REPERES - IREM . n°4 - juillet 1991

POUR UNE TRANSFORMATION DE LA DIDACTIQUE DES TRANSFORMATIONS

Claude SLOWICK
Irem de Lille

I - AU COMMENCEMENT

Pourquoi écrit-on un texte sur les transformations géométriques ? Pour être dans le vent ? Pour envenimer les débats ? Pour dire du mal des programmes et des programmateurs ? Sans doute ... mais encore ...

Pour moi cela commence dans mes classes quand je constate que des élèves de 3ème à l'occasion du théorème de Pythagore ne savent pas tracer les carrés construits sur les côtés, cela continue lorsqu'en 4ème une classe entière de "bons élèves" affirment que la diagonale d'un rectangle est un axe de symétrie de ce rectangle. Alors peut-on se satisfaire des arguments péremptoires : handicap socio-culturel, télévision, manque de moyen, ... ? N'y aurait-il pas des travers fondamentaux dans notre manière d'envisager l'apprentissage de la géométrie ? Sans doute les notions géométriques doivent-elles se construire contre les intuitions premières, contre les perceptions naïves, mais de là à penser qu'elles doivent se construire à côté, il y a un espace que je ne veux plus franchir. Je ne peux pas accepter qu'un enfant de cinq ans sache dire à propos : "ceci est un carré" et qu'un élève de treize ans soit dans l'impossibilité d'annoncer : "la figure que je viens de tracer n'est pas convenable".

Bien sûr les causes de l'inefficience de notre géométrie mondaine sont multiples, épuiserai-je ici le sujet ? Il y aurait beaucoup à dire sur l'organisation géométrique des salles de classe. Le vecteur pédagogique n'y a qu'une dimension. La parole exténuée du maître pèse même dans les silences. Mais que le lecteur ne se méprenne pas : il ne s'agit pas de construire un discours savamment agencé. Mon objectif est de questionner les représentations usuelles à propos des transformations et de montrer qu'elles induisent des pratiques, ... dont on connaît les résultats !

Les programmes sont des concrétisations de ces représentations, ils ont l'avantage d'être écrits, je m'appuierai donc sur eux. J'essaierai d'indiquer des pistes pour les améliorer, bien que je ne croie pas un seul instant en la possibilité de modifier positivement les pratiques pédagogiques par l'intermédiaire des programmes.

II - CONTENU ACTUEL DES PROGRAMMES

sixième :	symétrie orthogonale,
cinquième :	symétrie centrale,
quatrième :	rotation, translation,
troisième :	agrandissement, composition des translations.

Au cours des trois premières années au collège on empile les transformations, en 3ème on peut penser qu'il s'agit de tout reprendre avec un autre point de vue. Est-on bien sûr que ce sera effectivement réalisé ainsi ?

A l'usage, il est apparu qu'en 5ème les élèves ne savaient quasiment plus rien de la symétrie orthogonale. Certains enseignants diront, au moment de la répétition accélérée du cours de l'année précédente, qu'ils réinvestissent les acquis de 6ème, mais nul ne niera que la procédure d'apprentissage pour la symétrie centrale en 5ème est de la même nature que celle pour la symétrie orthogonale en 6ème, et cette procédure est reconductible pour la rotation en 4ème. Cela voudrait-il dire qu'un élève de 6ème est intellectuellement semblable à un élève de 4ème ? Il y a augmentation quantitative des connaissances mais pas qualitative. Je dois concéder que la notion d'agrandissement traitée comme transformation spatiale ferait dérailler mon analyse, mais encore faudra-t-il constater ce que cette notion est devenue dans la pratique. Ne s'est-elle pas fait raplatir par nos démocrates pédagogues chevronnés ?

Il faut aussi s'étonner que la coupure *géométrie plane / géométrie dans l'espace* soit aggravée par l'étude des transformations. Il y a tout de même une répugnance à considérer des transformations spatiales. La réalisation matérielle d'une symétrie orthogonale en sortant du plan (pliage) contient donc de l'interdit, et l'on ne s'étonnera pas de l'utilisation préférentielle (mais maladroite) du papier calque, préservant la planéité de la feuille. Une feuille pliée conserve toujours une trace de pliure, de souillure devrais-je dire, elle devient donc impropre à la géométrie plane. On constate ainsi ce fait étonnant : utilisation du papier calque pour la symétrie orthogonale et pas pour la symétrie centrale alors qu'une inversion simplifierait la mise en œuvre de l'expérimentation. Mais continuons à ramper sur nos plans, insectes débiles que nous sommes !

