

LE TRAITEMENT GRAPHIQUE DES IMAGES DE GEOMETRIE

Jacques COURIVAUD
Irem de Limoges

I — « **COMPRENDRE** » ou de la nécessité d'une bonne introspection.

La compréhension d'une image n'est pas la *photographie* de cette image au niveau de notre cerveau mais le résultat d'une **structuration des informations sensorielles** recueillies par la lecture de cette image.

Il y a un problème à résoudre, et les procédures utilisées sont déterminées par les informations disponibles. Pour *comprendre* il faut *faire des hypothèses sur le sens*, il faut interpréter des informations sensorielles, il faut les *organiser* en une représentation qui va devenir cohérente (des tests d'hypothèses permettent de confirmer ou d'infirmer un sens).

Pour certains élèves ces procédures n'aboutissent pas, leur lecture d'image n'aboutit qu'à la reconnaissance d'éléments de l'image qui sont mémorisés (à court terme)

Exercice : Chercher dans le dessin ci-dessous une étoile parfaite. En même temps, essayez de prendre conscience de la façon dont vous cherchez, de la stratégie que vous utilisez.

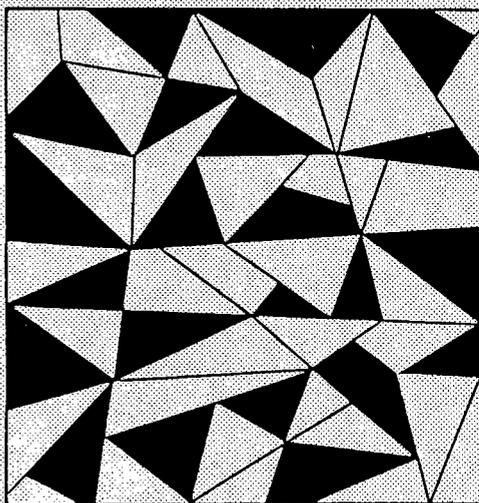


Fig. 1 (solution en fin d'article)

Encadré 1

**LE TRAITEMENT GRAPHIQUE
DES IMAGES DE GEOMETRIE**

sans qu'aucun ordre apparaisse, aucune signification globale, aucune image mentale construite. Pour aider ces élèves deux approches complémentaires sont possibles :

a) Augmenter les aides visuelles. En différenciant certains éléments de l'image par l'utilisation des **variables visuelles** : forme - orientation - couleur - grain - valeur - taille (par ordre croissant d'efficacité selon J.Bertin).

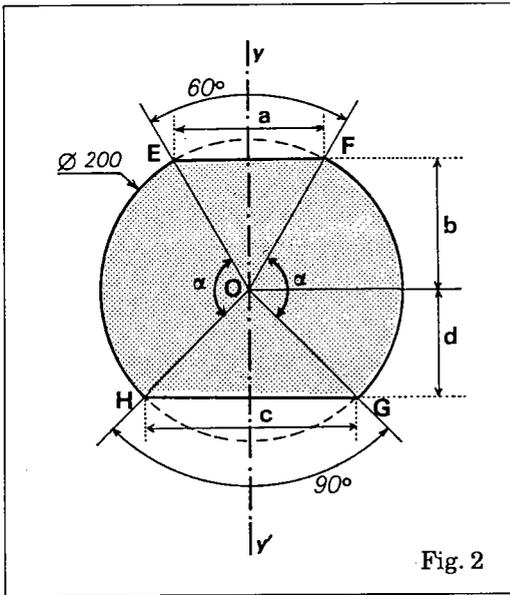


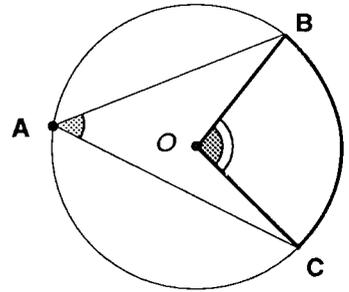
Fig. 2

La figure ci-dessus, par exemple, représente une pièce vue en coupe (les cotes sont exprimées en mm, (yy') est un axe de symétrie). Onze variables visuelles différentes sont utilisées. (Cf. [6] p. 160).

b) Imposer un sens de lecture. En augmentant le contraste au niveau des angles pour une figure géométrique (concentration des fixations visuelles) et, par extension, au niveau des discontinuités de la figure.

C'est le cas, par exemple, des figures ci-dessous (qui sont extraites de [6]).

Angle inscrit ; angle au centre



Nous avons : $\widehat{BOC} = 2 \widehat{BAC}$.

Fig. 3₁

Périmètre ou Aire

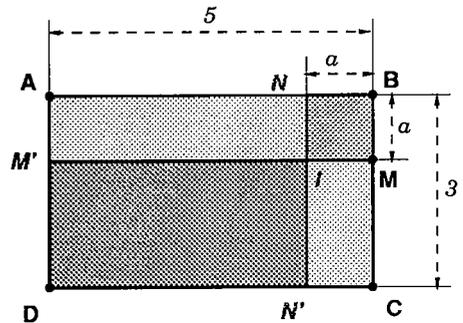


Fig. 3₂

c) Faciliter les interprétations en levant les ambiguïtés. (Voir Encadré 2).

Dans cet article je ne développerai pas plus le traitement des images de géométrie plane. Pour l'aspect théorique je renvoie le lecteur à [4]. Les figures proposées ci contre sont ma contribution au manuel de Seconde 1990 publié par Armand Colin [6].

Encadré 2 : un exemple de traitement graphique en géométrie plane.

Le cercle des neuf points (ou cercle d'Euler)

La figure avant traitement ...

