REPERES - IREM . n°4 - juillet 1991

LES ELEMENTS DE GEOMETRIE DE CLAIRAUT : UNE GEOMETRIE PROBLEMATISEE

Evelyne BARBIN
Irem des Pays de Loire
Centre du Mans

ÉLÉMENS
DE
GÉOMETRIE.

PREMIERE PARTIE.

Des moyens qu'il étoit le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des Terrains.

Le texte qui suit est celui de l'exposé présenté par Evelyne Barbin lors du Colloque de Géométrie de Port d'Albret, le 7 juin 1990.

Pourquoi présenter des *Eléments de géométrie* de 1765, vieux de plus de deux siècles, dans un colloque sur l'enseignement de la géométrie en 1990 ? Nous donnerons deux raisons.

La première concerne le thème du colloque. En effet, une des questions offertes à nos réflexions était la suivante : "Peut-on envisager un enseignement de la géométrie qui serait conduit par des problématiques ?" Or, Clairaut nous propose dans son ouvrage un enseignement de la géométrie conduit par une problématique. Précisément, il nous propose de construire les objets et les connaissances de la géométrie élémentaire pour répondre à des problèmes concernant la mesure des terrains. L'actualité du propos de Clairaut est frappante, au point qu'un stagiaire du C.P.R. de l'Académie de Nantes, lisant la préface du traité, a pu nous affirmer : "j'ai l'impression de lire les commentaires des nouveaux programmes de collège". Serait-ce à dire que les propos sur l'enseignement sont affaire de mode, et qu'il y aurait des cycles qui nous feraient revenir éternellement dans les mêmes chemins ? Certainement pas.

En effet, la seconde raison qui légitime une lecture de ces vieux *Eléments de géométrie* est de nous permettre d'analyser les conceptions épistémologiques sous-jacentes qui guident des choix d'enseignement. Autrement dit, nos conceptions du savoir mathématique sont étroitement liées à nos pratiques enseignantes, et il est donc essentiel, pour mettre en accord les unes avec les autres, de réfléchir aux différentes conceptions épistémologiques du savoir mathématique. D'emblée, deux conceptions s'opposent : ou bien nous pensons le savoir mathématique comme un produit, ou bien nous le pensons comme un processus. Dans le premier cas, nous serons attachés au discours mathématique, dans le second cas, nous donnerons la priorité à l'activité mathématique. Logique des discours constitués ou logique des pratiques (1) : c'est dans la seconde logique que se situe le projet de Clairaut.

1 — Le projet de Clairaut

Le projet de Clairaut est didactique, il en prévient son lecteur dès la première phrase de la préface à ses *Eléments de géométrie* : "Quoique la géométrie soit par elle même abstraite, il faut avouer cependant que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer, viennent le plus souvent de la manière dont elle est enseignée dans les Eléments ordinaires". Il y a donc des difficultés d'apprentissage, et la faute en incombe à l'enseignement lui même. Clairaut indique immédiatement pourquoi l'enseignement est coupable : "On y débute toujours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes, et de principes préliminaires, qui semblent ne promettre rien que de sec au lecteur. Les propositions qui viennent ensuite ne fixent point l'esprit sur des objets plus intéressants, et étant d'ailleurs difficiles à concevoir, il arrive communément que les Commençants se fatiguent et se rebutent, avant que d'avoir aucune idée distincte de ce qu'on voulait leur enseigner". Ce que dénonce Clairaut est donc bien l'enseignement d'un discours – un grand nombre de définitions, de demandes, etc. –, un discours sans intérêt, qui ne peut pas prendre sens pour le débutant.

(1) cf. Bernard CHARLOT, *Enseigner, Former : Logique des discours constitués et logique des pratiques*, I.N.R.P. Recherche - Formation, à paraître.

Comment intéresser un débutant à la géométrie ? Montrons-lui que la géométrie est un savoir utile. Vieille réponse à une question ancienne, puisque Clairaut évoque les auteurs qui ont "imaginé de mettre à la suite de chaque proposition essentielle, l'usage qu'on peut en faire dans la pratique". Pour lui, ces tentatives sont vouées à l'échec, parce que si elles prouvent l'utilité de la géométrie, elles ne facilitent pas pour autant son apprentissage. Utile ne veut pas dire nécessairement intéressant ou facile. Or Clairaut veut à la fois "intéresser et éclairer les commençants".

Concevoir la géométrie comme un discours ou comme une discipline de service (vocabulaire de notre fin de siècle) ne permet pas de satisfaire à ces deux volontés : intéresser et éclairer. Clairaut nous propose donc une autre façon de concevoir la géométrie : "J'ai pensé que cette science, comme toutes les autres, devait s'être formée par degrés ; que c'était vraisemblablement quelque besoin qui avait fait faire les premiers pas". Selon cette conception, que nous pourrions qualifier de constructiviste, la géométrie est un savoir qui a été construit par étapes et qui a été inventé pour répondre à "un besoin". Ainsi, Clairaut est amené à étudier le processus de construction du savoir géométrique : quelle est l'origine de ce savoir ? comment se construisent les différentes étapes de ce savoir ?

