REPERES - IREM . n°3 - avril 1991

MATHEMATIQUES : APPROCHE PAR DES TEXTES HISTORIQUES

Groupe MATH
Irem de Paris VII

Les professeurs des disciplines scientifiques ont de plus en plus conscience de la dimension culturelle de la matière qu'ils enseignent face à une présentation des sciences comme « produit fini ».

L'histoire des sciences participe de l'histoire des idées et de la société. Contrairement à l'idée courante d'un développement linéaire des mathématiques, celles-ci se développent suivant un mouvement qui peut nous sembler déconcertant : les découvertes techniques et les préoccupations de rigueur jouent un ballet subtil que le groupe M. : A.T.H. (IREM de Paris VII) souhaite faire apercevoir aux élèves à travers la lecture de quelques textes originaux.

Notre expérience, maintenant assez longue, nous confirme dans la conviction que beaucoup d'élèves sont vivement intéressés par une telle approche.

Lire des textes. Pourquoi ?

La confrontation avec les textes des mathématiciens change la représentation que chacun, enseignant ou élève, a des mathématiques.

Celles-ci prennent vie, elles ne sont plus un objet figé. Elles sont objets de recherches, de controverses, d'erreurs et de tâtonnements.

La conception de la rigueur et les notations évoluent : cela relativise nos exigences et oblige l'enseignant à un débat fructueux.

Dans un texte du 17ème siècle, l'étude d'un exemple – que maintenant nous appelons « générique » – suffit à prouver une proposition, comme on le voit dans les raisonnements par induction de Pascal sur le *triangle arithmétique* (cf. [4]).

La rencontre de $\sqrt{-1}$ dans un texte d'Argand conduit à une discussion sur cette notation où l'on montre les raisons pour lesquelles on en a préféré une autre (cf. [6] p. 58 à 63).

L'erreur devient une étape dans l'activité mathématique. Elle n'est plus seulement objet de critiques, son aspect fécond apparaît.

Un exemple notable est celui du fameux *problème des partis* (problème de répartition des mises entre deux joueurs, à l'issue d'un jeu interrompu). Pour les élèves, la confrontation entre les diverses solutions fausses des algébristes italiens du 18ème siècle et leurs réfutations successives jusqu'à la solution probabiliste de Pascal et Fermat, se révèle très enrichissante.

Grâce aux textes proposés, les élèves s'investissent dans d'authentiques activités mathématiques, découvrant un exemple de démarche scientifique. Ils résolvent de *vrais* problèmes. Ainsi, des problèmes aussi fondamentaux que la *quadrature du cercle* ou la *trisection de l'angle* ont été abordés par nos élèves à travers des textes d'Archimède et de Descartes.

Le lien entre le développement des mathématiques et celui des autres sciences et techniques est mis en évidence, favorisant des activités pluridisciplinaires.

La présentation du *planétaire* de Huygens nécessite la manipulation de *fractions continuées* pour le calcul du nombre de dents des roues de l'engrenage. De même, le *calcul trigonométrique* est nécessaire pour comprendre le travail de Delambre et Méchain pour la mesure du méridien terrestre au 18ème siècle (*Planétaire*, voir [7], p. 136 à p. 143).

Lire des textes. Comment ?

L'étude de textes originaux permet différents types d'activités : introduction d'une notion nouvelle, réinvestissement des acquis antérieurs, changement naturel de cadre pour résoudre un problème.

Bien sûr, il faut trouver des textes se prêtant à ces activités, répondant aux objectifs des programmes et accessibles aux élèves. Cette « pêche aux textes » ne va pas sans difficultés, nécessitant du temps et de nombreux documents. Parfois, au cours d'une lecture, un déclic se fait : ce texte convient ! Il ne reste plus qu'à bâtir une séquence d'enseignement autour de son étude.

La lecture d'un texte présente en général une double difficulté : mathématique et linguistique. Pour aider les élèves, nous confectionnons des exercices ou un questionnaire reprenant la problématique du texte en termes modernes et expliquant les méthodes et le vocabulaire inhabituels.

Voici, pour vous faire découvrir notre démarche, deux exemples assez différents de telles activités.

Premier exemple :

Introduction aux logarithmes

(T.C. : 1 h 30 environ) .

