

Point de vue

Y A UN MALAISE

Quelques réflexions d'ordre didactique à propos de l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire.

A. DUVAL et M.H. SALIN

Lorsque, à l'occasion de stages à l'école normale, des instituteurs sont interrogés sur leur pratique de la classe et les contenus de leur enseignement, on peut remarquer une nette différence de leurs attitudes selon les domaines concernés : diserts sur le domaine numérique et souvent au fait des divers apprentissages possibles, ils reconnaissent leur embarras et leurs réponses se font beaucoup plus évasives dès lors que l'on évoque l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire. Les élèves-maîtres, au retour de leurs stages pratiques sur le terrain font part du peu d'importance accordée à cette partie des programmes, voire même dans certains cas, de l'absence de son enseignement au moins pendant leurs stages. La place mineure réservée aux connaissances géométriques dans l'évaluation CM2-6^{ème} de 1989 est un autre signe de cette réalité. On sait que

cela résultait d'un choix délibéré. Il existe donc un problème du statut de la géométrie dans l'enseignement primaire.

Quels sont les objectifs de son enseignement ? Quelles connaissances doit-on faire apprendre ? Faut-il des définitions ? Lesquelles ? Les différentes notions sont-elles liées ? Y a-t-il une progression à respecter ? Quels sont les attentes et les besoins réels des enseignants du secondaire ? Voilà une série de questions que les instituteurs se posent et pour lesquelles les réponses sont bien moins assurées que dans le domaine numérique. Personne ne conteste, par exemple, qu'il soit utile de savoir effectuer une multiplication, donc de l'apprendre à l'école. C'est "naturel" depuis un siècle à peu près. Le retirer des programmes ne passerait pas inaperçu. Pour les connaissances géométriques, les

convictions sont moins affirmées : il est certain que l'enseignement de la géométrie ne saurait être justifié pour les mêmes raisons que celui des connaissances numériques ; par ailleurs, la référence à des pratiques sociales, à l'utilité concrète de la géométrie est aussi moins évidente que pour le calcul numérique ou la proportionnalité. Mais l'utilité directe immédiate des connaissances ne constitue pas une raison suffisante pour l'existence d'un enseignement ou son absence. Les questions posées ci-dessus sont des questions de didactique et les enseignants, parce qu'ils n'ont pas de réponses claires à ces questions, se sentent "autorisés" à prendre des libertés avec le programme (tout comme ceux du secondaire avec la géométrie dans l'espace).

Que disent donc les programmes, y a-t-il d'autres sources d'informations où les maîtres pourraient trouver des réponses aux questions précédentes ?

Les programmes

L'enseignement de la géométrie fait partie intégrante de l'enseignement obligatoire à l'école élémentaire. Les différents programmes successifs ont précisé de manière plus ou moins détaillée son contenu. Ils ont parfois été assortis de compléments d'information pédagogique pour expliciter les objectifs de cet enseignement et donner des exemples d'activités envisageables. Nous donnons en annexe les compléments aux programmes et instructions de 1985 concernant la géométrie.

Ce texte est resté confidentiel : envoyé en un exemplaire dans chaque école, il est postérieur aux instructions elles-mêmes et ne figure pas dans le petit livre des pro-

grammes. Il donne une classification de divers types d'activités : reproduire, décrire, représenter, construire, et présente des objectifs correspondants en termes de savoir-faire.

La comparaison des programmes de 1945 à 1985 montre une certaine évolution. Comprises en 1945 "comme des exercices d'observation et de leçons de choses en même temps qu'un premier apprentissage du dessin et du travail manuel", les activités préconisées dans les instructions récentes deviennent des problèmes de maîtrise des rapports à l'espace, réduit à l'espace graphique de la feuille de papier et aux objets physiques manipulables. Le vocabulaire "actif et utile" ne devrait plus être nécessairement lié à des définitions. L'accent est donc mis sur la construction de l'espace "représentatif" dans le premier paragraphe, "champ d'expériences sur lequel peut se construire la géométrie" un peu plus loin dans le texte.

Les enseignants du primaire peuvent être désarçonnés par ces instructions pour deux raisons au moins :

— elles semblent en contradiction avec ce qu'ils pensent qu'attendent les enseignants de collège : des connaissances de base sur les concepts mathématiques (droite, segment, angle, figures etc.).

— elles laissent supposer que la géométrie peut se construire naturellement sur des expériences spatiales (limitées d'ailleurs "au monde des objets physiques") mais cette affirmation n'est ni justifiée ni éclairée par des indications sur l'articulation possible entre ces deux domaines. Les conditions qui favorisent l'élaboration de conceptualisations géométriques lors de la résolution de problèmes spatiaux ne sont pas évoquées et

la présentation des activités géométriques en quatre catégories qui paraissent indépendantes les unes des autres fait disparaître une grande partie de leur sens.