Les réflexions qui guident Clairaut sont de l'ordre d'une épistémologie génétique : "Je me suis proposé de remonter à ce qui pouvait avoir donné naissance à la géométrie ; et j'ai tâché d'en développer les principes, par une méthode assez naturelle, pour être supposée la même que celle des premiers inventeurs, observant seulement d'éviter toutes les fausses tentatives qu'ils ont nécessairement dû faire".

Clairaut recherche donc l'origine de la géométrie en interrogeant l'histoire des mathématiques. Il remarque que le mot géométrie signifie en grec "mesure des terrains", et il rapporte les propos de Proclus de Lycie, un commentateur du Vème siècle des *Eléments* d'Euclide (2) : "les égyptiens, voyant continuellement les bornes de leurs héritages détruits par les débordements du Nil, jetèrent les premiers fondements de la géométrie, en cherchant les moyens de s'assurer exactement de la situation, de l'étendue et de la figure de leurs domaines". Les hommes ont d'abord cherché à mesurer et à partager leurs terres, puis ils ont voulu perfectionner leurs méthodes, et ils en sont arrivés à vouloir connaître "le rapport exact de toutes sortes de grandeurs".

L'ouvrage de Clairaut ne va donc pas suivre l'ordre logique qui régit le discours mathématique, mais l'ordre des "découvertes" qui correspond à la pratique mathématique : "Afin de suivre dans cet ouvrage une route semblable à celle des inventeurs, je m'attache d'abord à faire découvrir aux commençants les principes dont peut dépendre la simple mesure des terrains, et des distances accessibles ou inaccessibles, etc. De là je passe à d'autres recherches qui ont une telle analogie avec les premières, que la curiosité naturelle à tous les hommes, les porte à s'y arrêter [...]". Clairaut mentionne la problématique des distances accessibles et inaccessibles : nous verrons qu'elle joue un grand rôle dans son ouvrage. Notons qu'elle a problablement

(2) PROCLUS DE LYCIE, *Les commentaires sur le premier Livre des Eléments d'Euclide*, page 55.

joué aussi un rôle important dans la constitution historique du savoir géométrique, en nous référant au problème de la hauteur de la pyramide pour le théorème de Thalès (3), et au problème de la distance d'un bateau en mer pour la construction du concept d'angle (4).

2 — Une géométrie problématisée

Clairaut ne veut pas donner à lire des théorèmes,"ces propositions, où l'on démontre que telle ou telle vérité est, sans faire voir comment on est venu à la découvrir" ; il veut donner à chercher et à inventer, et pour cela il veut "occuper continuellement ses lecteurs à résoudre des problèmes". Il nous propose une géométrie problématisée, c'est-à-dire une géométrie où les savoirs ont un sens parce qu'ils sont des instruments pour résoudre des problèmes : "en suivant cette voie, les commençants aperçoivent, à chaque pas qu'on leur fait faire, la raison qui détermine l'inventeur". Le lecteur saura, et saura pourquoi et comment on sait ; il pourra "acquérir plus facilement l'esprit d'invention".

Clairaut termine sa préface en devançant les reproches qu'un lecteur pourrait faire à ses *Eléments de géométrie*, un lecteur du XXème siècle sans doute beaucoup plus que l'un de ses contemporains, comme nous aurons l'occasion de l'expliquer un peu plus loin. Il nous donne encore ici l'occasion d'analyser les relations entre nos conceptions épistémologiques du savoir mathématique et notre conception de l'enseignement. Trois questions sont abordées par Clairaut : la place de la rigueur, la portée des savoirs et le faux problème du concret et de l'abstrait.

Les *Eléments* d'Euclide, ouvrage du IIIème siècle avant J.C., a été tenu jusqu'au XIXème siècle comme un modèle de la rigueur mathématique. Les livres qui composent l'ouvrage d'Euclide se composent d'une suite de définitions, de postulats et de demandes, puis de propositions qui se suivent selon l'ordre logique – chacune d'elles est déduite des axiomes et des propositions qui la précèdent. Les géomètres du XVIIème siècle, qui avaient soif d'inventer, ont adressé beaucoup de critiques aux démonstrations euclidiennes, critiques que Clairaut reprend à son compte : ces démonstrations convainquent mais elles n'éclairent pas le lecteur, elles veulent rendre les résultats certains et non pas les rendre évidents. En particulier, Euclide démontre un bon nombre de propositions qui tombent sous l'évidence, alors que Clairaut n'hésite pas à s'en rapporter "au témoignage des yeux". Pour se justifier Clairaut explique qu'il a remarqué que "ceux qui avaient de la disposition à la géométrie, se plaisaient à exercer un peu leur esprit ; et qu'au contraire, ils se rebutaient, lorsqu'on les accablait de démonstrations, pour ainsi dire, inutiles". Une subtile rigueur peut avoir des conséquences catastrophiques sur l'apprentissage, car elle n'a aucun sens pour le débutant.

Clairaut craint qu'il lui soit reproché de n'avoir pas donné toutes les propositions de la géométrie élémentaire. Mais, son but n'est pas d'établir un catalogue de résultats. Une proposition prend place dans ses

(3) Lire le chapitre de Serres, *Hermes II*, intitulé: *"Ce que Thalès a vu au pied des pyramides"*.

(4) cf. Caveing, *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*.