Je ne reviendrai pas sur les objectifs culturels de ce type de travail. D'un point de vue plus spécifiquement didactique, l'introduction historique permet aux élèves de comprendre l'utilité des logarithmes comme outil de calcul, transformer les produits en sommes pour simplifier les calculs. Cela les aide à ne plus faire de confusions entre In(x+y) et In(xy) , confusions en général fréquentes dans les copies.

La construction de la courbe logarithmique en exercice avant le cours doit les aider à mieux fixer l'image dans leur esprit : l'allure de la courbe et les limites aux bornes sont ainsi mieux retenues. De même, la manipulation de $\log \sqrt{x}$, $\log \sqrt{xy}$, etc. en vue de la construction de la courbe, aide les élèves à acquérir la pratique de ce type de calcul.

Les pages suivantes ont été données aux élèves avant tout cours sur les logarithmes. J'ai un peu développé oralement le premier paragraphe : invention des logarithmes par Napier et utilité pour les calculs ; puis les élèves se sont lancés dans les questions et la lecture du texte.

La question 2 leur a paru difficile : ils ont toujours des difficultés à traduire en langage formalisé une demande formulée en « français ». Les autres questions ont été résolues sans trop de difficultés ; le texte est assez clair, mais sa lecture nécessite malgré tout une aide du professeur.

Le calcul d'un certain nombre de valeurs de x pour f(x) donné (voir question n° 6) permet de manipuler la propriété fondamentale des logarithmes.

A la fin des exercices, les élèves ont construit point par point la courbe représentative de la fonction logarithme décimal et quesques-unes de ses tangentes ; ils en ont déduit certaines propriétés de la fonction logarithme : limites, forme de la dérivée.

Nous avons alors démontré la propriété suivante : *si une fonction dérivable sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *possède la "propriété logarithmique" (transformer tout produit en somme), alors sa dérivée est du type* $x \longmapsto k/x$ *(exercice classique de terminale). La plus simple de ces dérivées possibles étant*

$$x \longmapsto 1/x,$$

il devenait naturel d'étudier une primitive de cette fonction sur $\mathbb{R}^{+*}$, le choix de celle s'annulant en 1 étant justifié par la question 2 (pour assurer la fameuse propriété logarithmique) .

La séance suivante a été consacrée au cours proprement dit, mené de façon tout à fait classique, à ceci près que les élèves savaient par avance ce qui allait être fait : ils ont été capables de donner la définition de la fonction logarithme népérien et d'énoncer les propriétés que nous allions montrer, et dans certains cas de les démontrer.

J'ai pu constater que les élèves avaient bien mémorisé cette courbe logarithmique qu'ils avaient construite eux-mêmes. L'introduction historique leur a sans doute permis de comprendre l'intérêt des logarithmes comme outil de calcul et de retenir ainsi plus facilement la propriété fondamentale.

INTRODUCTION A L'ETUDE DES LOGARITHMES.

Au début du XVII[ème] siècle, l'Ecossais John Napier (ou Neper) introduit les logarithmes ; il s'agit d'une méthode algorithmique de calcul permettant de transformer des suites géométriques en suites arithmétiques, donc de faciliter les calculs, en particulier des astronomes. Briggs introduit vers 1624 systématiquement le logarithme décimal. Nous lirons un extrait d'une présentation de tables numériques par J. OZANAM (1685) (in *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars).

Définition : *On dit que des réels strictement positifs* a, b, c, d *sont en proportion géométrique si et seulement si*

$$a / b = c / d .$$

Question 1 : *Proposer une définition de :* a, b, c, d (réels) sont en proportion arithmétique.

J. OZANAM : *la construction d'une table de logarithmes.*

Les logarithmes sont des nombres en proportion arithmétique, correspondant à d'autres nombres en proportion géométrique, desquels ils sont appelés logarithmes.

Question 2 : *Soit* f *une fonction de* $\mathbb{R}^{+*}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Montrer que, si* f *transforme toute proportion géométrique en une proportion arithmétique, alors* f *transforme toute suite géométrique en une suite arithmétique.* (On pourra vérifier que, si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 0$, alors $1, q, u_n , u_{n+1}$ sont en proportion géométrique.