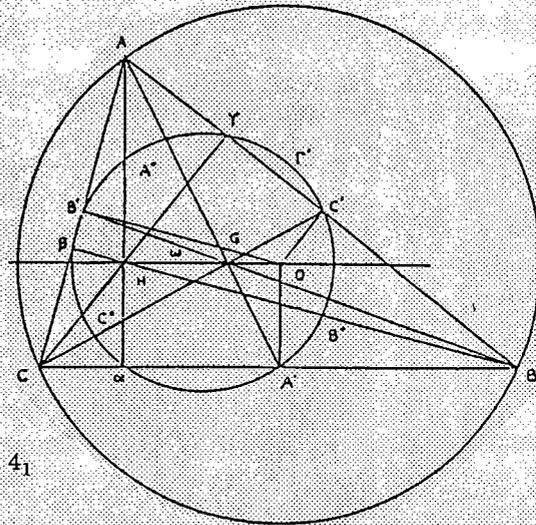


Fig. 4₁

... après traitement graphique.

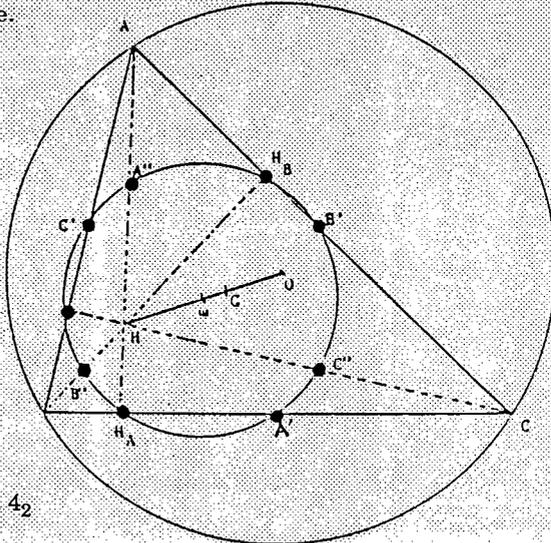


Fig. 4₂

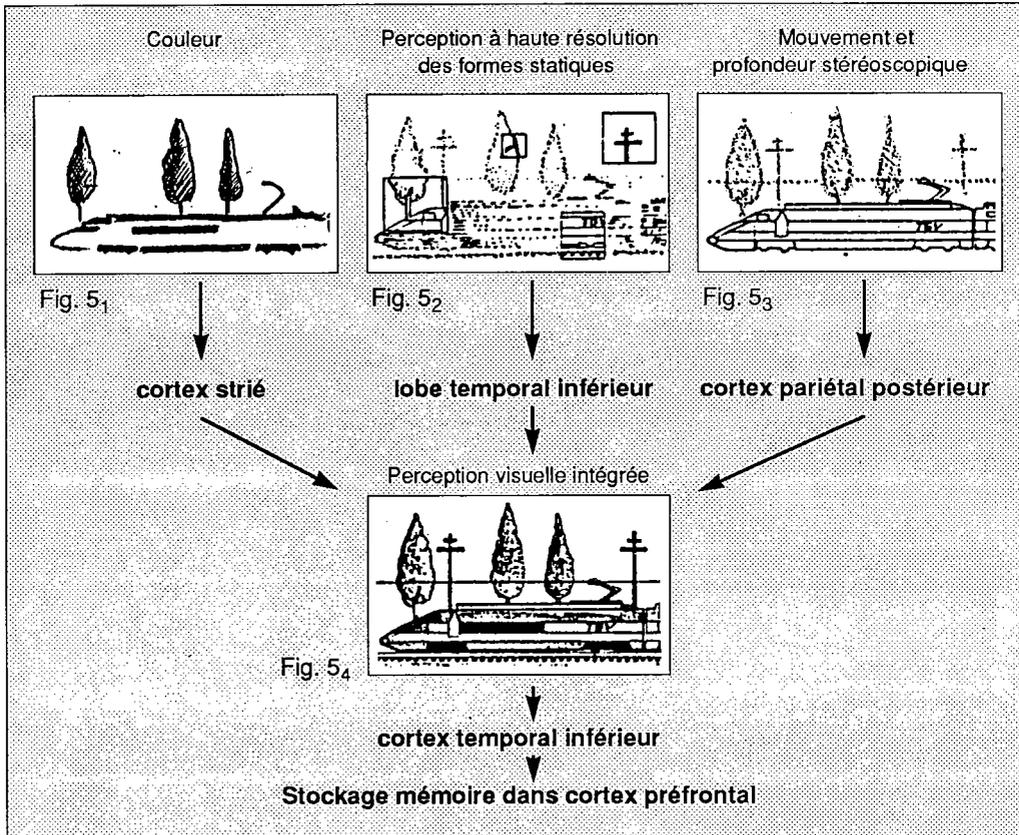
II — Le traitement graphique des images de géométrie dans l'espace.

Introduction.

Les récents résultats de la recherche sur le fonctionnement du système visuel nous apprennent que les informations sensorielles recueillies par le système *œil / nerf optique* ne sont pas traitées dans une seule aire visuelle mais dans plusieurs (Cf. Encadré 3).

Cette séparation de l'information n'empêche pas une perception globale, il serait plus juste de dire *perception de synthèse* car il s'agit d'une élaboration progressive par ajouts successifs d'information (par chaque fixation visuelle notamment en des points précis de la figure).

Dans la suite de cet article, je vais essayer de montrer comment utiliser cette particularité du traitement des images dans des aires corticales différentes pour représenter des figures de géométrie dans l'espace .



Encadré 3

Quel est le problème qui se pose pour une figure de géométrie dans l'espace ? : *Traduire graphiquement la troisième dimension.*

Concrètement, s'assurer que pour tout observateur, expérimenté ou non, les éléments de la figure placés dans un plan proche ne seront pas perçus comme placés dans un plan éloigné et inversement. Que l'échelonnement des plans de la figure soit précisé sans ambiguïté de lecture comme pour les « escaliers qui descendent toujours » de MC. ESCHER.