Eléments de géométrie parce qu'elle intervient comme instrument pour résoudre un problème. Ainsi, le débutant connaît d'emblée la portée et la signification des propositions, et il peut les connecter les unes aux autres dans un rapport de signification et non pas seulement dans un rapport logique de déduction. Clairaut écrit qu'on trouve dans son traité "tout ce qui peut servir à mon projet" et que les propositions qu'il néglige "sont celles qui ne peuvent être d'aucune utilité par elles-mêmes, et qui d'ailleurs ne sauraient contribuer à faciliter l'intelligence de celles dont il importe d'être instruit". Ainsi, une conception constructiviste du savoir mathématique conduit à réfléchir sur la portée des savoirs et à privilégier certains d'entre eux.

Clairaut craint également qu'on confonde son traité avec un traité d'arpentage. Ce n'est pas parce qu'un enseignement est conduit par une problématique, ici la mesure des terrains, que l'on fait des mathématiques concrètes (vocabulaire d'aujourd'hui). Les mathématiques sont abstraites : il y a seulement des degrés d'abstraction. Représenter une situation problématique de mesure de terrains par une figure est déjà un premier degré d'abstraction. Clairaut écrit : "la mesure des terrains n'est pas l'objet de ce livre, [...] elle me sert seulement d'occasion pour faire découvrir les principales vérités géométriques". Il ajoute qu'il aurait pu se rapporter à l'histoire de la physique ou de l'astronomie, mais alors "la multitude des idées étrangères, dont il aurait fallu s'occuper, aurait comme étouffé les idées géométriques, auxquelles je devais fixer l'esprit du lecteur".

3. Une conception instrumentaliste du savoir

Contrairement à Euclide, qui donne au début de chacun des livres des *Eléments* une longue liste de définitions, Clairaut n'introduit les concepts qu'au fur et à mesure, au moment où ces concepts deviennent nécessaires à la résolution d'un problème. De même, l'impératif qui dicte l'ordre d'introduction des propositions est l'ordre déductif chez Euclide, alors que chez Clairaut, il se situe dans la problématique choisie, c'est-à-dire dans la mesure des terrains. Les concepts et les savoirs sont construits comme réponses à des questions : ce sont des instruments pour résoudre des problèmes.

Ainsi, Clairaut définit à la troisième page une ligne perpendiculaire à une autre comme réponse à un problème de mesure. Cette définition est nécessitée par le besoin de mesurer la distance d'un point à une ligne : "Un homme, par exemple placé en D sur le bord d'une rivière, se propose de savoir combien il y a du lieu où il est à l'autre bord AB. Il est clair que, dans ce cas, pour mesurer la différence cherchée, il faut prendre la plus courte de toutes les lignes droites DA, DB, etc., qu'on peut tirer du point D à la droite AB. Or il est aisé de voir que cette ligne la plus courte dont on a besoin, est la ligne DC qu'on suppose ne pencher ni vers A, ni vers B. C'est donc sur cette ligne, à laquelle on a donné le nom de perpendiculaire, qu'il faut porter la mesure connue, pour avoir la distance DC, du point D, à la droite AB" (5) (cf. fig. 1).

(5) CLAIRAUT, *Eléments de géométrie*, page 3.

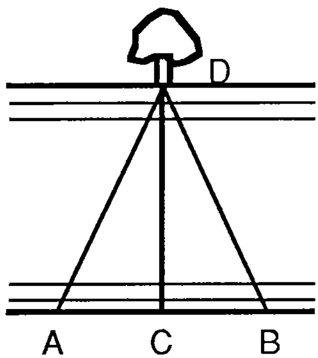

Fig. 1

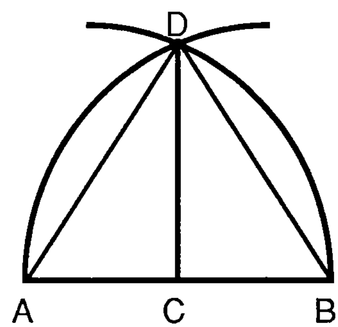

Fig. 2

Clairaut donne comme définition d'une perpendiculaire à une ligne : "une ligne qui tombe sur une autre sans pencher sur elle d'aucun côté". Cette définition prend sens dans la situation où Clairaut fait intervenir la notion de perpendicularité, mais cette définition est également opératoire dans les autres problèmes posés ensuite. Ainsi, il est nécessaire de savoir élever du point C d'une droite AB la perpendiculaire CD à AB (fig.2). Clairaut explique que si C est à égale distance de A et de B, puisque la droite CD ne penche d'aucun côté "il est clair que chacun des points de cette ligne sera également éloigné de A et de B". Ceci lui permet de proposer la construction au compas de la perpendiculaire CD – construction qui permet de trouver D sans tâtonner –, car "le tâtonnement ne satisfait pas l'esprit qui veut une méthode qui l'éclaire".

Après la perpendiculaire, Clairaut définit et construit les figures du rectangle et du carré. Ceci le conduit à la construction des ouvrages, tels que remparts, canaux et rues, où il est besoin de mener des lignes parallèles, qu'il définit comme "des lignes dont la position soit telle que leurs intervalles aient partout pour mesures des perpendiculaires de même longueur" ([6]). La construction d'une parallèle à une ligne passant par un point donné se ramène donc à la construction d'un rectangle. Ainsi, la signification de la notion de perpendicularité est entièrement liée à l'idée de distance, et le rectangle est le moyen d'opérer des équidistances.

