déduire un programme de traitement pour calculer la dernière".

On a, à nouveau, une connaissance de type procédural permettant d'engendrer des programmes de traitement spécifiques. Ainsi, dans le cas de Pythagore, les programmes de traitement en découlant ne sont pas nécessairement objet d'apprentissage. Une connaissance, comme celle que nous venons de décrire, s'appliquant à la dernière partie du théorème :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

peut être déjà là, permettant de les engendrer quand besoin est. Cette remarque permet alors de justifier l'expression classique : "Pour résoudre tel problème, alors utiliser Pythagore". Mais on le voit, cette simple formule qui met en avant, comme connaissance, le théorème de Pythagore, en cache d'autres : des connaissances procédurales permettant de savoir dans quel cas utiliser Pythagore, et une connaissance de type algébrique permettant de construire un programme de traitement numérique.

Il y a sûrement là une piste, celle du repérage de connaissances permettant de faire l'économie de la mémorisation d'autres connaissances, qui mériterait d'être développée dans les recherches épistémologiques.

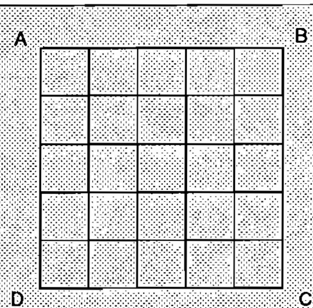
3) *Les théorèmes en acte.*

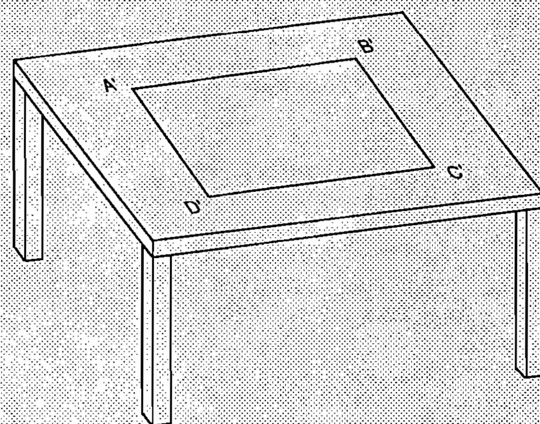
Des observations en classe montrent aussi comment les élèves infèrent des programmes de traitement à partir de "théorèmes en acte" (au sens de G. Vergnaud).

Un exemple : (cf. encadré 1, page 12)

Si, en 6ème, on demande à des élèves de représenter un damier de 5 x 5 cases sur une table en perspective (la frontière du damier étant déjà représentée sur la table), pratiquement, tous les élèves réussissent cette tâche en utilisant une procédure (un programme de traitement au sens de Meirieu) liée à la proportionnalité :

Ils divisent A'B' et C'D' en cinq parts égales et joignent les points correspondants. Ils font de même pour A'C' et C'B', ce qui les oblige à faire des calculs de proportionnalité. Les élèves mobilisent donc, ici, un programme de traitement, Encadré 1. Un exercice classique de sixième.





Représente un damier ci-dessus sur la table vue en perspective.
(la frontière du damier *est déjà représentée sur la table)*

conditionné par le repérage d'invariants opératoires (terminologie de Vergnaud) du type suivant :

Théorème en acte n° 1 :
"L'image d'un segment est un segment"

Les élèves mobilisent cette propriété EN ACTE, sans en avoir conscience (ce qui justifie le label de théorème en acte). Ils peuvent, alors, toujours sans en avoir nécessairement conscience, en inférer une règle du type :

"Pour tracer l'image d'un segment, il suffit de déterminer les images des extrêmités d'un segment".

Comme pour l'usage du théorème de Pythagore, on peut imaginer, ici, que des connaissances spécifiques sur les segments permettent de faire l'économie de l'apprentissage de la règle énoncée ci-dessus.

Théorème en acte n° 2 :
Si M est un point d'un segment AB, alors M' image dans la perspective de M vérifie :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{A'M'}{A'B'} .$$

Ce qui permet, alors, au moins dans des cas de rapports simples, d'engendrer un programme de partage du segment A'B' permettant de situer le point M' .