III - QUELQUES EXERCICES POUR ELEVES ... ET POUR PROFESSEURS

Voici une série d'exercices groupés par deux (cf. encadrés des pages 65 et 66), il s'agira à chaque fois de se poser les deux questions suivantes :

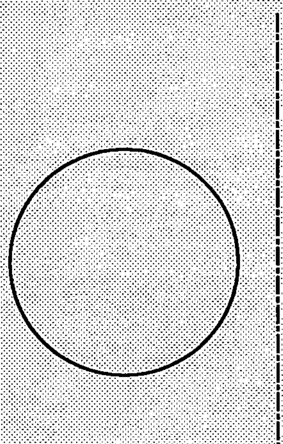
1) Lequel des deux sera le mieux réussi par les élèves ?

2) Comment expliquez-vous votre réponse à la première question ?

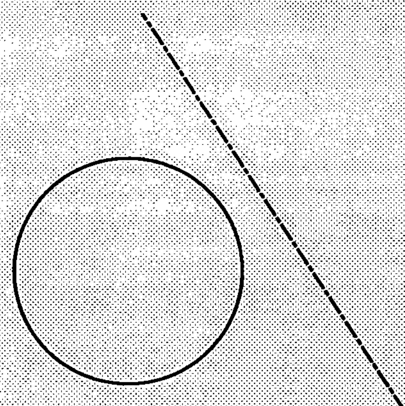
Encadré 1 : *premier groupe d'exercices.*

Dessiner le symétrique du cercle par rapport à la droite.

a)

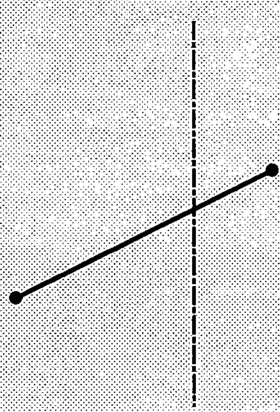


b)

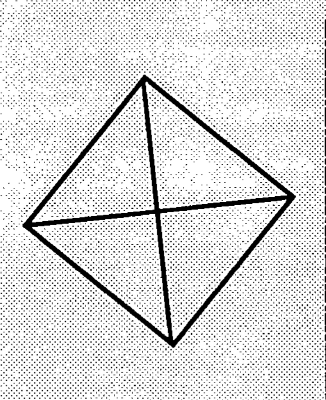


Encadré 2 : *deuxième groupe d'exercices.*

a) Dessiner le symétrique du segment par rapport à la droite.

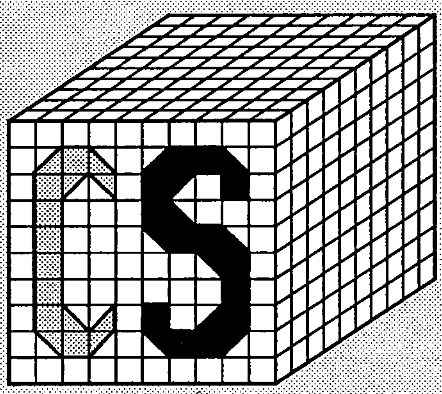


b) Dessiner le symétrique du carré muni de ses diagonales par rapport à la droite.

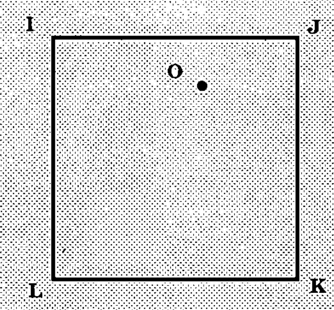


Encadré 3 : *troisième groupe d'exercices.*

a) Reporter les lettres inscrites sur la face frontale sur les deux faces latérales.

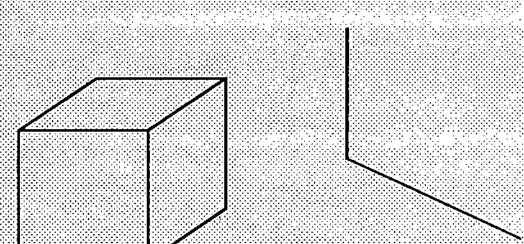


b) Transformer le carré IJKL par la symétrie centrale de centre O.