Nous allons tracer la courbe représentative d'une fonction f continue strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété « logarithmique » :

f *transforme toute proportion géométrique en une proportion arithmétique.*

Comme J. Ozanam, nous choisirons d'étudier f telle que : $f(1) = 0$ et $f(10) = 1$.

Question 3 : *Calculer* :

$f(100)$; $f(1000)$; $f(10\,000)$; $f(10^n)$.

Prog. geom.	Prog. Arith.
1	0. 0000000
10	1. 0000000
100	2. 0000000
1000	3. 0000000
10000	4. 0000000
100000	5. 0000000
1000000	6. 0000000

Comme il est libre de prendre telle progression que l'on voudra, on choisira la plus commode, qui est de prendre la progression décimale pour la progression géométrique et la progression des nombres naturels pour l'arithmétique, en sorte que, pourtant, le premier nombre arithmétique, qui répond au premier géométrique, ou à l'unité, soit 0 , c'est-à-dire que le logarithme de l'unité soit 0 , pour rendre l'usage des logarithmes plus facile : comme vous le voyez dans cette table, où le logarithme de 1 est 0 , de 10 est 1 , de 100 est 2 , de 1 000 est 3 et ainsi de suite ; et parce que, dans la pratique, on a besoin des logarithmes des nombres moyens 2, 3, 4, 5, etc., et que ces logarithmes ne peuvent être exprimés qu'en fractions, on se servira aussi de la progression décimale pour la facilité du calcul, en ajoutant un certain nombre de zéros à chaque terme de la progression arithmétique, plus ou moins selon que l'on voudra avoir des logarithmes plus ou moins exacts, comme vous voyez ici. Ainsi, nous supposerons que le logarithme de 10 est 1,0000000 , que le logarithme de 100 est 2,0000000 , celui de 1 000 est 3,0000000 , etc., en suite de quoi il faut trouver les logarithmes des nombres moyens 2, 3, 4, 5, etc., ce que nous ferons après avoir expliqué la nature et les propriétés des logarithmes dans les propositions suivantes. [...]

PROPRIETES DU LOGARITHME.

Proposition : La somme des logarithmes de deux nombres entiers est égale au logarithme de leur produit, lorsque le logarithme de l'unité est 0.

Proposons par exemple les deux nombres entiers 4, 6, dont le produit est 24. Je dis que le logarithme de 24 est égal à la somme des logarithmes de 4 et de 6, le logarithme de l'unité étant 0. Car, puisque 24 est le produit de 4 et de 6, ces quatre nombres 1, 4, 6, 24 seront en proportion géométrique, c'est pourquoi leurs logarithmes seront en proportion arithmétique, et la somme des deux extrêmes, c'est-à-dire la somme des logarithmes de 1 et de 24, sera égale à la somme des deux moyens ou à la somme des logarithmes de 4 et de 6, et parce qu'on suppose que le logarithme de 1 est 0, le seul logarithme de 24 sera égal à la somme des logarithmes de 4 et de 6, qui produisent 24. Ce qu'il fallait démontrer. [...]

Question 4 : a) *Montrer que*

$$f(15) = f(3) + f(5),$$

et que, pour x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$,

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

b) *En déduire, pour* x *dans* $\mathbb{R}^{+*}$, *l'expression de*

$$f(1/x) \quad et \quad f(\sqrt{x})$$

en fonction de $f(x)$.

c) *Exprimer, pour* a *et* b *dans* $\mathbb{R}^{+*}$,

$$f(\sqrt{ab})$$

en fonction de $f(a)$ *et* $f(b)$.

Question 5 : *Résoudre dans* $\mathbb{R}^{+*}$ *:*

a) $f(x) = 1/2$,
b) $f(x) = 1/4$,
c) $f(x) = 5/4$.

Question 6 : *Compléter le tableau suivant :*

x	1/10				1		$\sqrt{10}$		10			
$f(x)$	−1	−3/4	−1/2	−1/4	0	1/4	1/2	3/4	1	5/4	3/2	7/4

Question 7 : *Dans un repère orthonormé, unité 2 cm, tracer la courbe représentative de la fonction* f.