On voit apparaître dans ce type de description, plutôt que des savoirs procéduraux coordonnant des critères définissant une classe de problèmes et des programmes de traitement précis, un autre mode d'organisation des connaissances incluant à la fois des invariants opératoires, des inférences, des buts à atteindre et des programmes de traitements, ce que G. Vergnaud appelle des SCHEMES[8]. Les schèmes sont des organisations de la pen-

(8) G. Vergnaud : Concepts et schèmes in *Psychologie française* (1985) n°30 3/4.

sée, le plus souvent inconscientes, qui permettent d'associer des invariants et des programmes de traitement.

Quoiqu'il en soit, que l'on modélise l'activité de résolution de problèmes en termes de savoirs procéduraux ou en termes de schèmes, nous sommes en présence de modèles faisant jouer un rôle central à des connaissances spécifiques du type de problèmes à résoudre, et non pas à des processus ou des capacités indépendantes des connaissances du sujet. Comme le dit M. Caillot[9], résumant les orientations des recherches sur la résolution de problèmes de ces dernières années :

"Les recherches sur les processus cognitifs mis en jeu lors de la résolution de problèmes ont été marquées à leur début par la recherche d'heuristiques générales indépendantes du contenu de la tâche... toutefois, l'espoir de trouver de telles heuristiques s'est envolé à mesure que les études sur des tâches à contenu se sont developpées".

Conformément à la thèse que nous voulons défendre, une bonne part des connaissances impliquées, savoirs procéduraux, théorèmes en acte ou schémes, ne font pas nécessairement partie du discours officiel ou public sur le savoir. Ce dernier, avec ses variations selon les individus, n'est souvent qu'une petite part du savoir et masque souvent ainsi une autre part, importante, un savoir privé de nature inconsciente.

Le savoir public peut aussi masquer un savoir qui peut être plus conscient comme le montre l'exemple suivant que nous empruntons à Y. Chevallard[10]. Celui-ci permet de mettre en avant le rôle, dans une activité mathématique tout à fait standard, des connaissances "non-essentielles" se tapissant à l'ombre du discours officiel.

(9) M. Caillot : La résolution de problèmes en Physique in *Psychologie française* (1984) n°29 3/4.

(10) Y. Chevallard : *Notes sur la question de l'échec scolaire* (1988) Ed. Irem de Marseille.

II — ROLE DE CONNAISSANCES "NON-ESSENTIELLES" DANS UNE ACTIVITE MATHEMATIQUE.

L'exemple présenté et la thèse développée, ci-dessous, sont dus à Y. Chevallard et nous renvoyons le lecteur, pour une lecture plus exhaustive, à l'opus cité.

Exemple (niveau lycée) :
(cf. encadré 2, page 14)

"Soit à étudier la fonction :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}."$$

Le discours officiel sur ce type de tâche donne un programme de traitement standard :

— étude du domaine de définition,

— calcul de la dérivée,

— étude du signe de la dérivée,

— élaboration d'un tableau de variation,

— tracé de la courbe représentative.

La thèse de Chevallard est la suivante : le discours officiel, ici la focalisation sur le programme de traitement standard, va refouler maintes connaissances relatives au domaine de l'étude des fonctions que l'élève pourrait acquérir à partir de sa pratique de l'étude des fonctions. On a ainsi, une thèse intéressante qui pourrait se généraliser ainsi : *à se focaliser sur un savoir minimum, on risque de créer des obstacles de nature didactique à l'acquisition de connaissances*, non essentielles, mais utiles pour l'activité et en particulier, comme nous allons le voir pour le contrôle de celle-ci.

Encadré 2. Un exercice de lycée.

Etudier la fonction : $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$.

On peut imaginer un élève qui mettrait en œuvre des **connaissances empiriques** sur l'étude des fonctions, **avant** d'utiliser la procédure standard :

— ayant noté que la fonction est **définie partout**, qu'elle est **paire**, l'élève s'intéressera à ce qui se passe au point $x = 0$.
Son expérience l'amènera à penser :
"Généralement, le graphe d'une fonction paire présente une tangente horizontale au point situé sur l'axe des ordonnées".
Il pourra alors vérifier cette conjecture avec le calcul de la dérivée au point 0 ...

— il est facile de voir que f(x) s'annule pour les points $x = 1$ et $x = -1$ et uniquement pour ces points. L'élève peut en déduire de façon empirique que le graphe de la fonction ne passe pas dans les zones grisées du schéma n° 1 (car il faudrait d'autres intersections avec l'axe des x).

— l'élève peut encore remarquer (par exemple en étudiant le comportement à l'infini) que $x^2 - 1 < x^2 + 2$, donc que $f(x) < 1$. Ceci permet d'éliminer une nouvelle zone pour le graphe (cf. schéma n° 2).