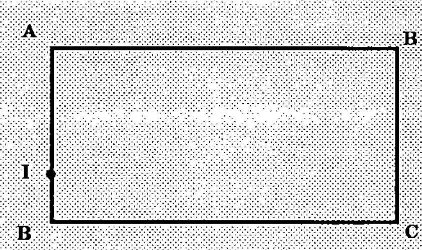


Encadré 4 : *quatrième groupe d'exercices.*

a) Dessiner l'ombre solaire du cube.



b) Dessiner la projection de I sur (AC) parallèlement à (BC).



Le problème que je veux poser par ces comparaisons, c'est qu'il y a des difficultés, des succès, bien connus de tous mais sur lesquels on ne réfléchit pas. Beaucoup d'enseignants savent que la verticalité de l'axe de symétrie est un facteur déclenchant la réussite, mais quel travail est fait sur cela ?

Comment se fait-il qu'un paramètre reconnu comme déterminant dans les situations d'apprentissage disparaisse des programmes, des livres et des pratiques ? Pour ma part je vois au moins deux raisons : d'abord la notion de verticale renvoie à la notion de pesanteur et privilégie une direction pour des raisons physiques, or pour beaucoup d'enseignants il s'agit justement de ne pas faire de physique, mais de la géométrie, pure, subtile et légère ; ensuite il y a le fait que la verticalité renvoie inévitablement à l'espace, et nous n'acceptons pas cette contamination, nous effectuons des symétries orthogonales planes et nous ne souhaitons pas sortir du plan. La traversée de l'axe de symétrie renvoie au même genre de problème. Il y a un travers fondamental dans notre manière de concevoir l'apprentissage des transformations et cela est sans doute vrai pour toute la géométrie.

IV - LES NIVEAUX DE MATURATION DU CONCEPT DE TRANSFORMATION

Face à toutes ces difficultés et incohérences, j'ai tenté de redonner aux transformations leur complexité dynamique. Je leur ai fait réintégrer le monde des objets, un monde dans lequel l'être humain peut encore agir. J'ai la prétention démesurée que cette manière de concevoir la géométrie rend le cours humain puisqu'il parle de l'homme à l'homme, et je suis maintes fois interpellé par des instances ébahies qui s'interrogent sur mes manières de concevoir la géométrie et l'enseignement. Il ne devrait pas être utile de rappeler que l'individu unique et particulier est toujours au cœur même du processus d'apprentissage ; ceux qui croient être modernes en parlant d'humaniser l'enseignement nous trompent. Et c'est bien ce que l'on me reproche : d'être incompréhensible parce qu'humain et en même temps on me demande d'être humain pour être compris. Nœuds de contradictions bien éloignés de notre sujet ! Croyez-vous ? En tout cas c'est bien à secouer de tels nœuds que nous passons le plus clair de nos forces. La suspicion pèsera longtemps, sur tous ceux qui prétendent que l'enseignement peut être amélioré par une réflexion.

1er niveau de maturation :

Transformation et objets : étant donné une feuille de papier, je la chiffonne, sa forme change, je la transforme. Pour faire plus sérieux je pourrais parler de l'emboutissage des tôles : ne va-t-on pas jusqu'à parler de la mémoire d'un matériau ? Dans ces transformations nous constatons qu'il y a deux espaces, il y a l'espace des états initiaux et l'espace des résultats ; une transformation physique ne peut se penser que dans une duplication de l'espace, de plus il y a nécessairement un "avant la transformation" et un "après la transformation" ; la transformation a une durée, une durée irréversible, autant dire que le temps y joue un rôle des plus complexes. La matérialité de la transformation charrie tout un tas d'attributs, dont il sera difficile de rendre compte ; la matière devient un lieu de tension. Pour expliquer la torsion d'une poutre, est-il inutile de mimer sa douleur ? Les contraintes ne seraient-elles pas vécues de l'intérieur dans le corps propre de l'opérateur ?