Question 8 : *Pour les points* M *de la courbe d'ordonnées :*

$$-1\ ,\ -3/4\ ,\ -1/2\ ,\ -1/4\ ,\ 0\ ,\ 1/2\ ,\ 7/4\ ,$$

a) *Placer le point* M' *de coordonnées* $(0\ ;\ y_M - 0{,}43)$. *Attention ! L'unité est 2 cm.*

b) *Tracer la droite* (MM').

c) *Quelle position semble occuper la droite* (MM') *par rapport à la courbe ? Quel est le coefficient directeur de la droite* (MM') *? En déduire* $f(x)$.

Deuxième exemple :

Triplets pythagoriciens à propos d'un texte de Diophante

(classes de $3^{ème}$ ou de Seconde)
(sujet de devoir).

Ce travail a été conçu pour des élèves de troisième, mais il peut être intéressant également pour des élèves en début de seconde.

Les questions s'articulent autour d'un court texte du traité *Arithmétique* de Diophante figurant au début du problème. Dans ces lignes, Diophante explique comment il trouve *quatre triangles rectangles de même hypoténuse, dont les côtés sont des nombres entiers.*

Le travail des élèves ne nécessite qu'un léger bagage de connaissances :

— le théorème de Pythagore et sa réciproque,

— des notions de trigonométrie élémentaire,

— les identités remarquables.

Cette activité a généralement été proposée à la fin du premier trimestre, sous forme de *devoir à la maison*, suivant la méthode suivante :

— la première partie, précédant la lecture du texte de Diophante, est proposée d'abord à tous les élèves qui, en général, comprennent bien le problème, ainsi que les méthodes pour le résoudre.

— ensuite, il est souhaitable, lors d'une séance en classe, de tirer au clair les idées de cette première partie avant de lire et d'expliquer le texte de Diophante.

— alors, la deuxième partie du travail écrit consiste à répondre (en tout ou en partie suivant le niveau de l'élève) aux questions posées sur le texte de Diophante.

Ce travail a toujours semblé intéresser vivement les élèves ; au-delà du problème particulier de Diophante, il résout un vrai problème de théorie des nombres, dont l'intérêt apparaît immédiat à chacun :

existe-t-il des triangles rectangles – autres que le célèbre « 3 , 4 , 5 » *– dont les côtés soient des nombres entiers ?*

De plus, l'alternance des questions permet un va-et-vient entre le cadre algébrique et le cadre géométrique. La figure montrant les quatre triangles rectangles inscrits dans le même cercle est parlante et les élèves se sentent récompensés de leurs efforts.

La dernière question est difficile, mais intéresse quelques élèves à l'esprit curieux.

TRIPLETS PYTHAGORICIENS.

On appelle ainsi tout triplet (x,y,z) *d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation* $x^2 + y^2 = z^2$.
Le plus simple et le plus connu est le triplet (3,4,5) *, ou encore son « jumeau »* (4,3,5) .

1. Vérifier que (6,8,10) et (9,12,15) sont eux aussi des triplets pythagoriciens.

2. Montrer que, si (x,y,z) est un triplet pythagoricien, et k un entier naturel non nul, alors le triplet (kx,ky,kz) est lui aussi pythagoricien.

3. Construire (au compas) les triangles t_1 , t_2 , t_3 , t_4 de côtés respectifs (3,4,5) , (6,8,10) , (9,12,15) , (5,12,13) . Vérifier (à l'équerre) qu'ils sont tous rectangles. Ce résultat était-il prévisible ? Prouver à l'aide de la trigonométrie que les triangles t_1 , t_2 , t_3 sont « semblables », c'est-à-dire ont les mêmes angles, mais que t_4 n'est pas semblable aux autres.

Exercice : Trouver deux triangles rectangles de côtés de l'angle droit différents, mais de même hypoténuse, et dont tous les côtés soient des nombres entiers.

Une méthode consiste à choisir deux triplets pythagoriciens non proportionnels, et à définir à partir d'eux de nouveaux triplets (a,b,c) *et* (a',b',c') *qui leur soient proportionnels et tels que, de plus,* $c = c'$.