— en remarquant aussi que $f(x) \to +1$ lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, l'élève peut conjecturer qu'il y a de bonnes chances pour que le graphe ait une allure conforme à celui du schéma n° 3 ...

Ces "faits" ne constituent évidemment pas des certitudes pour l'élève, mais cela peut le rendre vigilant, surtout si l'exécution technique des calculs du "programme standard d'étude des variations d'une fonction" le conduit à d'autres résultats.

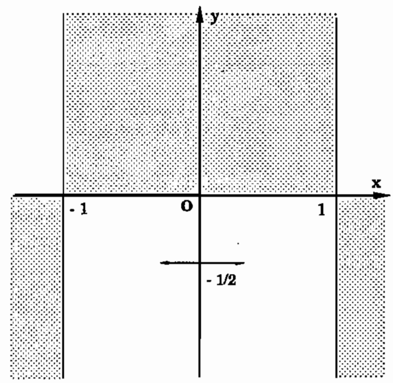


schéma 1

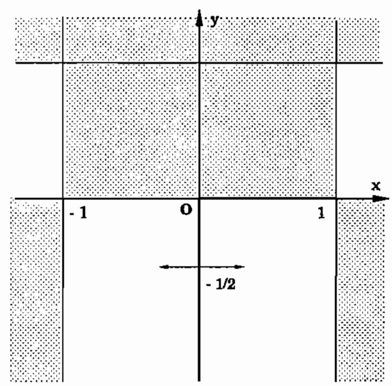


schéma 2

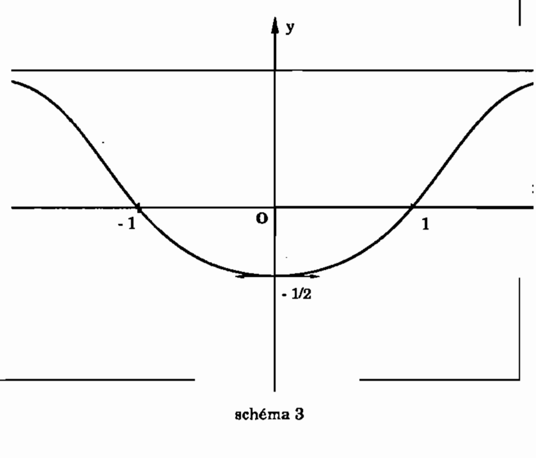


schéma 3

Revenons à l'exemple : selon Chevallard, on peut imaginer un élève qui mettrait en œuvre des *connaissances empiriques* sur l'étude des fonctions, avant même de commencer à entrer dans les détails techniques de la procédure standard ; ces connaissances lui permettraient alors d'avoir rapidement une idée sur l'allure de la courbe à obtenir et ainsi, il pourrait contrôler l'exécution technique de la procédure standard !

Ainsi, une fois perçu que la fonction est définie partout sur $\mathbb{R}$, qu'elle est paire, l'élève peut s'intéresser à ce qui se passe au point d'abscisse 0. Nous avons ici une connaissance du type :

"Si une fonction est paire, il est intéressant d'examiner ce qui se passe au point d'abscisse 0".

En effet, si on effectue l'étude pour les $x > 0$, on aura, par symétrie, le graphe pour les $x < 0$. Le point d'abscisse 0 joue donc un rôle dans le tracé du graphe.

Or, une connaissance empirique (fruit de l'expérience du sujet) du type suivant peut être mobilisée.

"Généralement, le graphe d'une fonction paire présente une tangente horizontale au point situé sur l'axe des ordonnées".

Remarquons, toujours suivant la démonstration d' Y. Chevallard, que nous avons là une proposition débutant par le terme "généralement", ne faisant pas partie du discours officiel en mathématiques.

L'élève pourra alors vérifier cette conjecture avec le calcul de la dérivée au point 0. Si elle ne se vérifiait pas, l'élève pourrait d'abord se demander si, par hasard, il n'aurait pas commis une erreur dans le calcul de la dérivée, ce qui le conduirait à contrôler, avant d'aller plus loin dans ses calculs.

Poursuivons ; il est aussi facile de voir que $f(x)$ s'annule pour les points $x = 1$ et $x = -1$ et uniquement pour ces points. (L'élève sait qu'il est intéressant d'étudier les points qui correspondent à l'intersection du graphe avec l'axe des x, lorsque cela ne conduit pas à des calculs trop complexes).