2ème niveau de maturation :

Tout le monde accepte que certains objets existent sous plusieurs exemplaires, on peut donc garder un exemplaire d'une feuille et en chiffonner une autre. On se trouvera donc en présence simultanée d'un objet et de son transformé. Il semble, pour cette raison, que la temporalité des transformations au niveau 1 soit le caractère que l'on puisse abandonner en premier. Je pointe que l'espace reste cependant hétérogène, il y a deux lieux distincts, il y a un côté du miroir et l'autre, un objet et son ombre. Il n'est pas possible d'établir simplement des liens entre ces deux espaces, ainsi la propriété de la symétrie centrale qui annonce "qu'une droite se transforme en une droite parallèle" n'est pas formulable à ce niveau.

3ème niveau de maturation :

Action sur place à propos d'objets : si je dématérialise un peu ces objets, je ne suis plus loin des figures, au sens grec du terme, sans doute, même si ce sens a été aujourd'hui oublié et réinventé. Dématérialiser ? Qu'est-ce à dire ? Je ne sais pas précisément, mais c'est quelque chose que nous faisons lorsque nous disons d'un triangle en fer qu'il est pareil qu'un triangle en carton, et que nous les reportons par la même figure sur une feuille de papier ; oui cette définition n'est pas très satisfaisante, elle permet cependant à tout le monde d'agir et elle me suffira. Ces figures existent, je veux dire par là qu'il est inutile de supposer une définition de la figure préalablement à son utilisation, ces figures se transforment par la volonté de l'homme Ainsi au niveau 3 lorsque je translate un triangle je n'agis que sur le contour, et si je veux déplacer le centre de gravité de ce triangle j'ai intérêt à l'attacher rigidement à son contour de référence par une médiane afin d'éviter certains ennuis dus à l'inertie par exemple. Il n'y a pas d'action sur tout l'espace, d'ailleurs la notion d'espace n'existe peut-être pas comme objet de connaissance, les transformations agissent sur les figures. Le point peut être considéré comme la figure ultime mais certainement pas comme la figure première, d'ailleurs le point est plutôt à définir comme l'endroit où se rencontrent deux lignes plutôt que la ligne comme un ensemble de points. Les élèves en 6ème disent que la symétrie orthogonale retourne les figures, sans doute pensent-ils aux "p" et "q" , aux "b" et "d" , et cette connaissance leur est bien utile, mais la symétrie retourne-t-elle les points ?

4ème niveau de maturation :

Les transformations agissent sur l'espace : cette action est instantanée et globale, les translations entraînent tout avec elles, les rotations font tout tourner, y compris le point fixe qui – comble de subtilité – se transforme en lui-même ; autrement dit ne se transforme pas, tout en étant l'objet d'une transformation. Cette trop longue périphrase se veut une illustration du fait que les cas "simples" (points invariants transformation identique, ...) sont les plus difficiles à comprendre. Parvenu à cet endroit les spécialistes d'un enseignement analytique devraient s'interroger : pourquoi les notions simples sont-elles si difficiles à comprendre ? Je dois signaler qu'il n'existe toujours pas de vaccin contre cette maladie introduite par Descartes en Europe et qui consiste à considérer que le travail intellectuel consiste uniquement à assembler des certitudes atomiques pour aboutir par une méthode infaillible à des vérités cosmiques. A mon sens les personnes mises en difficulté par ces notions simples raisonnent, contrairement à l'apparence constituée par l'utilisation d'un vocabulaire prématuré, à un niveau inférieur. "Zéro" ne peut pas être un nombre pour celui qui ne les utilise que pour compter. Ainsi les phrases "Il n'y a pas de moutons dans le pré" et "Il y a zéro mouton dans le pré", ne fonctionnent pas au même niveau ; et forcer des enfants à les identifier, c'est détruire la moitié de la science. L'étrangeté du fonctionnement de notre cerveau fera que la plupart de mes collègues considèreront les propos précédant comme des niaiseries, mais ils s'étonneront bien plus du fait que bon nombre d'élèves de 5ème ignorent que la symétrie centrale laisse invariant le centre de cette symétrie. A ce niveau on peut parler de propriété, et les transformations peuvent devenir un outil de démonstration, mais pas avant. Je laisse le soin à d'autres de discuter de la maniabilité de l'outil. Je me contenterai de signaler que, pour ma part, j'ai toujours tendance à considérer que les propriétés d'une figure existent *avant* la transformation et, qu'en conséquence, la possibilité de transformation n'est acquise qu'après le constat (ne serait-il que visuel) de ces propriétés. L'écriture d'une démonstration à l'aide des transformations supposerait donc un renversement de la structure de découverte bien subtil à mon avis. Je ne doute pas un seul instant qu'il y aura des animateurs IREM et d'autres pour me prouver que les transformations sont des outils performants de démonstration, à ceux-là je répondrai que je préférerais que la preuve vienne d'élèves de 4ème ...