La figure du triangle intervient un peu plus loin lorsque l'on se trouve dans une situation où l'on doit mesurer une surface rectiligne ABCDE qui, elle-même, peut être prise comme l'approximation d'une ligne courbe limitant un contour de terrain (fig.3). Dans ce cas, "on voit que, malgré l'infinie variété des figures rectilignes, on peut les mesurer toutes de la même façon,

(6) CLAIRAUT, op. cit., page 10.

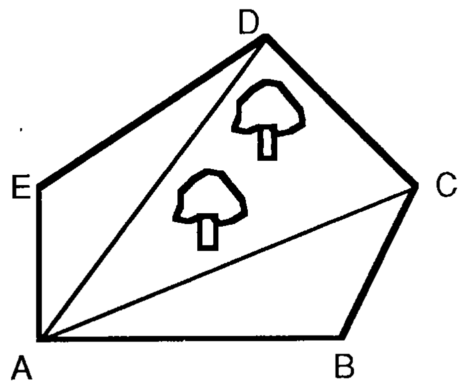

Fig. 3

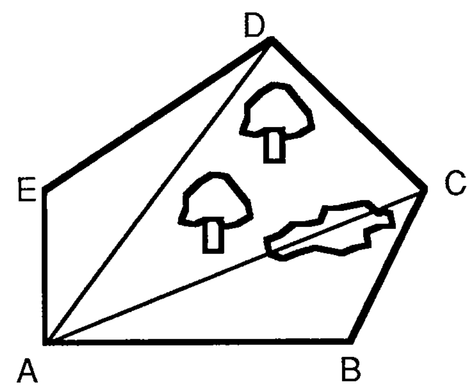

Fig. 4

en les partageant en figures de trois côtés nommées communément triangles ; ce qu'on fera de la manière la plus simple et la plus commode, si, d'un point quelconque A du contour de la figure ABCDE, on mène les lignes droites AC, AD, etc." (7).

Le concept d'angle est introduit lorsque la mesure des triangles constituant la surface ABCDE se trouve être empêchée : "Mais que dans l'espace ABCDE, il se trouve quelque obstacle, une élévation par exemple, un bois, un étang, etc. qui empêche qu'on ne mène les lignes dont on aura besoin, que faudra-t-il faire alors ? Quelle méthode faudra-t-il suivre pour remédier à l'inconvénient du terrain ?" (8) (fig.4). Nous trouvons ici la problématique des distances inaccessibles.

Le problème conduit naturellement à recourir à des triangles "égaux et semblables". Ainsi, supposons que l'on ne puisse mesurer que deux des trois côtés d'un triangle ABC, les deux côtés AB et BC par exemple, "il est clair qu'avec cela seul, on ne pourrait pas déterminer un second triangle égal et semblable à ABC". Si on prend DE égal à BC et DF égal à BA, on ne sait quelle position donner à l'une des deux droites relativement à l'autre (fig.5). L'angle va être la réponse au problème : "Pour lever cette difficulté, la ressource qui se présente est simple : on fait pencher DF, de la même manière sur DE, que AB penche sur BC ; ou, pour s'exprimer comme les géomètres, on donne à l'angle FDE la même ouverture qu'à l'angle ABC". Clairaut donne alors la définition de l'angle : "Un angle est l'inclinaison d'une ligne sur une autre" (9).

4 — Signification du savoir et sens de la démonstration

Pour Clairaut, savoir, c'est aussi savoir pourquoi et comment l'on sait – c'est-à-dire

(7) Clairaut, op. cit., page 14.

(8) Clairaut, op. cit., page 27.

(9) Clairaut, op. cit., page 29.

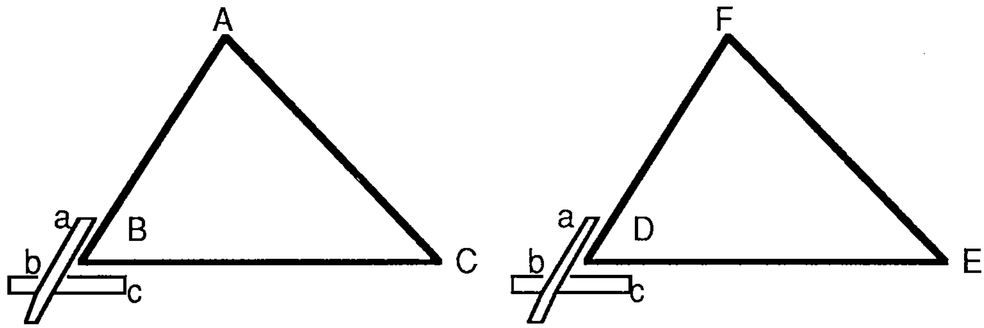

Fig. 5

que le savoir implique le processus par lequel on sait. Pourquoi une connaissance devient-elle l'objet de recherche du géomètre ? Comment le géomètre parvient-il à la vérité ? Comment le géomètre invente-t-il son savoir ? Ainsi, pourquoi et comment le géomètre sait-il que la somme des angles d'un triangle égale deux angles droits ? Pour Clairaut, le savoir du géomètre est un moyen de résoudre des problèmes : son lecteur apprend donc quel problème amène à s'interroger sur la somme des angles d'un triangle (le pourquoi), et quelles investigations conduisent à construire la parallèle à l'un des côtés du triangle (le comment). Le lecteur peut faire sien le savoir : il est éclairé.