Plusieurs approches sont possibles :

- 1) Traiter graphiquement l'objet représenté,
- 2) Traiter graphiquement le contexte de l'objet représenté,
- 3) Mélanger les deux traitements dans des situations bien définies.

1. *Traiter graphiquement l'objet représenté.*

Il s'agit d'utiliser des variables visuelles : *forme, orientation, couleur, grain, valeur, taille*. Nous vivons dans un monde à trois dimensions et nous avons pris l'habitude de traduire en distances l'ensemble des déformations subies par toutes les sensations et qui sont dues à l'éloignement. C'est en déformant de façon pertinente toutes ces variables visuelles que le peintre réalise les meilleurs « trompe l'œil ».

Pour restituer sur un plan cette perception de l'espace il suffit d'utiliser quelques unes, voire une seule des sensations visuelles.

a) *La variation de forme.* Il s'agit de la mise en œuvre d'un certain type de perspective.

Ce n'est pas l'objet de cet article, toutefois quelques remarques générales peuvent être formulées.

La perception des formes est un processus cognitif, il ne peut donc y avoir conscience de déformation sans connaissance (mémorisation) préalable de l'objet déformé par les règles perspectives utilisées. Si un cube, une chaise, une table nous apparaissent *en perspective* et créent un espace à trois dimensions, la mise en volume d'un caillou quelconque ne peut résulter d'une déformation perspective, la *forme initiale* étant inconnue. A l'inverse l'observateur d'une sphère en perspective dite cavalière reconnaîtra plus volontiers un ballon type ballon de rugby que le résultat des déformations subies par la sphère par l'utilisation des règles de la perspective cavalière.

La variation de forme n'impose un sens à l'image que si le récepteur, l'observateur, connaît les codes de construction utilisés par l'émetteur. L'expert et le novice n'ont pas la même analyse de l'image.

b) *La variation de taille.* La variation d'épaisseur des lignes représentées va suggérer le défilement des plans et la transformation combinée des valeurs et des tailles dus à l'éloignement.

Pour être sûr que cette variation soit significative d'éloignement il faut qu'elle n'inverse aucune des positions spatiales suggérées par le volume. Ce qui est en avant est plus épais, ce qui est en arrière plus mince.

L'objectif ici, est d'obliger l'observateur à focaliser ses fixations visuelles sur les éléments de l'image présentant le contraste le plus élevé.

Fixations visuelles sur un visage de jeune fille :



Fig. 61

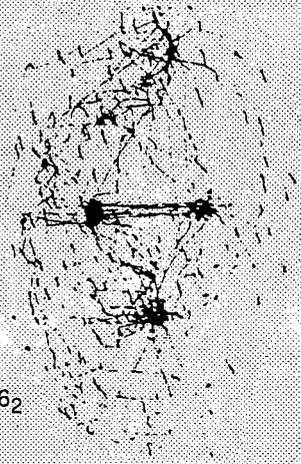


Fig. 62

Les yeux, la bouche concentrent beaucoup de fixations ; il s'agit là plutôt d'une composante culturelle liée à la communication. En revanche, les fixations visuelles centrées sur la racine des cheveux ainsi que sur la partie gauche du visage indiquent les focalisations dues aux zones de contraste élevé.

Mise en œuvre de cette technique de variation de taille sur la figure ci-dessous :

La découverte de l'image se fera le plus souvent dans l'ordre imposé par les traits épais et les traits fins, ordre choisi ici de façon à correspondre à l'ordre d'échelonnement des plans.

Avantages de ce type de représentation : l'interpénétration des volumes reste lisible.

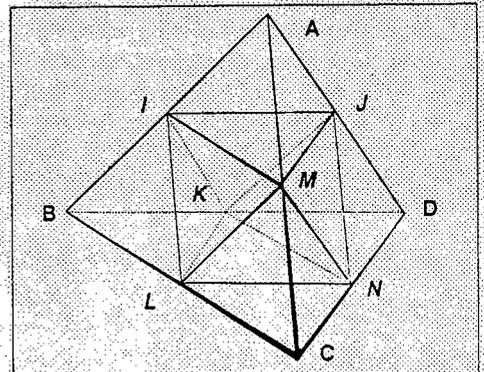


Fig. 7 (figure extraite de [6] page 340)

La découverte de l'image se fera donc le plus souvent dans l'ordre imposé : *traits épais – traits fins*, soit l'ordre de l'échelonnement des plans.

L'expert et le novice analysent l'image dans le même ordre. Ce mécanisme est renforcé par les interruptions des lignes qui créent des discontinuités repérées par le système visuel et comme elles sont en cohérence avec l'échelle des plans, l'impression de profondeur est accentuée. (Cf. Encadré 4)

c) *La variation de valeur.* Dans le monde réel des variations de valeur traduisent sur les faces des objets les variations d'éclaircissement, il s'agit d'*ombres liées*, la figuration de ces ombres liées sur l'objet représenté ne renseigne pas sur la profondeur mais crée une donnée du contexte ; en l'occurrence elle suggère une direction pour les rayons lumineux. (Ci-dessous, la perception de profondeur est donnée par une variation d'épaisseur (des arêtes, des lettres) comme pour le cas précédent.)

La variation de valeur ne suffit pas à traduire la profondeur, elle a pour fonction d'identifier les différents plans et non la profondeur.

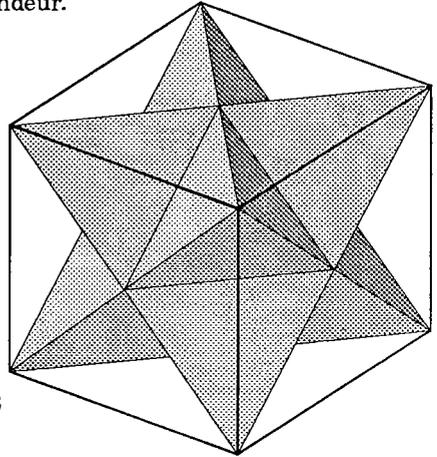


Fig. 8

La variation de valeur ne doit donc pas être utilisée seule mais en complément éventuel d'une variation de taille, par exemple, avec l'inconvénient de perdre ainsi la transparence de l'objet.