Les manuels scolaires

Une analyse superficielle pourrait laisser penser que leurs auteurs sont des tenants de l'idée défendue par plusieurs intervenants lors du colloque inter-Irem sur la géométrie de Port d'Albret (Landes) "non à un enseignement trop formel, priorité à la maîtrise de l'espace". Mais :

— La référence à l'espace n'est toujours qu'évoquée : un dessin réalisé par l'adulte semble suffire pour donner au problème une signification spatiale, la transposition de la situation réelle à la situation représentée est supposée évidente, la capacité des élèves à utiliser, dans une situation réelle, les outils mathématiques introduits n'est pas testée.

— A côté de ces situations introductives, dont une analyse *a priori* montre le plus souvent l'impossibilité de la mise en œuvre avec des élèves qui ne disposent pas encore de la connaissance visée, se perpétuent largement les leçons de choses : la seule vue des tracés, accompagnés des notations mathématiques usuelles, doit suffire à définir les objets géométriques et leurs propriétés, qu'ils soient plans ou spatiaux. Ainsi dans le chapitre sur les solides des deux ouvrages les plus utilisés dans notre département, les auteurs semblent supposer que les élèves maîtrisent *a priori* les différents modes de représentation ainsi que les règles de la perspective cavalière. On pourrait résumer en une phrase la conception qui semble partagée par la majorité des auteurs de

manuels en ce qui concerne l'apprentissage de la géométrie : il suffit d'observer pour comprendre et de voir pour savoir.

Notons que l'on retrouve des caractéristiques semblables dans beaucoup de manuels de 6^{ème}-5^{ème}.

— Enfin, on trouve dans certains livres des activités influencées par les recherches en didactique mais une fois adaptées au genre littéraire "manuel", tout ce qui en fait la richesse disparaît : c'est le cas par exemple des situations de communication de figures remplacées par des exercices du genre : "Voici un message que tu pourrais recevoir d'un de tes camarades ; dessine la figure sur une feuille". Cela a un petit aspect novateur mais quelle différence avec l'exercice classique de construction d'une figure à partir de sa description ?

La formation initiale et continue

Les professeurs d'école normale, conscients des difficultés de cet enseignement à l'école élémentaire, accordent de plus en plus d'importance à ce secteur : ils ont fort à faire car les futurs instituteurs n'ont que très peu de connaissances géométriques et ils ont du mal à les mettre en œuvre dans des situations spatiales. Pour les plus âgés, les changements de statut des connaissances et de gestion de la classe que suppose le renouvellement de l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire, constituent des obstacles.

Les formateurs font connaître les quelques documents destinés aux enseignants faisant état de résultats de recherche : aides pédagogiques de la COPIRELEM, documents IREM, livres de la collection Ermel.

Y A UN MALAISE

Deux problèmes importants demeurent :

— Chaque année, un très petit nombre d'enseignants sont touchés par la formation,

— Les formateurs eux-mêmes, comme l'ensemble des enseignants de mathématiques n'ont pas une vision assez claire de ce que devrait et pourrait être un enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire : toute une série de questions se posent, dont nous énumérons quelques-unes :

. des objectifs liés à la maîtrise des relations spatiales doivent-ils être fixés ? Si oui, comment les atteindre ?

. comment faire en sorte que les enfants puissent donner un sens correct aux dessins, représentations plus ou moins symboliques, figures, utilisés en géométrie ?

. à partir de quel âge et dans quel but peut-on faire entrer les élèves dans le fonctionnement mathématique de la géométrie ?

. comment à la fois articuler et différencier dans leur fonctionnement, connaissances spatiales et connaissances géométriques ?

. est-il utopique de penser qu'une fois élaboré un capital de réponses à ces questions sous la forme d'ingénieries, de progressions effectivement contrôlées, la formation des enseignants, initiale et continue, puisse s'en saisir et ainsi peu à peu modifier le rapport des enseignants à ce secteur de connaissances, rapport qui reste déterminé par la conjonction de deux facteurs : une idéologie empiriste qui attribue un caractère d'évidence à l'espace, une forte pression didactique qui fait de la géométrie un modèle privilégié des mathématiques pour leur enseignement (*) ?

Le problème de l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire ne peut être traité isolément de celui concernant la scolarité obligatoire. L'un comme l'autre ne trouveront de solution satisfaisante que dans la mesure où des recherches approfondies seront entreprises portant également sur des stratégies de formation des enseignants. La place accordée à la recherche en didactique dans les universités et dans les I.U.F.M sera déterminante.