L'élève peut en déduire alors que le graphe de la fonction (connaissances empiriques sur les tracés de fonctions) ne passera pas dans les zônes hachurées du schéma n° 1 de l'encadré 2 (ou alors, il faudrait d'autres intersections avec l'axe des x).

Poursuivant encore, l'élève peut remarquer (par exemple, en se demandant quel est le comportement de la fonction vers $+\infty$ ou vers $-\infty$) que l'on a toujours :

$$x^2 - 1 < x^2 + 2$$

et donc que la fonction vérifie toujours :

$$f(x) < 1$$

ce qui permet encore d'éliminer une partie du plan comme zone possible du graphe (cf. schéma n° 2 de l'encadré 2).

En remarquant aussi que $f(x) \to +1$ lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, l'élève peut, dès lors, conjecturer qu'il y a de bonnes chances pour que le graphe ait une allure conforme à celui du schéma n° 3.

Ce n'est pas pour l'élève une certitude, mais cela le rendra vigilant, si l'exécution technique des calculs du programme standard le conduit à d'autres résultats[11].

Ainsi, cet exemple illustre que l'on peut, éventuellement, mobiliser rapidement des connaissances empiriques, peu coûteuses quant à leurs mises en œuvre,

(11) Y. Chevallard entre plus finement dans le jeu des connaissances empiriques pouvant être mobilisées par un élève. Nous avons simplifié sa démonstration, notre but étant simplement d'illustrer un jeu de connaissances "non-essentielles". En particulier, Chevallard développe d'autres conjectures que ce même élève, par un jeu de connaissances empiriques, pourrait éventuellement formuler sur le graphe de cette fonction.

qui vont fournir des indications sur l'allure du produit fini à obtenir, et qui vont permettre un contrôle utile, en parallèle, à l'exécution du programme du traitement standard.

On voit ainsi apparaître à nouveau des connaissances "non publiques" ou, du moins, ne faisant pas partie, classiquement, du discours écrit. (Il n'en est peut-être pas de même du discours oral tenu par un professeur dans sa classe).

Ayant tenté de montrer le rôle dans l'exécution d'une tâche de connaissances spécifiques, nécessairement multiples, il convient de s'interroger alors sur les apprentissages effectifs de ces connaissances, et en particulier, de montrer pourquoi ce qui est possible à certains élèves ne l'est pas pour d'autres. C'est ce que nous allons esquisser dans une troisième partie en introduisant des métaconnaissances que nous définirons comme des connaissances que le sujet possède sur "sa propre relation aux savoirs", et en proposant un examen de leur rôle dans le traitement par le sujet de son expérience en temps réel.

III — ROLE DES METACONNAISSANCES DANS LE TRAITEMENT DE SON EXPERIENCE PAR UN SUJET.

a) Exemple de l'acquisition de connaissances procédurales liées au théorème de Pythagore.

On l'a vu antérieurement, l'élève spécifiera d'une manière ou d'une autre la classe de problèmes où il peut utiliser avec pertinence le théorème de Pythagore.

Examinons le cas de deux élèves traitant différemment les exercices suivants :

Exercice n° 1 :
"Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 3 cm et AC = 4 cm .
Calculer BC."

Cet exercice est proposé à la suite du cours sur Pythagore.

Elève n° 1 : Il traite son expérience de la manière suivante : l'enseignant propose cet exercice tout de suite après le cours sur Pythagore. L'élève sait alors qu'il convient d'utiliser le théorème qui vient de faire l'objet d'un exposé. (Connaissance sur le fonctionnement didactique de la classe). Il utilise donc Pythagore, arrive au résultat. Il s'arrête là, il est satisfait. Ce n'est qu'un exercice d'application.

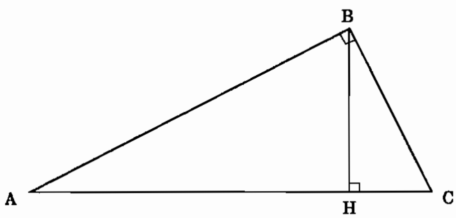
Cet élève a donc surtout mobilisé des indices contextuels, appartenant à la logique didactique. Il n'est pas véritablement entré dans la logique du savoir[12]. D'ailleurs, dans le rapport social officiel aux exercices d'application, il n'y a rien à apprendre. C'est le cours qui doit être appris. Cet élève est ainsi en conformité avec ce type de discours et avec le contrat en découlant.