DIOPHANTE (3ème siècle après J.C) utilise la méthode suivante pour obtenir des triplets pythagoriciens (méthode déjà connue d'Euclide) :

— *choisir deux entiers non nuls* m *et* n $(m > n)$,
— *calculer :*

$$x = m^2 - n^2$$
$$y = 2mn$$
$$z = m^2 + n^2$$

On obtient, dit Diophante, un triplet (x,y,z) *pythagoricien.*

a) Vérifier la validité du procédé de Diophante pour quelques couples (m,n) : par exemple (2,1) , puis (3,2) , puis un couple quelconque de votre choix.

b) Prouver que, ainsi que le dit Diophante, la méthode est générale, c'est-à-dire que, quel que soit le couple (m,n) , le triplet (x,y,z) obtenu vérifie bien la relation :

$$x^2 + y^2 = z^2 .$$

c) Cette méthode (appelons-là méthode (D)) permet d'obtenir une infinité de triplets pythagoriciens, mais elle ne permet pas de les obtenir tous.

Toutefois, si un triplet ne peut s'obtenir directement par la méthode (D) *, alors on peut l'obtenir par proportionnalité à partir d'un triplet qui, lui, peut s'obtenir par la méthode* (D) . *Appelons* (P) *cette deuxième méthode.*

Exemple : Montrer que le triplet (9,12,15) peut s'obtenir par la méthode (P) , mais qu'aucun couple (m,n) d'entiers ne permet de l'obtenir directement par la méthode (D).

PETIT PROBLEME

PETIT PROBLEME proposé (et résolu) par Diophante lui-même, dans le livre III de son traité « les Arithmétiques » .

N.B. Diophante ne le précise pas dans ce texte, mais il faut comprendre qu'il cherche comme solution de son problème quatre triplets de nombres entiers naturels.

cherchons quatre triangles
rectangles ayant les hypoténuses égales ; ce qui revient à divi-
ser [quatre fois] un carré en deux carrés.

Etablissons d'abord deux triangles rectangles compris sous les (4)
moindres nombres, tels que 3, 4, 5, et 5, 12, 13 . Multiplions
chacun des nombres ainsi choisis par l'hypoténuse de l'autre
triangle. Dès lors, le premier triangle sera 39, 52, 65, le
second sera 25, 60, 65 ; et ils sont droits en ayant les hypoté-
nuses égales. (9)

D'autre part, 65 se partage naturellement en carrés de deux
manières, notamment en 16 et 49 , et encore en 64 et en 1
unité. [.....]

Prenons maintenant les racines des nombres choisis, 49 et 16 ;
ces racines sont 7 et 4, et formons un triangle rectangle au
moyen des deux nombres 7 et 4. Ce triangle est 33, 56, 65 . (15)
Prenons semblablement les racines 8 et 1 de 64 et de 1
unité, et formons de nouveau, au moyen de ces nombres, le tri-
angle rectangle dont les côtés sont 16, 63, 65 .

On a donc obtenu quatre triangles rectangles ayant les hypo-
ténuses égales.

QUESTIONS :

1. Montrer, en étudiant d'abord les (4) à (9), puis les lignes (10) à (15), que Diophante, pour trouver deux des quatre triangles cherchés, utilise la méthode (P) ; et, pour trouver les deux autres, la méthode (D) . Préciser.

2. Vérifier la conclusion (lignes 19-20), puis représenter les quatre triangles rectangles inscrits dans un même cercle, à une échelle convenable (par exemple 1 cm pour 5 unités).

3. *En première lecture, nous n'avons pas reproduit une phrase de Diophante (voir les crochets à la fin de la ligne 12). Voici le texte complet :*

D'autre part, 65 se partage naturellement en carrés de deux manières, notamment en 16 et 49 , et encore en 64 et un 1 unité : ce qui provient de ce que le nombre 65 est le produit de 13 et de 5 , lesquels se partagent respectivement en deux carrés.

Pour comprendre cette explication, à première vue assez sibylline, on commencera par vérifier les identités :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$$
$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$$

Qu'obtient-on pour $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 1$?

Pour les chercheurs : En partant d'un nombre entier qui, tel 65 soit le produit de deux entiers, eux-mêmes sommes de deux carrés, il doit être possible de trouver une autre solution au problème de Diophante. Bon courage !...

Nous avons choisi ces deux exemples pour illustrer la diversité des travaux proposés à nos élèves.