Quelques indications bibliographiques :

(outre les textes officiels et les ouvrages cités)

G. BROUSSEAU, *Etudes de questions d'enseignement : un exemple, la géométrie*, Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique IMAG GRENOBLE, 1982/83 n° 45.

C. LABORDE, *L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques*, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. IX.3.

M.G. PECHEUX, *Le développement des rapports des enfants à l'espace*, Nathan Université.

R. BERTHELOT, M.H. SALIN, *A la recherche de phénomènes didactiques dans l'enseignement de la géométrie*, Actes de la 5^{ème} école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique (1989).

A. DUVAL, M.H. SALIN, *Compte rendu de l'atelier sur l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire*, Actes du Colloque inter-IREM géométrie de Port d'Albret 1990.

(*) Voir la place de la géométrie dans l'article de J. HOUDEBINE dans Repères n°1 "Démontrer ou ne pas démontrer voilà la question".

MINISTERE
DE L'EDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES ECOLES

ECOLE ELEMENTAIRE
COMPLEMENTS AUX PROGRAMMES ET INSTRUCTIONS
DU 13 MAI 1985

ACTIVITES GEOMETRIQUES

"L'enseignement des mathématiques fait acquérir des connaissances et des compétences dans les domaines numérique et géométrique, tout en aidant l'élève à se forger des méthodes de travail. Il stimule l'imagination." "Résoudre des problèmes suppose la maîtrise d'un certain nombre d'outils, numériques et géométriques, et l'appropriation de méthodes".

Programmes et instructions, pp.39-40

La géométrie présente une grande importance pour toute l'activité mathématique : c'est elle qui permet de visualiser les concepts fondamentaux (ensembles de nombres, continuité, limite,...), elle est inséparable du nombre et de la mesure. Construire l'espace représentatif est indispensable pour que l'activité mathématique puisse s'exercer.

Les activités géométriques (constructions, tracés,...) offrent la possibilité de cultiver, chez l'élève, le goût du travail bien fait, car la précision d'une construction dépend du soin apporté à sa réalisation. La conservation, par l'élève, des travaux qu'il a exécutés est, de même, une bonne incitation à une recherche de qualité et une motivation pour procéder à des constructions plus complexes et plus personnelles.

1. Le champ des activités : objets physiques, objets géométriques

A l'école élémentaire, les activités géométriques doivent concourir, au même titre que d'autres (par exemple des activités physiques et sportives) à la construction de l'espace chez l'enfant. Les élèves doivent donc être mis en situation :

- d'agir sur des objets, d'en fabriquer et d'en construire ;
- de se familiariser avec divers espaces, abordés selon des points différents (on peut, par exemple, suivant le problème posé, s'intéresser seulement à la continuité ou seulement au parallélisme ou uniquement à la mesure) ;
- de traiter des problèmes de représentation

C'est donc une pédagogie de l'activité qui permet à l'enfant de se constituer un champ d'expériences sur lequel peut se construire la géométrie. C'est pourquoi les activités doivent être conduites, tout au moins dans un premier temps, à par-

tir d'objets physiques de l'espace qui, bien que complexes, sont plus proches de l'expérience des enfants : dés, berlingots, boîtes de toutes sortes, emballages divers...

Peu à peu on amène les élèves, grâce à de nombreuses activités sur ces objets physiques, à changer d'angle de vue, c'est-à-dire à les considérer de façon plus géométrique : cube, pavé, tétraèdre... puis, si l'on s'attache aux faces : parallélogramme, rectangle, triangle... enfin, si l'on s'attache aux arêtes : segment, sommet, milieu...

Le passage du monde des objets physiques à celui des objets géométriques est important et difficile ; il nécessite un effort d'abstraction (au sens de "enlever de"). Prenons l'exemple d'une boîte cubique : il faut en effet parvenir à ne pas tenir compte des inscriptions sur les faces, de la couleur de la boîte, à substituer l'idée et le mot de "face" à l'idée et au mot "couvercle" : une boîte a un couvercle mais toutes les faces d'un cube sont identiques. Pour effectuer ce passage il est indispensable que les élèves disposent de matériel et de matériaux nombreux et divers, dont la fonction est justement de permettre d'isoler les éléments invariants que sont le nombre de faces, d'arêtes, de sommets, de formes... ; par exemple, le cube est la forme commune à toute une série de boîtes cubiques de tailles, de couleurs et de fonctions différentes.