La proposition concernant la somme des angles d'un triangle intervient comme un moyen de vérifier des mesures d'angle. Le problème proposé par Clairaut est de trouver un moyen simple et efficace de s'assurer que les mesures des trois angles d'un triangle sont exactes. Si l'on considère un triangle ABC, Clairaut explique d'abord que l'on "sent que la grandeur" de l'angle C doit résulter de celles des angles A et B, car lorsque l'on change celles-ci, les droites AC et BC changent et l'angle C aussi. Pour trouver comment l'on peut conclure la grandeur de l'angle C à partir de celles des angles A et B, Clairaut suppose que BC tourne autour du point B vers la droite BE (fig.6). Il écrit alors : "Il est clair que pendant que BC tournerait, l'angle B s'ouvrirait continuellement ; et qu'au contraire, l'angle C se resserre de plus en plus ; ce qui d'abord pourrait faire présumer que, dans ce cas, la diminution de l'angle C égalerait l'augmentation de l'angle B, et qu'ainsi la somme des trois angles A, B, C, serait toujours la même, quelle que soit l'inclinaison des lignes AC, BC, sur la ligne AE" ([10]).

Ce raisonnement, qui s'appuie sur le mouvement d'une droite, mérite quelques

(10) CLAIRAUT, op. cit., page 64.

commentaires. La géométrie grecque est, hormis l'usage de la superposition dans la proposition IV du Livre I des *Eléments* d'Euclide et quelques travaux d'Archimède, une géométrie statique. Le bénéfice de l'introduction du mouvement dans les raisonnements géométriques apparaît dans les recherches du XVIIème siècle. D'une part, le mouvement apparaît dans certaines méthodes proposées par les géomètres pour "inventer" des quadratures et des tangentes. D'autre part, le changement continu d'une figure est au cœur des raisonnements de la géométrie perspective, dans les travaux de Desargues ou de Pascal. Dans le traité de Clairaut, l'idée de faire tourner la droite BC est naturelle puisqu'il s'agit de raisonner sur des angles conçus comme des inclinaisons. Ce qui paraît bien moins naturel et évident, c'est le sentiment que l'angle B augmente de ce que l'angle C diminue, c'est-à-dire la conservation de la somme des angles du triangle.

Cependant, lorsque la droite BC arrive à la position limite où elle est parallèle à AC, ce résultat pourra être démontré. Clairaut écrit que "cette induction présumée porte avec elle sa démonstration" et il mène la droite ID parallèle à AC (fig.7). Ce faisant, Clairaut nous apprend comment le géomètre a l'idée de construire cette parallèle au côté AC, idée-clé qui permet de démontrer la proposition.

Jusque là, aucun résultat concernant angles et parallélisme n'a été énoncé. Mais Clairaut va affirmer les égalités des angles de manière fort simple. En effet, les droites AC et IB sont parallèles donc également inclinées sur CBO, ce qui assure l'égalité

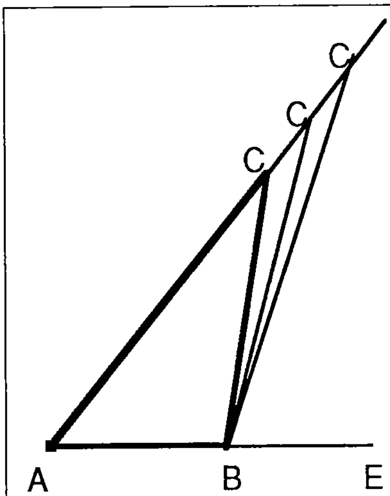

Fig. 6

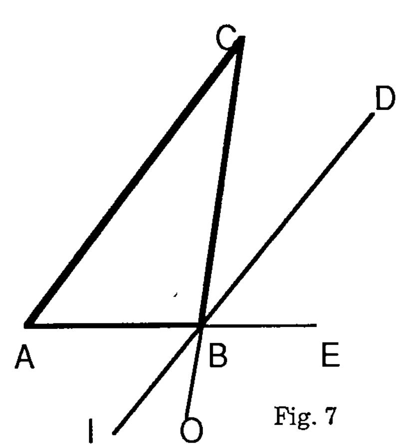

Fig. 7

des angles IBO et ACB, et la droite ID est pareillement inclinée sur CO d'un côté et de l'autre, ce qui assure l'égalité des angles CBD et IBO. Clairaut introduit à cet endroit la définition des angles alternes : "les angles renversés que forme de part et d'autre une ligne qui tombe sur deux parallèles". Il conclut donc l'égalité des angles alternes en s'appuyant sur la définition de l'angle comme inclinaison de deux droites. Ainsi, les angles ACB et CBD sont égaux. De même, les angles DBE et CAE sont égaux. Ceci permet de conclure que les trois angles du triangle "pourraient être mis à côté les uns des autres", de sorte à égaler deux angles droits.