TP 3

OMBRES AU SOLEIL

Le but du TP est de construire une ombre au soleil d'un solide.

Une telle ombre est obtenue par projection sur le plan horizontal parallèlement aux rayons lumineux. Le plan horizontal est le plan $(B_1C_1F_1)$.

Choisissez une direction pour les rayons lumineux. Le point A a pour ombre le point A'.

- a) Quelles sont les ombres des points B_1, C_1, E_1, F_1 ?
- b) Quelle est l'ombre du segment $[AB]$? du rectangle ABCD ?
- c) Quelle est l'ombre du rectangle HEFG ?
- d) Hachurez l'ombre portée sur le plan horizontal du solide.

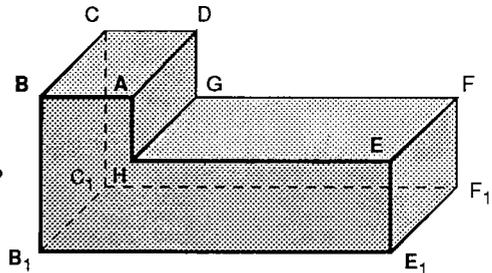


Fig. 9 (extraite de [6] page 321).

**Deux exemples d'insertion d'une figure
dans un contexte figuratif.**

Cube (ou parallélépipède)
posé sur une table :

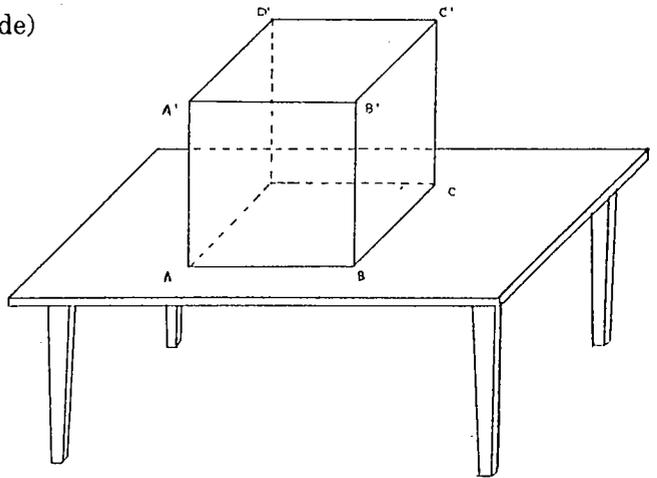


Fig. 10₁

Composition de A. Bosse dans son *Traité des pratiques géométrales
et perspectives* (1655).

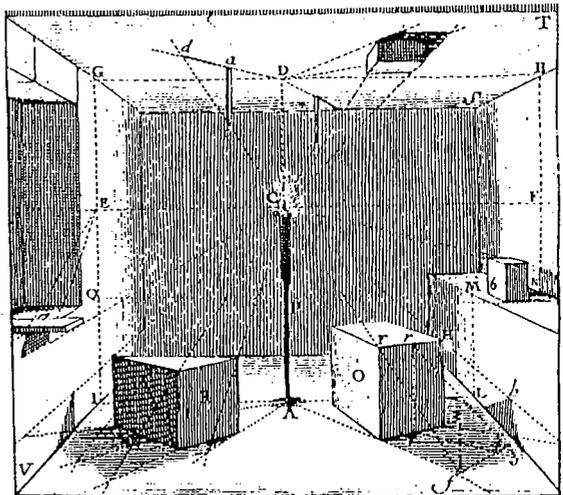


Fig. 10₂

PLANCHE 39 : La mesme chose sur la lumière au flambeau.

2. *Traiter graphiquement le contexte.*

Il s'agit d'utiliser ici le phénomène d'*ancrage d'un sens* donné par le contexte sur l'objet géométrique traduit en deux dimensions.

La figure se verra dotée du sens, voire des propriétés, apportés par le contexte.

Comment procéder ?

a) *Insérer la figure plane dans un contexte figuratif.* (Cf. par exemple l'Encadré 5).

b) *Traduire par la variation d'une variable visuelle une régularité du monde physique qui est corollaire de la perception d'éloignement.*

Pour un peintre les plans éloignés sont plus flous par diminution du contraste dû à l'affaiblissement des valeurs des éléments éloignés, ainsi qu'à une transformation colorée vers les bleus.

Pour un mathématicien une variable suffit pour induire une perception de la même nature : le cerveau n'a pas besoin d'une perception rétinienne complète, il procède par analogie et de plus cette information sur la profondeur est traitée dans une aire visuelle spécialisée (Cf. [1]).

On trouvera par exemple ci-contre deux figures (extraites de [6]) dont les contextes sont traduits par une variation de valeur :
— pour le cube tronqué, qui est une figure de l'espace, on a choisi d'ajouter un fond dégradé,

— pour représenter la projection d'une face sur un plan, on a conservé le fond uni habituel qui crée plutôt le contexte propre à la géométrie plane.