Elève n° 2 : Il commence comme l'élève n° 1, mais il remarque alors, après avoir réussi à calculer BC grâce au théorème de Pythagore, que ce théorème est utile pour calculer la longueur de l'hypothénuse d'un triangle rectangle lorsqu'on connait la longueur des deux autres côtés. Il a commencé à spécifier les conditions d'utilisation du théorème de Pythagore. Il a ainsi débuté un apprentissage interne à la logique du savoir.

(12) Notre exemple est fictif. Cependant M.J. Perrin signale que les élèves en difficulté résolvent bien les exercices proposés, mais que lorsqu'on leur propose ensuite un exercice où ils sont censés réutiliser les mêmes procédures, ils semblent avoir oublié leurs activités précédentes.

cf. M.J. Perrin : Réflexions sur le rôle du maître dans des situations didactiques à partir du cas de l'enseignement à des élèves en difficulté (à paraître in *Actes du Colloque* PME).

Exercice n° 2 :
"Soit un triangle rectangle en B, tel que AB = 4 cm , BC = 3 cm , AC = 5 cm , BH la hauteur issue de B .



Calculer la longueur de BH ."

L'élève n° 1, comme le n° 2 peuvent ici légitimement penser à Pythagore : nous le supposerons.

Elève n° 1 : (il n'est pas bon en maths et il le sait).
Il constate qu'il y a des triangles rectangles, pense alors à Pythagore et essaie de l'utiliser de diverses manières, sans succès.
"J'essaie... ça ne donne rien... ça y est, ça recommence : c'est normal, je ne suis pas bon en maths — c'est sûrement un problème compliqué que je ne peux pas réussir — J'ABANDONNE !" (cela de façon inconsciente).

On a là, de façon fictive certes, le passage à un registre de connaissances n'appartenant pas à la logique du savoir, mais qui ont pour objet "*la relation du sujet au savoir*" et qui déterminent aussi un programme de traitement, ici l'abandon.

Il y a apparition, dans cette expérience vécue par le sujet, d'*un invariant* : "Je ne suis pas bon en maths". Le qualificatif "*compliqué*" utilisé pour qualifier le problème ne renvoie pas à une propriété intrinsèque du problème — un problème en soi n'est ni compliqué, ni simple — il renvoie à une propriété désignant un type de relation entre le sujet et le problème qui s'est instauré après quelques essais de résolution infructueux.

Ayant classé le problème dans la catégorie de ceux qui sont difficiles, comme de plus il n'est pas bon en maths, il en déduit qu'il ne réussira pas ; dès lors, il en infère, ici, un programme de traitement sûrement fréquent : L'ABANDON.

Elève n° 2 : (plutôt bon en maths)
Il applique Pythagore aux divers triangles rectangles de la figure et constate que c'est inutile : cela ne permet pas d'approcher la solution du problème posé. Cette expérience, en négatif, lui permet de spécifier davantage les conditions d'utilisation de Pythagore :

"Il ne suffit pas d'avoir des triangles rectangles, la longueur d'un segment à calculer pour que Pythagore s'applique. Il faut de plus que l'on connaisse, ou que l'on puisse calculer la longueur des deux autres côtés !"

Ainsi, bien qu'en négatif, il y a apprentissage qui pourra être utile par la suite, économique pour spécifier les conditions de l'usage d'un programme de traitement.

Cet exemple, tout simple, montre l'importance du *mode de traitement* par le sujet de son expérience. Le premier sujet n'apprend rien de nouveau sur la logique du savoir, le second spécifie un savoir procédural caractérisant les conditions d'utilisation d'un théorème, ce qui pourra le rendre plus performant pour résoudre ultérieurement des problèmes analogues.

b) Métaconnaissances pilotant le choix de procédures :

Traitons l'exemple suivant : *soit à calculer* 21 x 19 :

Une première règle pouvant être mobilisée par un sujet à un moment de son histoire peut être la suivante :

"J'ai une multiplication à faire – j'exécute l'opération de façon standard sur du papier avec un crayon".

L'expérience mathématique du sujet peut le conduire à utiliser une autre règle qui serait la suivante :

"Avant de faire un calcul, essayons de trouver une astuce, une organisation du calcul qui permette de le simplifier et de le faire sans effort".
Par exemple, ici, remarquer :
21 x 19 = (20+1) x (20–1) = 400 – 1 = 399.