Les deux textes eux-mêmes sont de nature totalement différente : Diophante, selon son habitude, résout un problème ponctuel alors qu'Ozanam fait un exposé pédagogique d'une théorie nouvelle à son époque. Les utilisations qui en ont été faites sont également différentes.

On notera de plus que la compréhension du texte de Diophante nécessite des passages entre les cadres algébrique (triplets pythagoriciens) et géométrique (triangle rectangle), ce qui est, pour nos élèves, à la fois formateur et plaisant.

Le texte d'Ozanam, lui, se situe exclusivement dans un cadre opératoire, mais son utilisation impose une interprétation dans les cadres fonctionnel et graphique pour rejoindre les objectifs du cours.

Nous menons ce type d'activité à tous les niveaux du secondaire et sur des textes d'accès plus ou moins faciles ; certains textes peuvent présenter des difficultés de lecture pour les élèves (textes d'Archimède ou Newton par exemple), que le professeur doit aplanir en travail dirigé. Mais ce n'est pas le cas ici ; ces deux textes sont assez faciles à lire, sans trop de difficultés de vocabulaire et leur utilisation en classe ne nécessite pas une formation en histoire des mathématiques trop approfondie. Il faut cependant avoir une idée de l'état des connaissances à l'époque du texte. Pour le texte d'Ozanam, il faut savoir que la notion de fonction n'avait pas émergé clairement au XVII^{ème} siècle et Ozanam établit des tables de logarithmes ; il n'étudie pas ce que nous nommons la fonction « logarithme décimal ». Il est également utile, entre autres pour répondre aux questions des élèves, de connaître une chronologie – même succincte – de l'invention des logarithmes : entre 1624 et 1629 paraissent les

DIOPHANTE	OZANAM
devoir à la maison	travail en classe
réinvestissement d'acquis antérieurs	introduction de notion
activité de prolongement et de recherche en théorie des nombres	séquence intégrée à la logique d'un cours
exercices préalables à la lecture du texte	lecture directe du texte découpé et entremêlé de questions
niveau collège	niveau lycée

Comparaison des deux exemples

tables de Neper, qui connaissent un succès immédiat comme outil de calcul (en particulier pour les astronomes). Ce n'est que plus tard que le logarithme acquiert son statut de fonction ; par exemple chez Euler.

Quant au texte de Diophante, il peut être l'occasion de dire aux élèves que déjà les Egyptiens se préoccupaient de la recherche d'entiers naturels satisfaisant l'égalité que nous symbolisons par :

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

On peut aussi faire remarquer que Diophante se contente de trouver quatre solutions particulières, mais que les méthodes modernes de l'algèbre permettent de trouver toutes les solutions.

Même si notre évaluation de l'impact de ce type de démarche sur les processus d'apprentissage reste intuitive, nous sommes de plus en plus convaincus de leur intérêt pour les élèves. Ceux-ci se montrent très actifs et très motivés ; très motivés la lecture de textes anciens éveille leur curiosité et suscite leurs questions, donne l'occasion de réfléchir sur les mathématiques et de les faire vivre dans une époque et une culture.

Nos élèves font connaissance avec quelques savants illustres et avec certains des problèmes qu'ils se posaient et qu'il résolvaient parfois magistralement. Et, dans leur mémoire, des racines carrées un peu rébarbatives côtoieront une science à visage humain.

Bibliographie

[1] A. DAHAN et J. PEIFFER : *Une histoire des mathématiques*, Routes et dédales, Points-Science, Seuil.

[2] P. DEDRON et J. ITARD : *Mathématiques et mathématiciens*, Magnard, Paris, 1959.

[3] M.L HOCQUENGHEM, C. et D. MISSENARD, F. MONNET, A.M. SERFATI, G. TARTARY : *Histoire des mathématiques pour les collèges*, Cedic, Paris, 1980.

[4] PASCAL : *Œuvres complètes*, éd. L. Lafuma, Seuil, Paris, 1963 (collection l'intégrale).

Brochures IREM :

[5] *Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques*, Bulletin inter-IREM Epistémologie, IREM de Lyon, 1988.

[6] M. : A.T.H. : Mathématiques : *Approche par des textes historiques*, Brochure n° 61, IREM de Paris VII.

[7] M. : A.T.H. : *tome 2*, Brochure n° 79, IREM de Paris VII.