Clairaut ne donne pas, comme Euclide, une liste d'axiomes en début d'ouvrage. Rappelons que, selon la conception aristotélicienne, un axiome est une proposition indémontrable, première et immédiate. Le caractère d'évidence permet donc de qualifier un axiome, mais cet appel à l'évidence intervient en amont du corpus géométrique. Ainsi, le postulat des parallèles d'Euclide permet de démontrer l'égalité des angles alternes, sans faire appel à l'évidence ou à la définition de l'angle comme inclinaison – définition que donne Euclide sans jamais la faire opérer dans des démonstrations ([11]). Tandis que Clairaut fait appel implicitement à l'évidence dans le corps même de la démonstration.

Cet appel à l'évidence n'est pas du tout choquant pour un mathématicien du XVIII^ème siècle, auquel il ne paraît vraiment pas raisonnable de démontrer des résultats qui sont plus évidents que les axiomes qui permettent de les établir. En effet, l'énoncé euclidien du postulat des parallèles – si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits" –, peut sembler moins évident que l'égalité des inclinaisons entre une droite et deux parallèles. Comme l'écrit Clairaut dans sa préface : "tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance, est aujourd'hui en pure perte, et n'est propre qu'à obscurcir la vérité, et à dégoûter les lecteurs". Nous voyons, encore ici, que l'enseignement proposé par les *Eléments de géométrie* de Clairaut s'accorde avec des conceptions épistémologiques qui concernent, cette fois, la démonstration.

Les conceptions épistémologiques de Clairaut nous invite à situer ses *Eléments de géométrie* dans l'histoire des mathématiques, et plus généralement dans l'histoire de la pensée mathématique.

5 — La spécificité des Eléments de géométrie de Clairaut

Le projet de Clairaut, nous l'avons bien vu, est clairement didactique. Ceci ne doit pas nous le faire ranger à part des autres "*Eléments de géométrie*" écrits depuis Euclide : tous ces traités ont pour objet d'enseigner des savoirs qui sont répertoriés dans les fameux *Eléments*. Ces *Eléments* d'Euclide avaient d'ailleurs, eux aussi probablement, une fonction d'enseignement. En effet, ce traité qui organise les savoirs des géomètres grecs, est appelé dans les *Commentaires* de Proclus de Lycie : *Enseignement des Eléments* – comme d'autres traités qui auraient été écrits par des géomètres grecs ([12]). Nous devons situer plutôt

(11) Sur la comparaison entre les démonstrations d'Euclide et de Clairaut, lire Barbin, *Trois démonstrations pour un théorème élémentaire de géométrie. Sens de la démonstration et objet de la géométrie.*

(12) Proclus de Lycie, op. cit., page 67.

l'originalité de Clairaut dans sa tentative de mettre en accord une certaine conception du savoir mathématique avec un enseignement de la géométrie élémentaire.

Cette conception du savoir trouve ses origines dans les pratiques du savoir mathématique au XVIIème siècle. Nous avons dit que les géomètres du XVIIème siècle ont adressé des critiques aux *Eléments* d'Euclide. Ces critiques visent un savoir figé, qui commande l'assentiment, mais qui ne permet pas d'inventer – "une sagesse de professeurs" écrit Francis Bacon. Les géomètres du XVIIème siècle recherchent des méthodes d'invention, c'est-à-dire des méthodes qui permettent de résoudre des problèmes. Ainsi, la géométrie de Descartes propose une méthode pour résoudre tous les problèmes de géométrie en les ramenant à la résolution d'une équation algébrique.

Pour Descartes, savoir c'est aussi savoir comment et pourquoi on sait : l'intérêt est donc porté sur la résolution méthodique des problèmes et sur le processus de construction des connaissances. Dans ses *Eléments de géométrie ou de la mesure du corps* de 1685, Bernard Lamy écrit que l'on n'étudie la géométrie "que pour exercer l'esprit et le former en cherchant avec méthode quelque nouveau théorème" ([13]). Un des chapitres de son ouvrage est consacré à la méthode ; il y montre comment nous pouvons étendre et organiser nos savoirs autour d'une problématique, en prenant l'exemple de la section des triangles. Nous voyons donc, chez un disciple de Descartes, comment une conception du savoir comme processus peut conduire à une démarche similaire à celle de Clairaut.

L'intérêt des géomètres du XVIIème siècle pour "l'art d'inventer" les conduit à un relatif mépris pour la partie démonstrative de l'activité mathématique. Ainsi, Pascal écrit à un de ses correspondants : "je sais trop combien c'est peu de choses de démontrer ce qu'un autre a énoncé" ([14]). Le succès des méthodes du XVIIème siècle trouve son aboutissement, à la fin du siècle, avec la naissance du calcul infinitésimal ([15]). Les mathématiciens du XVIIIème siècle vont se précipiter sur les traces de leurs prédécesseurs, et s'attacher surtout à produire des résultats nouveaux au mépris des formes. Ainsi, le mathématicien Josef Maria Hoene-Wronski, auquel la Commission de l'Académie des Sciences de Paris reprochait un manque de rigueur dans un article, répliquera qu'il s'agissait là de "la pédanterie de ceux qui préfèrent les moyens à la fin" ([16]). Les mathématiciens vont même jusqu'à tourner en dérision la rigueur des Grecs : "De telles subtilités dont les Grecs se souciaient nous n'avons plus besoin" écrit Lacroix ([17]). Nous voyons que l'attitude de Clairaut vis-à-vis de la démonstration n'est pas à mettre au compte d'un quelconque "relâchement didactique", mais dans un profond changement de la pensée de la communauté scientifique.