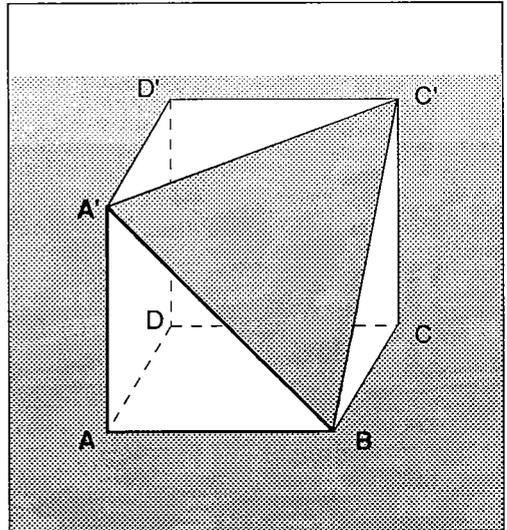


Fig. 11.1. fond dégradé : *contexte d'espace qui s'applique à la figure.*

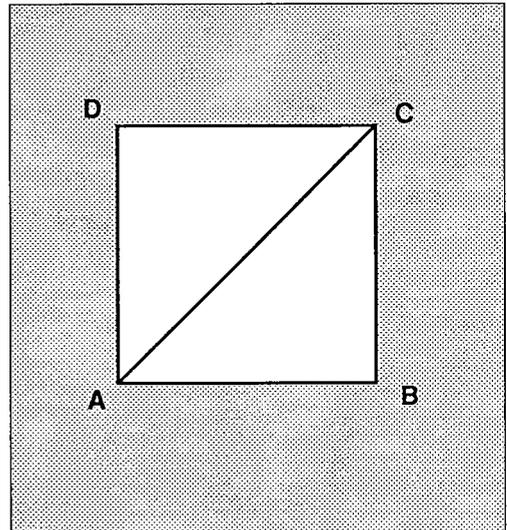


Fig. 11.2. fond uni : *contexte plan qui s'applique à la figure.*

3. Mélanger les traitements.

a) *Les objets de l'espace dont on connaît la source d'éclairage.* Il s'agit alors de renforcer l'analogie avec la réalité en traduisant graphiquement :

- les ombres liées *sur l'objet* représenté,
- les ombres portées qui se projettent dans la partie de l'image définie précédemment comme *contexte*.

Deux variables différentes suffisent, comme on le voit par exemple sur la figure 12 : les ombres liées correspondent à une variation de grain, les ombres portées à une variation de valeur.

b) *Le mélange de tous les traitements sur une seule image.* Voir l'analyse détaillée d'une figure placée en appendice.

c) *Avantages et limites.* « Une image vaut mieux qu'un long discours », cette expression n'a pas de sens si l'image proposée à la

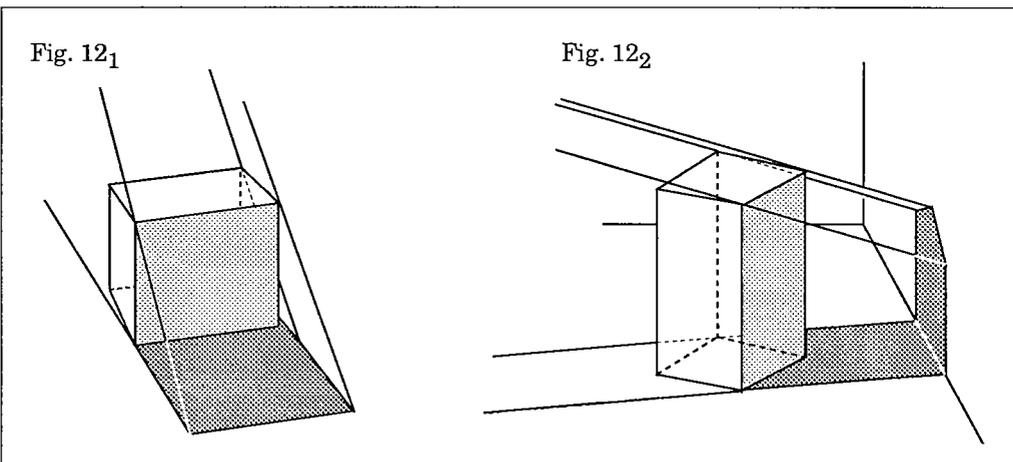
lecture demande une élaboration mentale complexe comme sur l'exemple de la figure analysée plus loin (Cf. appendice).

Dans bien des cas pour améliorer la communication, il faut décomposer cette image en une suite d'images comme sur les exemples des figures 13 et 14.

III — CONCLUSION

L'objectif terminal est d'amener l'élève à construire des *représentations mentales abstraites* où le langage joue un rôle prédominant.

Néanmoins pour atteindre ce niveau cognitif, l'élève utilise des représentations figuratives ou "*images mentales*" qui elles mêmes proviennent d'une élaboration d'une construction à partir des *mécanismes de la "perception"*.