5ème niveau de maturation :

Les transformations définies par leurs propriétés : on s'intéressera surtout au fait qu'une transformation soit une isométrie ou non. Les transformations se comparent, elles se rassemblent en bande, bientôt elles formeront des groupes. Sans que je puisse bien l'expliquer, il me semble qu'il y aurait un intérêt à distinguer la composition des transformations de leurs effectuations successives.

6ème niveau de maturation :

Les groupes de transformations : j'arrête ici mon enquête, non pas que j'estime que les développements plus raffinés soient inutiles et inintéressants, mais mon but reste la transformation des pratiques au collège, et j'ai largement dépassé le collège, j'espère que l'attentif lecteur est convaincu de cela.

V - LES CONSEQUENCES PEDAGOGIQUES DE CETTE ANALYSE

L'Education Nationale est une grosse consommatrice de vocables ; elle les dénature, elle les engloutit, elle les vrille avec une force molle qui me désarme. Ainsi la notion louable de *prérequis* semble être devenue une tarte à la crème pédagogique. Mais qu'y a-t-il de bon dans cette notion ?

C'est ce fait constaté qu'une notion doit réellement fonctionner à un niveau inférieur avant d'être utilisée à un niveau plus élevé. Il n'y a à proprement parler pas de concepts prérequis à d'autres, mais simplement des niveaux de maturation hiérarchisés et cette distinction n'est pas un détail.

a) *La restitution de la temporalité comme procédé explicatif.*

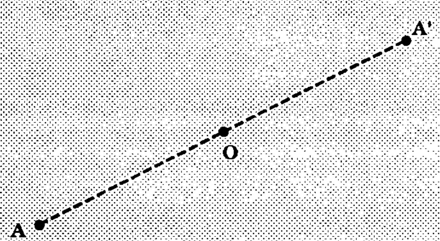
Il y a au moins deux manières d'enseigner les constructions pour la symétrie centrale : par la construction des milieux ou par la rotation de 180° (cf. encadrés 5 et 6). On remarquera d'ailleurs que la seconde méthode est beaucoup moins simple encore à faire qu'à dire : en fait, on ne sait pas comment arrêter le papier calque ...

Si un élève ne comprend pas, il y en a toujours, je propose comme procédure d'explication (autre que la répétition) de restituer de la durée à la transformation. Dans le premier des deux cas, que peut-on imaginer ? "le triangle ABC suit les droites de transformation, il se réduit, devient tout petit, minuscule, ponctuel, puis il renaît, il s'agrandit doucement de l'autre côté du point puis il reprend sa taille normale". Dans le deuxième procédé on imagine plus facilement : "le triangle se met en mouvement, il tourne autour d'un point, doucement ou vite, peu importe, l'esprit peut arrêter, ralentir ou accélérer le mouvement comme il le veut, le triangle s'immobilise enfin, une fois la transformation est réalisée". Dans le deuxième cas la temporalité explique, rend intuitif, dans le premier cas elle embrouille. Il n'y a aucun doute : la symétrie centrale est une rotation particulière elle est donc à enseigner après la rotation.

1) Centre de symétrie milieu de [AA'] :

Données : point O et A

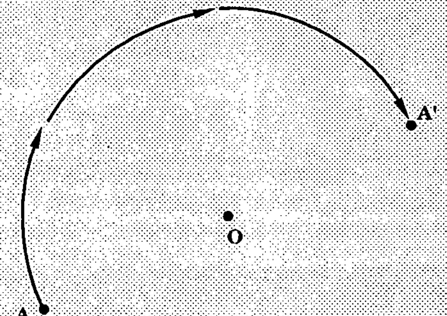
Construction : joindre A et O et prolonger au-delà de O d'une longueur égale à celle de OA, on obtient ainsi A'.