2. Les activités à conduire avec ces objets

Les activités géométriques consistent à reproduire, à décrire, à représenter, à construire.

● Reproduire

Les élèves disposent d'un objet et ils doivent en réaliser une copie. Il est possible de reproduire, avec des matériaux divers, un objet plus ou moins usuel, ou bien de procéder à des aménagements ou à des compléments de fabrication. On peut, pour la reproduction, utiliser des moulages, des calques, des patrons et, bien sûr, les instruments de mesure et de dessin. Le résultat obtenu est conforme ou non à l'objet initial. En cas d'erreur il suffit de mettre la production "à l'épreuve des faits". En cas de demande d'un objet "semblable", il convient de préciser le degré de conformité souhaité, si l'on désire évaluer le résultat obtenu.

● Décrire

En reproduisant un objet et donc en choisissant, puis en agencant le matériel, les élèves sont amenés à s'exprimer à propos de cet objet et à formuler des remarques de type géométrique (ex. : il me faut des faces carrées). Progressivement, ils utilisent, en situation fonctionnelle, un vocabulaire géométrique qui permet :

- d'identifier l'objet, par comparaison et opposition avec d'autres objets, en choisissant le critère déterminant ;
- de le reproduire (quel matériel ? quelle démarche ?) ;
- de le représenter.

On pourra effectuer des classements et dresser une liste des propriétés de l'objet, en utilisant un langage de plus en plus précis.

Il s'agit donc de décrire pour :

- identifier : l'élève doit être capable d'expliciter les critères discriminants, d'énoncer les propriétés communes aux éléments d'une collection et de préciser pourquoi tel objet n'appartient pas à la collection (intrus) ;
- reproduire : l'élève doit être capable de formuler la demande en matériel nécessaire à la reproduction et de la justifier ;
- représenter : l'élève doit être capable de classer les remarques de type géométrique à propos d'un objet, d'une part celles qui sont mises en évidence dans une représentation donnée, d'autre part celles qui ne le sont pas.

● Représenter

Dès lors qu'on représente un objet géométrique à l'aide de procédés conventionnels, on se trouve dans l'obligation de négliger des propriétés pourtant présentes dans la description. La représentation ne permet pas, en effet, de mettre en évidence toutes les propriétés : par exemple, les six faces de la description d'un cube n'apparaissent pas toutes sur une représentation. Il est donc intéressant d'habituer les élèves à effectuer et à utiliser des représentations différentes d'un même objet, et à savoir choisir la représentation qui convient le mieux. Il est utile de prendre de nombreux points de vue de l'objet (empreintes, coupes, gabarits, ombres,...), de passer des dessins d'un objet à des schémas conventionnels. On peut, en particulier, et dès le cours élémentaire, procéder à des activités sur les patrons : développements divers d'un même objet, comparaison et classement de patrons.

● Construire

La construction est l'aboutissement d'un processus qui s'appuie sur la représentation et la description. Elle nécessite la mise en œuvre des techniques de tracés associées à un vocabulaire fonctionnel. Pour les constructions dans l'espace, on pourra utiliser divers matériaux (pâte à modeler, carton, baguette, fil de fer,...) ; une attention particulière sera portée à la recherche des différents patrons d'un solide donné (cube, tétraèdre régulier, pavé, octaèdre régulier,...). Notons que, si les matériaux utilisés sont très divers, ils ne sont pas interchangeables et ils ont leur spécificité, dans la mesure où ils mettent en évidence certains aspects plutôt que d'autres : le papier ou le carton matérialisent les faces, leur nombre, la continuité ; le fil de fer met l'accent sur les arêtes et les sommets ; la pâte à modeler met en évidence le volume. La diversité des matériaux permet donc une bonne articulation entre la reproduction et la description et peut aider à la représentation. Dans le plan, on pourra utiliser des planches à clous, des fils élastiques, des baguettes ou procéder à des assemblages (tangram, puzzles). Une partie importante du travail à effectuer concerne l'usage des instruments de tracé et de mesure : règle, équerre, compas, règle graduée, papier calque, quadrillage, réseau, gabarit, rapporteur. Il peut être intéressant, à cet égard, de mettre l'élève en situation de construire un objet qui réponde à un "cahier des charges". La validation est alors immédiate, les causes d'erreurs devant être situées

pour progresser. Pour effectuer la construction, l'élève doit être capable de choisir la représentation qui convient le mieux (par exemple : ce patron permet de diminuer le nombre d'onglets). la construction est, en géométrie, un bon exemple de résolution de problème.