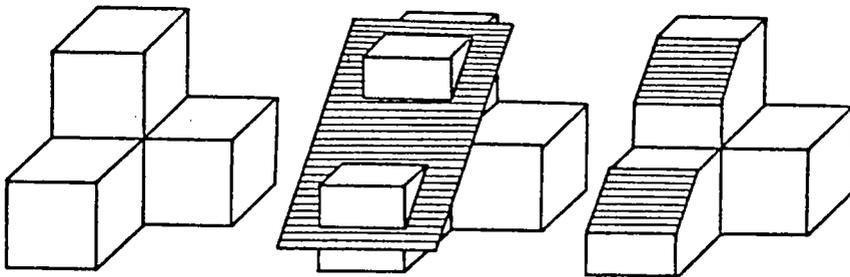


Fig. 13

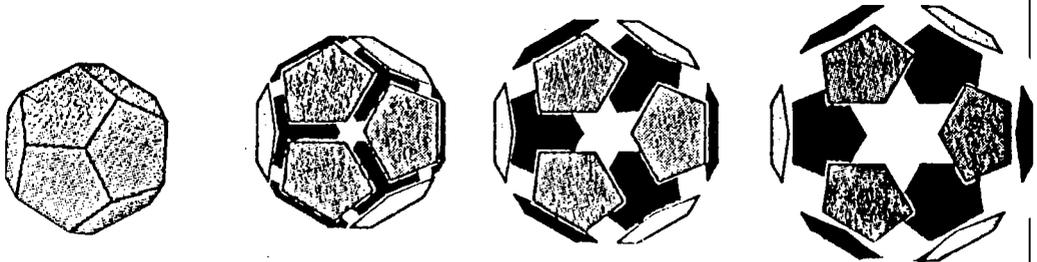


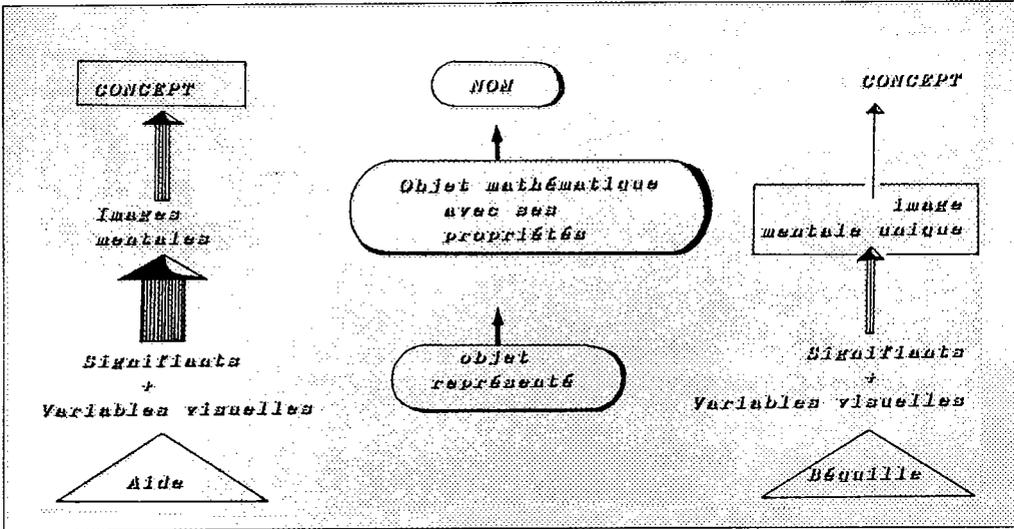
Fig. 14

Or pour la géométrie dans l'espace, l'élève a une situation de novice et non d'expert, ses fixations visuelles ne sont guidées que par les variables visuelles utilisées sur la figure et qui agissent comme stimuli. Si elles induisent un mauvais découpage de formes il y aura forcément une

mauvaise interprétation d'où – vous l'aurez compris – une nécessité, pour la phase d'apprentissage, de travailler dans un premier temps sur des images traitées graphiquement, afin d'aider l'élève à développer une *stratégie de lecture* des images de l'espace qui soit optimale .

LE TRAITEMENT GRAPHIQUE
DES IMAGES DE GEOMETRIE

Traiter des images : Aide ou béquille ?



Penser que c'est une "aide" signifie que le traitement graphique est une étape qui permettra plus sûrement de relier la représentation au concept. Penser que c'est une "béquille" signifie que le traitement graphique imposera une image mentale

unique empêchant de relier la représentation au concept le jour où le traitement graphique n'existera plus.

A vous de choisir ou ... de concilier les deux.

BIBLIOGRAPHIE PRINCIPALE

- [1] LA PERCEPTION VISUELLE. Biblio. *Pour la Science*. (et notamment : Les illusions géométriques, B. Gillam, p. 11 à 19 ; La perception anorthoscopique, I. Rock, p. 48 à 57 ; Contrast et fréquence spatiale, F. Campbell & L. Maffei, p. 62 à 68 ; Les processus visuels cachés, J Wolfe, p. 69 à 79 ; L'interprétation de ce qui est vu, D. Hofman, p. 110 à 116) Belin 1984.
- [2] L'ANATOMIE DE LA MÉMOIRE. M. Mishkin et T. Appenzeller, *Pour la Science* n° 118 Août 1987.
- [3] SEMIOLOGIE GRAPHIQUE. J. Bertin, (ouvrage de base pour traiter graphiquement une image de manière scientifique) Gauthier-Villars Mouton 2ème édition 1973.
- [4] IMAGES ET MATHÉMATIQUES. J. Courivaud, Traitement des images par le système visuel Niveaux de perception. Analyse d'une image mathématique, p. 8 à 19. Bull. Inter-Irem Images et Maths. Publication Inter-Irem 1988.
- [5] GEOMETRIE DANS L'ESPACE AU COLLEGE (liv. du maître). Irem de Lorraine 1988.
- [6] MANUEL DE SECONDE. Mathématiques. Armand Colin 1990.

APPENDICE

Un exemple d'analyse - description d'une figure

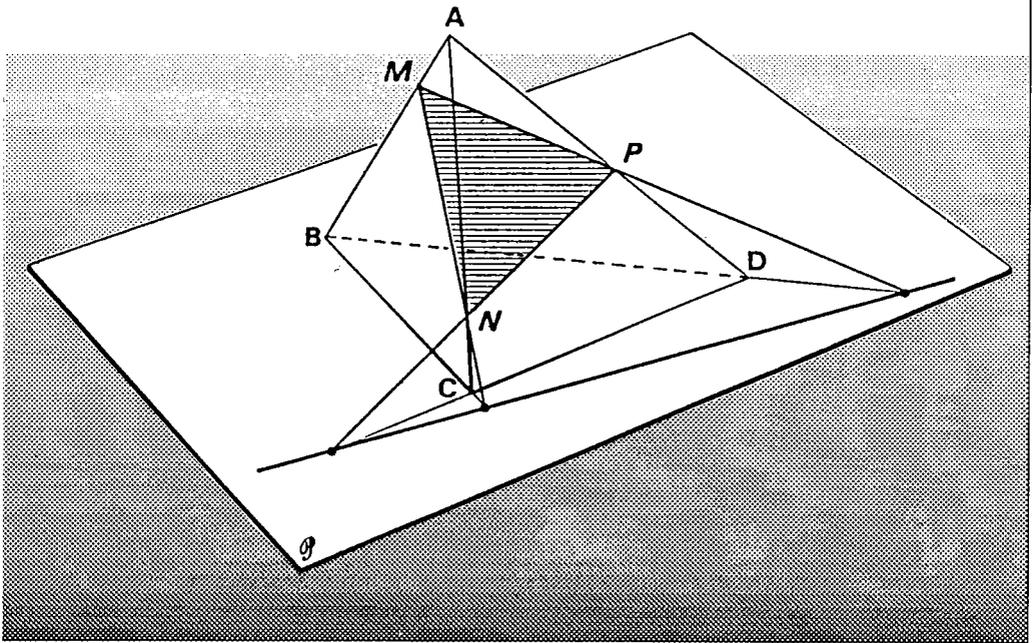
Nous nous proposons d'analyser en détail le processus de lecture d'une figure de géométrie dans l'espace. Il s'agit de la figure suivante (extraite de [6] page 317).