Cette règle, construite avec une certaine expérience, peut être induite par une connaissance du type : faire des calculs de façon standard, c'est fastidieux – cela oblige à aller chercher un crayon, du papier (ou une calculette). Il existe, en revanche, des procédures astucieuses qui allègent la charge de calcul et permettent ainsi d'aller plus vite.

On a ainsi, chez ce sujet, des connaissances sur le COUT *pour lui* de programmes de traitement. La deuxième procédure (avec la recherche d'astuces) est ainsi considérée par ce sujet comme moins coûteuse. L'expérience de ce même sujet peut le conduire à nouveau à modifier, en terme de coût, la dernière règle utilisée au profit de la suivante :

"Pour faire une opération, rechercher systématiquement une astuce est coûteux en temps, suscite plus d'erreurs que la méthode standard (c'est là une connaissance empirique) en conséquence, à moins qu'une astuce de calcul n'apparaisse immédiatement, utiliser la procédure papier-crayon standard".

Ces connaissances du sujet, sur des procédures en terme de coût, n'appartiennent pas au "champ conceptuel de la multiplication", mais bien au "champ du rapport du sujet, avec les multiplications" ; ce sont donc bien des métaconnaissances.

Le sujet, pour choisir entre plusieurs procédures, peut le faire en mobilisant des connaissances en terme de coût sur la longueur en temps des procédures de traitement et sur leur fiabilité respective. Ce sont bien des connaissances que le sujet a tissées relativement à sa relation au savoir. On pourrait appliquer très certainement la notion de schème de G. Vergnaud à ce type de connaissances, rechercher ainsi des invariants opératoires, des inférences, des procédures...

Le sujet peut ainsi repérer des invariants sur les effets de sa conduite dans diverses catégories de situations :

— en terme de coût (temps, risque d'erreurs),

— en terme d'intérêt (cf. la deuxième partie : l'élève dont Chevallard simule le fonctionnement sait qu'il est intéressant d'examiner tels points spécifiques de la situation)

— en terme de plaisir, de souffrance (et *on pourrait ainsi réintégrer une gestion de l'affectif dans le fonctionnement cognitif).*

Ces invariants lui permettent, alors, d'inférer des règles de conduite qui ne sont rien d'autre alors que des "méta-programmes de traitement" permettant, à leur tour, d'activer ou d'inhiber d'autres programmes de traitement plus spécifiques à la logique du savoir lui-même

c) Programmes de traitement diversifiés d'une erreur ou d'une réussite :

— *Cas où l'élève est confronté à une erreur.*

Un bon élève (l'institution lui renvoie cette image de lui-même dans son rapport aux maths), peut s'apercevoir que tel programme de traitement auquel il a pensé ne permet pas d'aboutir ; nous avons déjà vu avec le théorème de Pythagore, que cet élève peut alors réaliser un apprentissage allant dans le sens d'une meilleure spécification du théorème ou du programme de traitement à mobiliser dans un problème.

Ce même élève peut aussi arriver à une contradiction et en déduire que, nécessairement, il s'est trompé dans ce qu'il a mis en œuvre. Il va alors développer une activité de recherche visant à trouver le point où il s'est trompé. Face à une contradiction, il développe un programme de traitement de l'erreur. Il peut savoir que c'est un programme qui peut être dans certains cas coûteux en temps, mais efficace pour REUSSIR.

Remarquons ici que le programme de recherche de l'erreur n'est sûrement pas le même selon la nature du problème, et que ce même élève peut avoir des connaissances spécifiques sur les erreurs qu'il peut commettre en fonction des problèmes : erreurs de calcul dans un problème où il y a beaucoup d'algorithmes de calcul à développer, erreur de spécification d'un théorème dans d'autres cas. Il peut ainsi y avoir des programmes de traitement diversifiés commandés par des connaissances spécifiques du sujet sur son activité et ses résultats. Ces connaissances et, en conséquence, les programmes de traitement inférés sont évolutifs dans le temps, fonctions elles-mêmes du traitement que le sujet opère sur son expérience.

Un "mauvais" élève sachant qu'il n'est pas bon en maths, peut, face à une erreur, en déduire que le problème est trop difficile pour lui et ainsi abandonner. Comme le signalent E. Bauthier-Castaing et A. Robert[13], il se peut que cet élève ait déduit, de son expérience sociale de la classe de mathématiques, *une connaissance* du type "Le bon programme de traitement à utiliser pour régler un problème se doit d'être découvert rapidement ! C'est ce que font les bons élèves". Cette connaissance, acquise par comparaison sociale, peut ainsi renforcer, pour lui, l'idée d'inutilité d'une recherche plus longue ; il est conduit ainsi à adopter une conduite d'abandon qui, elle-même, va renforcer la connaissance qu'il a de lui-même dans son rapport aux maths : "il est mauvais".