3. Réflexions sur les méthodes

● Démarche

Les activités géométriques nécessitent une alternance entre des moments d'investigation et des moments de réalisation, entre les moments d'analyse et d'autres de synthèse, étroitement liés dès lors que l'on se trouve dans un processus de production (reproduire et construire), comparable à celui de la technologie. Très souvent il faut anticiper sur les pratiques (par ex. : que faudrait-il faire pour obtenir un cube dont les arêtes soient doubles de celles du cube que vous venez de construire ?).

Les langages gestuel, oral, écrit (dont le dessin, le schéma, la photographie...) jouent un rôle important dans la conceptualisation des objets géométriques, qui est en cours à l'école élémentaire et qui doit être prolongée et enrichie au collège.

● Recours aux transformations géométriques

Les actions sur les objets géométriques (déplacements, agrandissements, réductions, déformations) concourent à ce processus de conceptualisation. En effet, c'est en observant les résultats de ces actions, puis en prenant comme objet d'étude ces actions elles-mêmes, que peuvent être mises en évidence les transformations géométriques planes : translation ou rotation (déplacement plan), symétrie. Les travaux concernant les rosaces, les mosaïques, les frises et les pavages, qui permettent de mettre l'accent sur l'imagination, la créativité et la dimension esthétique, aident à une prise de conscience de l'importance des transformations géométriques dans l'organisation de l'espace. On peut accorder une attention particulière aux ensembles de transformations qui conservent globalement une configuration donnée. Le rectangle est conservé globalement par chacune des symétries par rapport à la médiatrice de deux côtés parallèles, ainsi que par la rotation de 180° par rapport à son centre ; les mêmes remarques peuvent être faites pour le carré, qui est un rectangle particulier, mais, de plus, le carré est conservé globalement par chacune des symétries par rapport à une diagonale, ainsi que par les rotations de 90° et 270° par rapport à son centre : le triangle équilatéral est conservé globalement par chacune des symétries par rapport à la médiatrice d'un côté, ainsi que par les rotations d'angles de 120° et 240° par rapport à son centre de gravité.

● Vocabulaire

Le vocabulaire géométrique sert à la transmission et à la compréhension des informations ; il aide aussi à la conceptualisation. Des mots précis, en nombre

limité, doivent être acquis en situation fonctionnelle et parfaitement maîtrisés. L'élève doit accéder, le plus tôt possible, au vocabulaire correct et définitif, qui est celui de l'adulte. Il vaut mieux éviter tout vocabulaire provisoire. Le fait d'utiliser les mots cercle et disque, sphère et boule, facilite la perception des différences notionnelles et aide à la conceptualisation. Le vocabulaire géométrique est ainsi acquis au terme d'un processus d'utilisation continue et, bien sûr, ne doit pas être appris en dehors de tout contexte, associé à des définitions, qui n'ont pas leur place à l'école élémentaire, car elles sont fondées sur la notion de "condition nécessaire et suffisante", qui relève du collègue. Il s'agit avant tout d'acquérir un vocabulaire actif et utile.

4. Problèmes posés par l'évaluation

Les activités géométriques dépassent l'acquisition de savoir-faire techniques et de compétences de tracé, comme en témoigne ce qui précède, et l'évaluation n'en est pas facile. Elle est incluse dans l'explicitation même des verbes "reproduire", "décrire", "représenter", "construire".

Des compétences de tracé sont attendues des élèves à la fin du C.M. et elles peuvent faire parfois l'objet d'une étude en soi, au cours de brèves séquences d'apprentissage, mais elles doivent être intégrées dans les activités et être conçues comme des moyens à mettre en œuvre dans des procédés de construction. C'est ainsi que les élèves doivent être capables :

- de tracer un trait à la règle, avec ou sans consigne, au C.E., l'apprentissage étant commencé dès le C.P. ;
- de tracer, au C.E., des perpendiculaires à une droite donnée ;
- de tracer, au C.M., des parallèles à une droite donnée et de construire des réseaux de droites, l'apprentissage pouvant commencer au C.E. en considérant deux droites perpendiculaires à une troisième ;
- de reporter, dès le C.E., des distances, avec une règle graduée, une bande de papier ou un compas ;
- de reproduire, au C.M., des angles avec calque, gabarit ou compas.

A la fin du C.M. les élèves sauront construire, sur différents supports (papier quadrillé, ligné ou blanc), des figures géométriques planes (triangle, parallélogramme, rectangle, losange, carré, autres polygones, cercle), l'apprentissage ayant été commencé dès le C.E., sur quadrillage. Progressivement les élèves apprendront à choisir eux-mêmes les instruments les mieux adaptés aux tracés et aux mesures qu'ils veulent réaliser.