Considérons un tétraèdre $ABCD$ et trois points M, N, P appartenant respectivement aux arêtes $[AB], [AC]$ et $[AD]$ du tétraèdre et tels que les droites $(MN), (NP), (PM)$ percent le plan (BCD) respectivement en P', M', N' .

1° Démontrez que P', M', N' appartiennent respectivement aux droites $(BC), (CD), (BD)$.

2° Démontrez que les points M', N', P' sont alignés.

Fig. 15



Cette analyse permet de faire le lien avec le fonctionnement du système visuel rapidement décrit dans le premier paragraphe. De gauche à droite du tableau des pages suivantes, on essaie de répondre aux questions que peut se poser inconsciemment le lecteur :

- D'où vois-tu la scène ? :* du dessus »»»» plongée
- Quelle portion d'espace ? :* »»»» plan grand ensemble
- Pour LIRE cette image :
- Où vas-tu porter mes premières fixations visuelles ? :*
- là où les contrastes sont élevés »»»» ex : Fenêtre (côtés du parallélogramme)
 - au niveau des discontinuités »»»» ex : triangle hachuré.

LE TRAITEMENT GRAPHIQUE
DES IMAGES DE GEOMETRIE

<p>SIGNIFIANTS ICONIQUES</p> <p><i>Mode de construction de l'image (contexte et objets)</i></p>	<p>SIGNIFIANTS EXTRA-ICONIQUES</p> <p><i>(les éléments de l'image qui ont une existence hors de l'image)</i></p>
<p>ESPACE</p> <p>Plan grand ensemble <i>puis</i> Plan de demi-ensemble (un tétraèdre dans un plan)</p> <p>COMPOSITION</p> <p>Une fenêtre dans l'image (emboîtement)</p> <p>PRISE DE VUE</p> <p>plongée</p> <p>LUMIERE</p> <p>contrastée <i>pas d'ombre liée (ellipse*) pas d'ombre projetée</i></p>	<p>dégradé</p> <p>Un personnage dans un décor</p> <p>parallélogramme à bords inférieurs épais (fixations visuelles)</p> <p>Figuration des seules arêtes épaissies d'un tétraèdre (hyperbole*)</p> <p>ligne pointillée BD</p> <p>triangle hachuré régulièrement inclus dans le tétraèdre</p> <p>3 points M', P', N' sur une droite reliés par des droites aux points M, N, P et B, C, D</p>

(*) Rhétorique de l'image :

Hyperbole : "Procédé qui consiste à exagérer l'expression pour obtenir une forte impression".

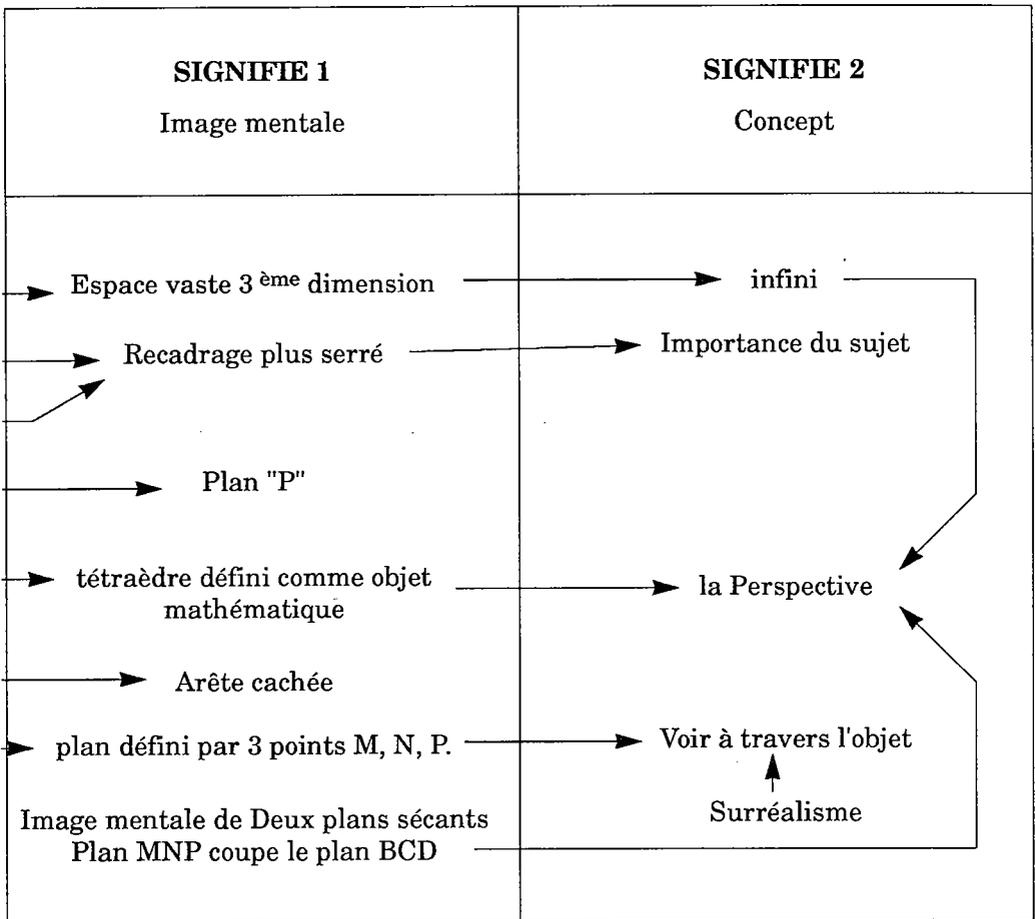
Ici la signification de l'image est déterminée par "allusion" avec le tétraèdre qui ne possède pas d'arêtes épaissies.