Un autre programme de traitement, signalé par exemple par Paour[14], et mis en œuvre par des enfants élaborant un programme informatique, consiste, dès qu'il y a le constat d'une erreur, à tout effacer et à recommencer ; ces enfants, semble-t-il, ne veulent pas laisser de trace d'un produit non conforme. Cela peut être dû à une connaissance du type : "Si je réalise quelque chose de non conforme, alors je vais me faire punir". On peut ainsi comprendre le programme de traitement utilisé, mais on remarquera que cette métho-

(13) E. Bauthier-Castaing et A. Robert : Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des maths in *Revue Française de Pédagogie* n°84 (1988) pp. 13-20.

(14) Paour : Retard mental et aides cognitives in Caverni : *Psychologie cognitive*, modèles et méthodes. P.U.G. 1988.

de, dès lors, ne permet pas de mettre en œuvre une recherche de l'erreur en utilisant les traces de ce qui a été fait précédemment. (Là aussi, l'élève conçoit peut-être la réussite comme devant être réalisée du premier coup).

— *Cas où l'élève est confronté à une réussite.*

Le bon élève, réussissant, nous l'avons vu, peut réaliser un apprentissage allant dans le sens d'une spécification plus précise des conditions d'utilisation d'un programme de traitement.

Intéressons-nous plutôt au "mauvais élève" qui réussit un exercice. Il peut être satisfait d'avoir réussi, tout en mobilisant une explication "CONGRUENTE" avec son statut de "mauvais élève". "J'ai réussi, mais c'est parce que le problème était facile, à la portée de n'importe qui". On le voit, ce type d'interprétation de son expérience, la catégorisation du problème dans ceux qui sont faciles, ne vient pas modifier cet invariant opératoire, connaissance que cet élève à de lui-même comme "mauvais élève".

On peut aussi esquisser une hypothèse comme la suivante : pour cet élève, conformément à un discours quasi-officiel, seul "le cours" doit faire l'objet d'un apprentissage : il y a, reprenant une expression d'Yves Chevallard([15]), relativement à un objet de savoir spécifique, une "INJONCTION DIDACTIQUE" faisant partie du CONTRAT.

A l'inverse, ce qui n'est pas "cours", les diverses activités proposées par le maître, qu'elles soient introductives ou d'application, ne font pas l'objet d'apprentissage, mais sont simplement à exécuter : il y aurait, pour cet élève, une interprétation du contrat en terme d'INJONCTION INSTRUMENTALE (une injonction à faire et non à apprendre). C'est encore M.J. Perrin (article cité) qui cite effectivement le cas d'élèves en difficulté ne faisant pas de lien entre activités introductives (alors même qu'ils réussissent dans ces activités) et les moments d'institutionnalisation du savoir proposé par le maître.

Quelles que soient les hypothèses avancées, et à notre sens il y a là un domaine de recherche important, ce sont bien des connaissances qui permettent d'expliquer la conduite cognitive d'un sujet. Une variabilité des métaconnaissances permet alors d'expliquer une variabilité des performances de sujets dans des activités données. La nature des connaissances mobilisées (invariants, programmes de traitement indexés sur des situations) permettent aussi de comprendre la variabilité intra-individuelle selon les contextes d'action.

CONCLUSION

Les connaissances officielles, publiées dans le discours écrit, ne constituent qu'un reflet très partiel des connaissances privées d'un sujet : connaissances procédurales multiples, connaissances permettant de faire des économies d'apprentissages, connaissances empiriques sur des objets multiples, métaconnaissances concernant la relation du sujet à des objets de savoirs, peuplent ainsi l'univers du savoir d'un individu. Ces connaissances peuvent se consteller en schèmes regroupant des invariants, des inférences, des programmes de traitement... Ce sont de telles connaissances spécifiques, mobilisées par le sujet à un instant déterminé, qui déterminent des programmes de traitement de l'expérience

(15) Y. Chevallard : L'univers didactique et ses objets : fonctionnement et dysfonctionnement in *Interactions didactiques*. n°9 (1988).

vécue par le sujet, qui, à leur tour, déterminent ou non l'acquisition de nouvelles connaissances, de nouveaux programmes de traitement... Il s'agit donc d'un univers de connaissances dynamiques, dont le changement s'inscrit dans la temporalité de l'expérience du sujet.