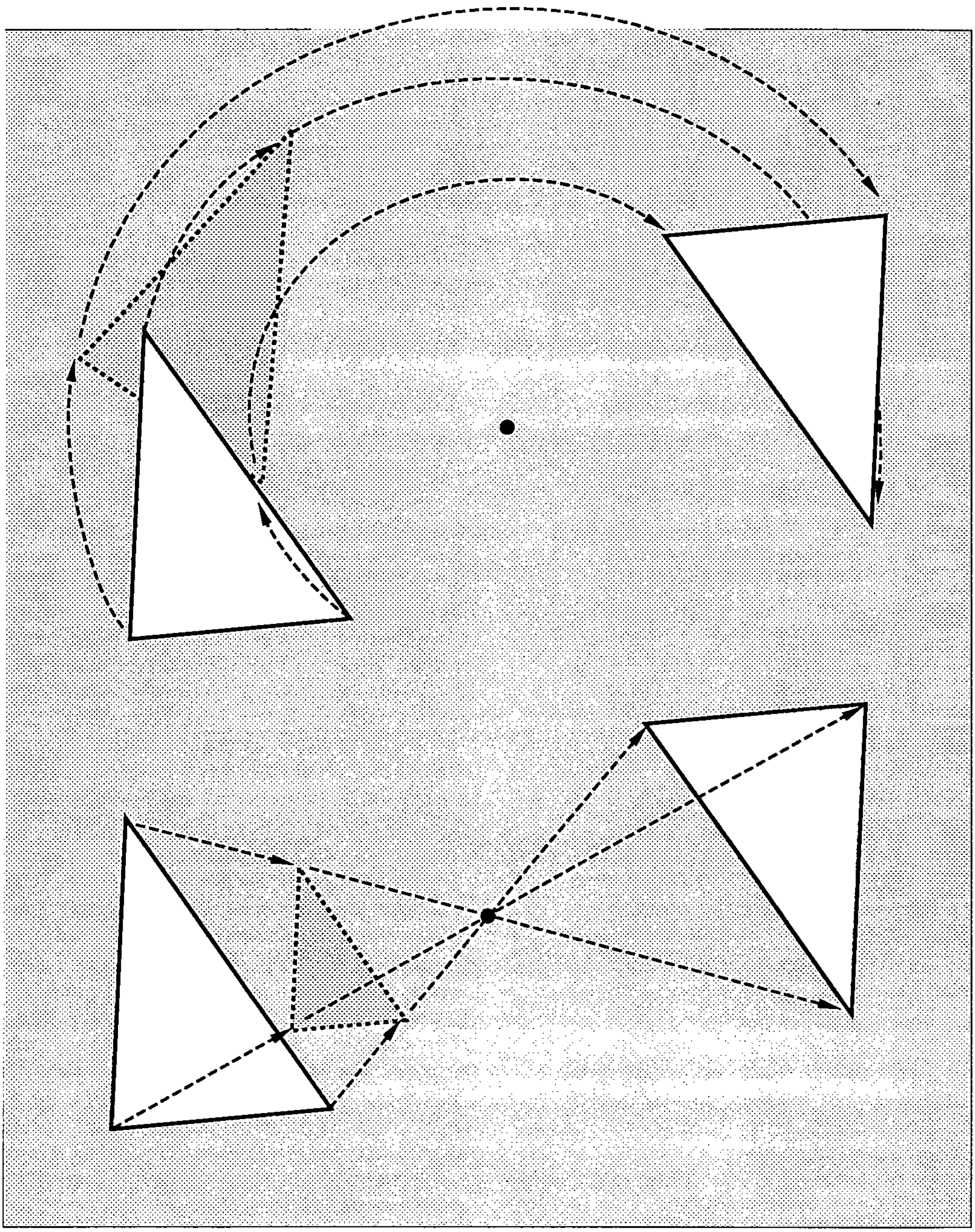
2) Rotation de 180° :

Données : points O et A

Construction : poser une feuille de papier calque sur OA, piquer le compas sur O. Faire tourner le papier calque d'un demi-tour.