Les mathématiciens du XVIIIème siècle sont pleinement conscients du besoin de démontrer. Mais, derrière ce besoin de démontrer il y a surtout le besoin d'avoir confiance dans les résultats obtenus, et cette confiance ne se situe plus dans la logique du discours mathématique. D'une part, après le succès de la méthode cartésienne, les mathématiciens accordent un caractère de rigueur à la manipulation réglée des symboles. D'autre part, les rela-

(13) LAMY, *Eléments de géométrie ou de la mesure du corps*, Livre cinquième, page 256.

(14) PASCAL, Lettre à Carcavi, *Œuvres complètes*, p. 185.

(15) cf. BARBIN et CLERO, *La naissance du calcul infinitésimal au XVIIIe siècle.*

(16) KLINE, *Mathematical thought from Ancient to Modern times*, p.619.

(17) LACROIX, préface du volume I du *Traité du calcul différentiel et intégral*, p. 11.

tions très étroites entre mathématiques et physique conduisent les mathématiciens à s'assurer de la valeur de leurs pratiques mathématiques en contrôlant l'exactitude physique des résultats. Le XVIIIème siècle, que les siècles suivants dédaigneront pour son manque de rigueur, est un siècle audacieux qui a produit plus de résultats qu'aucun autre, et qui, de ce point de vue, pourrait être qualifié d'âge héroïque des mathématiques ([18]).

La démarche de Clairaut doit être replacée dans le contexte scientifique de son époque, pour comprendre sa volonté de donner au dé-butant "l'esprit d'invention" aussi bien que sa légitimation du recours au "témoignage des yeux". Le projet de Clairaut – construire les savoirs de la géométrie élémentaire à partir de problèmes – s'inscrit dans l'esprit d'un siècle qui s'est attaché à augmenter les connaissances mathématiques plutôt qu'à les fonder.

6 — Conception épistémologique du savoir et enseignement

Si nous revenons maintenant à la remarque du stagiaire de C.P.R. lisant la préface de Clairaut – "j'ai l'impression de lire les commentaires des nouveaux programmes de collège" –, nous pouvons d'une certaine façon en apprécier la pertinence. En effet, Clairaut y propose un enseignement partant de problèmes pour construire des connaissances, et les nouveaux programmes mettent l'accent sur les activités des élèves. Mais Clairaut indique aussi quelles conceptions du savoir géométrique guident ses choix didactiques. En particulier, il s'oppose de façon explicite au modèle des *Eléments* d'Euclide. Ce faisant, il nous met devant une alternative, dont nous pensons qu'elle est déterminante sur le plan didactique. La première branche de cette alternative est celle que nous trouvons chez Euclide : le savoir géométrique est inscrit dans un discours constitué, il prend cohérence dans ce discours. La seconde branche est celle que nous propose Clairaut : le savoir est construit à partir d'une problématique, il prend sens dans des pratiques.

Les pratiques enseignantes sont étroitement liées aux conceptions épistémologiques implicites de l'enseignant. Que se passe-t-il, par exemple, si un enseignant qui considère le savoir comme un discours, est invité à enseigner le savoir comme un processus ? Beaucoup de malentendus et de malaises, que nous pouvons essayer d'analyser à partir de notre lecture des *Eléments de géométrie* de Clairaut.

Le premier point concerne celui du rôle de l'évidence et de la rigueur. Quand le savoir se construit à partir de l'activité de l'élève qui résout des problèmes, le sentiment d'évidence doit être pris en compte et la rigueur doit prendre sens à partir de cette activité. Notons aussi que, dans ce cas, les erreurs d'un élève ne sont plus des fautes, mais des moments incontournables dans la construction des connaissances. Un enseignant pour lequel la rigueur se situe dans la clarté du discours mathématique sera tenté d'indiquer à ses élèves les "canons de la rigueur" comme préalables à leurs activités : première difficulté.

Le second point concerne ce que nous appelons les "contenus de savoir". S'il importe d'abord de développer les capacités de recherche des élèves, le nombre de

(18) Morris KLINE conçoit de cette façon le XVIIIe siècle dans son ouvrage intitulé *Mathematical thought from Ancient to Modern times.*

connaissances effectivement construites par les élèves peut être voulu modeste. D'autant que, dans ce cas, il semble tout à fait déraisonnable de vouloir enseigner des savoirs qui ne prendraient sens dans aucun problème. Mais, un enseignant qui voit le savoir mathématique comme un produit et non comme un processus jugera son enseignement d'autant meilleur qu'il vise un maximum de connaissances : deuxième difficulté.

Le troisième point concerne la signification des activités des élèves. Les problématiques à partir desquelles les élèves vont construire des savoirs seront différentes selon qu'il s'agit d'un enseignement de 6ème ou de terminale. Dans l'enseignement en collège, les savoirs à construire ne peuvent parfois prendre sens que dans des situations non mathématiques, parce que justement, il s'agit de construire un certain type de rationalité. Il ne s'agit pas de faire des mathématiques concrètes, ni même de passer du concret à l'abstrait, mais de construire un savoir en structurant le réel. Un enseignant qui ignore cette étape de construction aura l'impression de faire du "bricolage" sans rapport avec ce que sont les mathématiques : troisième difficulté.