Ce type de modèle, de *nature hypothétique*, cela va de soi, permet, selon nous :

— *d'éviter des biais explicatifs des différences inter-individuelles :* ainsi, on ne peut plus se référer à de grandes capacités mentales qui seraient plus ou moins présentes chez le sujet (que cela soit de façon innée ou résultant d'une action favorable de l'environnement) pour expliquer la variabilité constatée en termes de performances, relativement à des tâches scolaires.

— *d'expliquer des effets de contexte :* les programmes de traitement mobilisés par un sujet sont fonctions de conditions contextuelles et de buts à atteindre. Ainsi, un sujet peut-il être performant dans tel type d'activité et non dans telle autre. Les métaconnaissances, connaissances du sujet sur ses relations aux savoirs permettent, cependant, d'expliquer des régularités "transversales aux disciplines".

— *de douter de l'efficacité de programmes d'entraînement* (P.E.I., A.R.L., profils pédagogiques) fondés sur le développement de fonctions cognitives ou de gestes mentaux indépendants des contenus. On peut, cependant, réhabiliter ou justifier certains éléments de tels programmes, dès lors qu'ils traitent de l'insertion du sujet dans le contexte scolaire et favorisent, ainsi, la mobilisation de programmes de traitement de l'expérience propices à des apprentissages disciplinaires.

— *de s'interroger plus efficacement sur les compétences développées dans des activités interdisciplinaires :* quelles relations aux savoirs de telles activités impliquent-elles ?

— *de s'interroger, aussi, sur la signification de "qualités" demandées aujourd'hui par les entreprises* à leurs salariés comme "l'esprit de décision, savoir prendre des responsabilités, partager les objectifs du groupe industriel, savoir se remettre en cause, savoir communiquer"... Lorsque l'on saura plus précisément, en termes de connaissances, ce que cachent ces termes, l'école pourra mieux fournir, de façon déterminée, des conditions favorables à l'apprentissage de telles "qualités".

BIBLIOGRAPHIE

BAUTHIER-CASTAING (E.) et ROBERT (A.) : Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques
in *Revue française de pédagogie* - n° 84 (1988) pp. 13.20

BROUSSEAU (G.) : Fondements et méthodes de la didactique
in *Recherches en didactique des mathématiques* (1986) n° 7.2 pp. 33.115

CAILLOT (M.) : La résolution de problèmes de physique ; représentations et statégies
in *Psychologie française* (1984) n° 29 - 3/4 pp.257.262

CHEVALLARD (Y.) : *Notes sur la question de l'échec scolaire* (1988)
Ed. IREM de Marseille (125 p.)

CHEVALLARD (Y.) : L'univers didactique et ses objets ; fonctionnements et dysfonctionnements
in *Interactions didactiques* (1988) - n° 9 (Genève)

LEMOIGNE (Ed.) : *Intelligence des mécanismes - Mécanismes de l'intelligence*
Ed. Fayard (1986)

MEIRIEU (P.) : Guide pour la pratique du conseil méthodologique
annexe à la 2e édition : *Enseigner, scénario pour un métier nouveau* - ESF (1989)

NOIRFALISE (A) : *Compte rendu d'une expérience d'utilisation du* P.E.I. *dans une classe de 6ème/5ème.*
IREM de Clermont-Ferrand (1988)

PAOUR : Retard mental et aides cognitives
in CAVERNI (Ed.) : *Psychologie cognitive modèles et méthodes*
(P.U.G.) (1988) - pp. 191-216

PERRIN (M. J.) : Réflexions sur le rôle du maître dans les situations didactiques à partir du cas de l'enseignement à des élèves en difficulté.
(à paraître in *Actes du colloque P.M.E.*)

PITRAT (J.) : Connaissances et métaconnaissances
in LEMOIGNE (Ed.) : *Intelligence des mécanismes ; mécanismes des intelligences*
Ed. Fayard - (1986) - pp. 77-112

VERGNAUD (G.) : *L'enfant, la mathématique et la réalité*
Ed. Peter Lang. (1981) - 200 p.

VERGNAUD (G.) : Concepts et schèmes
in *Psychologie française* (1985) n° 30 - 3/4 - pp.245- 252