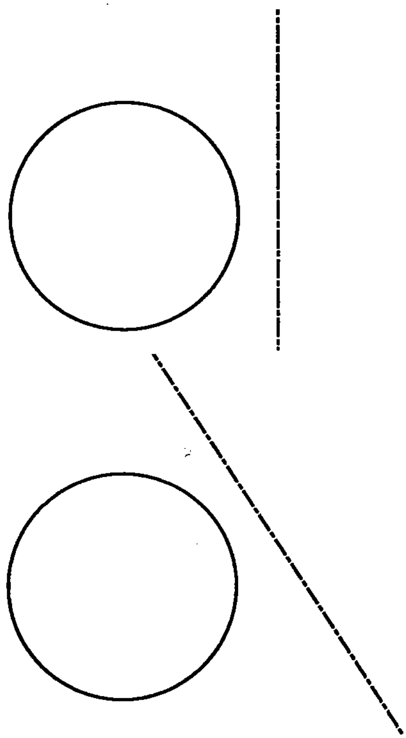
Encadré 5 : *deux façons de construire le symétrique d'un point.*



Encadré 6 : *applications des deux méthodes au cas d'un triangle.*

b) *Revendiquer les paramètres de la situation d'apprentissage comme faisant partie de l'apprentissage.*

Exercice :



Quel dessin préfères-tu ?
Quelles différences, quelles ressemblances y a-t-il entre ces deux dessins ?
Peux-tu ramener un dessin en l'autre ?

Proposer des transformations spatiales.
Utilisation réelle de miroirs véritables.
Ombre d'objet
Perspective cavalière
Jeu d'assemblage (cube soma, ...), d'équilibre, etc.

c) *Etre ou ne pas être.*

Ce qui définit un objet, une propriété c'est tout autant l'*être* de l'objet ou de la propriété que son *non-être*. Mais je pressens ici des résistances mentales ..., je délaye donc mon affirmation. Les isométries ne sont concevables et nommables autant que par ce qu'elles sont que par ce qu'elles refusent d'être. Les isométries existent parce qu'il existe des non-isométries. On aura d'ailleurs tout intérêt à forcer sur le contraste *fond / forme*. Si je veux attirer l'attention sur les isométries, il faut que je montre beaucoup d'autres transformations qui n'en sont pas, et il y en a. Mais il faudra obligatoirement les considérer au premier niveau de maturation, alors il faudra des objets dans la classe, des miroirs, des cubes, du carton, de la colle, des cutters, ... Il faudra sortir « tout-ce-fourbi » et puis il faudra le ranger, il faudra le maintenir en état, remplacer les miroirs cassés ; et l'enseignant, après s'être rassasié d'épistémologie hasardeuse, se métamorphosera en un gestionnaire de bric à brac. Mauvaise nouvelle pour ceux qui pensaient que la réflexion théorique allait leur permettre d'arriver en cours les mains dans les poches ! mais je ne vois pas d'autre issue.

On peut se demander si l'absence d'objets dans les classes est due aux problèmes de gestion que je viens d'évoquer ou à une compréhension superficielle de la notion d'expérimentation en science ; on pourrait opposer ou hiérarchiser les deux problèmes mais si le lecteur accepte un instant de repasser par sa classe, il constatera que les deux questions sont inévitablement conjointes. Dans cette hypothèse les analyses partielles nous conduisent à des revendications banales quoique souvent ridiculisées.

VI - PROPOSITIONS DE MODIFICATIONS DE PROGRAMME

Selon mon analyse il apparait qu'il n'y a pas à distinguer des degrés de difficulté entre symétrie orthogonale, symétrie centrale, rotation, ... Il faudrait faire de ces transformations des processus physiques de modification de l'emplacement, il faut comparer matériellement les isométries avec des non-isométries, gonflage d'un ballon, déformation d'une poutre, ombre, perspectives, transformateurs mécaniques, rétroprojecteur, ... ceci pourrait occuper la 6ème et la 5ème, il n'y a pas à limiter les pratiques, je suis sûr que les esprits se mettraient à galoper dans ces grandes prairies. En 4ème on pourrait amorcer un raplatissement de la géométrie de transformation en argumentant que pour commencer une étude "théorique" plus approfondie des isométries, il est utile de simplifier le problème (restriction du champ explicite et annoncé aux élèves). Alors on pourrait faire de la géométrie argumentée verbalement, je n'ai pas dit déductive, mais à l'inverse de ce qui se fait actuellement, c'est-à-dire qu'on utiliserait des propriétés géométriques pour se convaincre de la possibilité d'une transformation.