Ellipse : "Figure de style qui consiste à omettre un ou plusieurs éléments de la phrase". Dans ce cas application à l'image.

La LECTURE de l'image met en jeu le **contexte strié** :

l'information extraite se situe au *niveau neurophysiologique*. Elle est du type "réponse à des stimuli visuels" : couleur, contraste, orientation, fréquence (par ex. : hachures du triangle MNP).

L'INTERPRÉTATION de cette image met en jeu le **lobe temporal inférieur** :



Il faut *mettre en relation* les informations extraites afin de délimiter des unités de sens du type : "même codage graphique / même unité".

Reprenons l'exemple du triangle hachuré MNP. Il est traversé par l'arête CA épaissie et par l'arête BD en pointillé. Il faut que le cerveau détermine pour ces trois éléments à quelle unité ils doivent être rattachés ; d'où nécessité de nouvelles fixations

visuelles : cette fois-ci pour recueillir des informations permettant de lever des ambiguïtés.

Exemple des arêtes CA-CB-CD :
même codage = même unité.

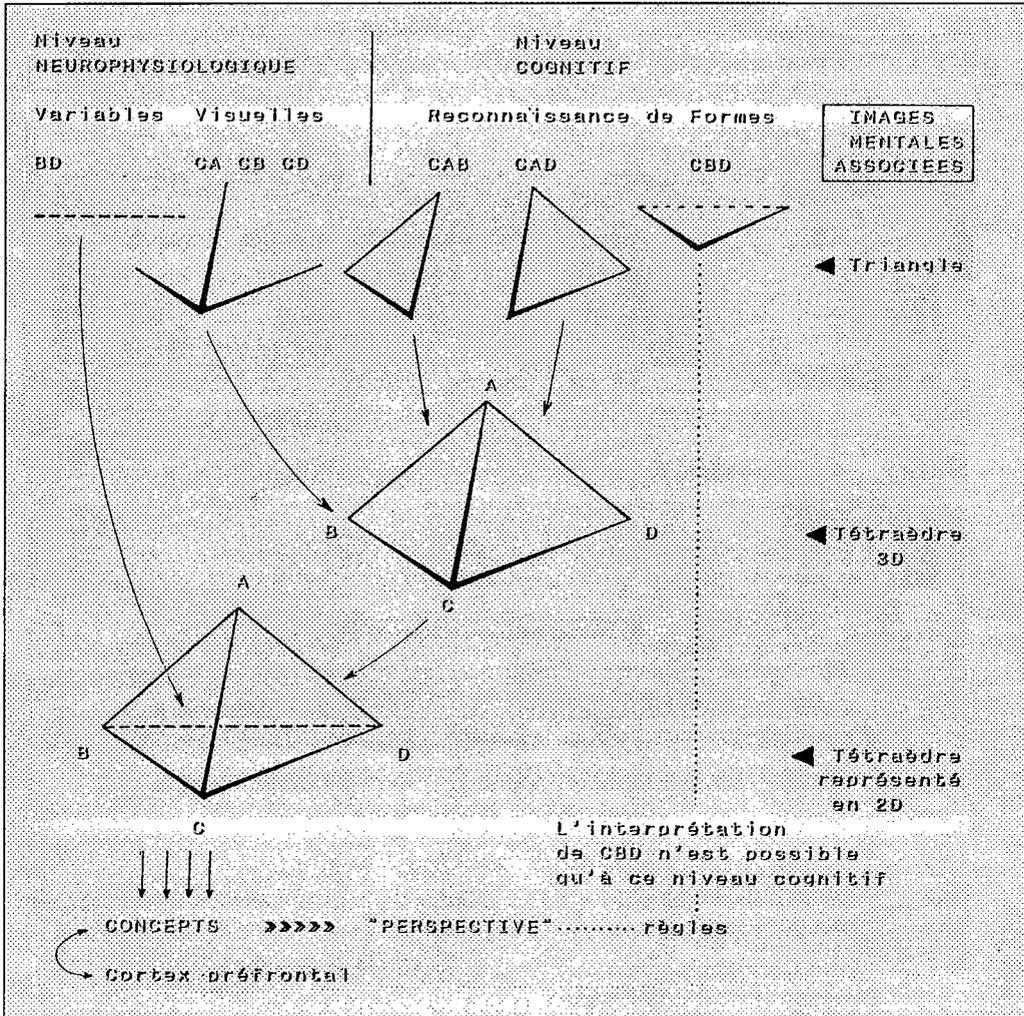
La COMPREHENSION de cette image met en jeu le **cortex temporal inférieur** :

Ces mécanismes de la perception font naître des *images mentales* (signifié 1) par

LE TRAITEMENT GRAPHIQUE
DES IMAGES DE GEOMETRIE

la recherche d'analogie avec des éléments existants mémorisés. Il s'agit d'un traitement de l'information au *niveau cognitif*.

La reconnaissance du tétraèdre pourrait, en résumé, se décomposer de la façon suivante :



Solution de l'exercice (Fig. 1, p. 5) : Trouvez la solution en portant votre regard dans le coin inférieur droit de la figure, vous devez reconnaître l'étoile à cinq branches ci-contre :