Le quatrième point concerne la signification des concepts et des savoirs mathématiques. Dans une conception instrumentaliste, les savoirs prennent sens à partir des problèmes qu'ils permettent de résoudre. Ainsi, à la question "qu'est-ce qu'un angle ?", nous nous demanderons d'abord, dans quelles situations l'angle peut intervenir comme réponse à un problème, constituant ainsi un, ou des, contextes de signification à l'angle. Nous dirons qu'un élève sait ce qu'est qu'un angle, s'il sait rendre opératoire ce concept dans un problème. Alors que, dans la logique des discours constitués, la question appelle une définition. Dans ce cas, un élève qui ne connaît pas la définition ne sait pas ce que c'est qu'un angle : quatrième difficulté ... pour l'élève d'abord.

Le cinquième point concerne la signification de la démonstration. Dans une conception constructiviste du savoir mathématique, élaborer une démonstration ce n'est pas seulement déduire, c'est aussi, et dans le même mouvement, construire des objets mathématiques et construire la rationalité mathématique elle-même. Démontrer, ce n'est pas seulement savoir, c'est aussi ancrer ce savoir dans une certitude parce que l'on sait comment et pourquoi l'on sait. Mais si le savoir mathématique se réduit à un discours, alors la démonstration se réduit à un texte qui doit respecter les formes du raisonnement déductif, voire les règles de la logique. Ramener l'apprentissage de la démonstration à celui du raisonnement déductif efface toute trace des questionnements, des zones d'instabilité, des tensions qui sont le prélude au désir et au besoin de démontrer : cinquième difficulté.

Toutes ces difficultés donnent naissance à des malentendus et à des malaises. Nous avons montré qu'elles ont comme origine un décalage profond entre la conception épistémologique du savoir de l'enseignant et celle sous-jacente aux nouveaux programmes. Aussi, si les nouveaux programmes de mathématiques de collège et de lycée reposent sur une conception constructiviste du savoir mathématique, cette conception ne devrait-elle pas être plus explicitée pour être mieux partagée ?

Explicitée. La réforme des mathématiques modernes avait comme fondement une conception axiomatique et structurelle du savoir mathématique que l'on pourrait résumer par cette formule : la mathématique est un langage abstrait et universel. Cette conception épistémologique était explicite dans les propos des promoteurs de la réforme – sans que ces derniers se rendent compte que l'utilisation de "méthodes actives" ne pourraient empêcher que l'enseignement d'une telle mathématique à des débutants ne devienne formaliste et dogmatique. Les enseignants d'aujourd'hui sont les enseignants ou les élèves d'hier, il serait donc souhaitable que les conceptions épistémologiques qui guident les programmes d'aujourd'hui soient explicites, y compris dans leur opposition à d'autres conceptions.

Partagée. L'enseignement des nouveaux programmes suppose une modification des pratiques enseignantes – réaction par rapport aux erreurs des élèves, institutionnalisation des savoirs construits, etc. –, aussi semble-t-il grandement souhaitable que la référence à une autre conception du savoir soit pour eux autre chose qu'un texte ou un exposé. La mise en place des nouveaux programmes aurait mérité une formation des enseignants de mathématiques au moins autant, si ce n'est plus, importante que celle qu'avait occasionnée la réforme des mathématiques modernes. Je pense surtout à une formation visant, non pas des techniques pédagogiques, ou des concepts de la didactique, mais une connaissance épistémologique des savoirs enseignés – quels problèmes permettent-ils de résoudre ? – et du savoir mathématique – qu'est-ce que l'activité mathématique ?

Je reviens à la question qui nous était posée au Colloque inter-Irem Géométrie pour formuler une autre question : "Peut-on envisager un enseignement de la géométrie qui serait conduit par des problématiques, sans se demander quelle conception du savoir suppose un tel enseignement et quels champs de problèmes peut amener à construire les savoirs géométriques enseignés ?". Lire Clairaut.

BIBLIOGRAPHIE

BARBIN et CLERO, *La naissance du calcul infinitésimal au XVIIème siècle*, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, n°33, Belin, réédition 1990.

BARBIN, Trois démonstrations pour un théorème élémentaire de géométrie. Sens de la démonstration et objet de la géométrie, in La démonstration mathématique dans l'histoire, I.R.E.M. de Lyon, 1990.

BARBIN, Les effets pervers de la réforme des mathématiques modernes, in Société Française, n°33, déc.1989.

CAVEING, La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque, Université de Lille III, 1982.

CHARLOT, *Enseigner-Former : Logique des discours constitués et logique des pratiques*, I.N.R.P. Recherche-Formation, à paraître.

CLAIRAUT, *Eléments de géométrie*, réédition Siloë, Laval, 1986.

KLINE, *Mathematical thought from Ancient to Modern times*, Oxford University Press, 1972.

LACROIX, *Traité du calcul différentiel et intégral*, 2ème édition, 1810-1819.

LAMY, *Eléments de géométrie ou de la mesure du corps*, 1685.

PASCAL, *Œuvres complètes*, Le Seuil, Paris, 1963.

PROCLUS DE LYCIE, *Les commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide*, réédition Blanchard, Paris, 1948.