REPERES - IREM . n°3 - avril 1991

CHANGER UN TERME DE MEMBRE EN CHANGEANT DE SIGNE

Jean HOUDEBINE
Irem de Rennes

L'enseignement d'une règle d'action concernant les équations en Quatrième

*Cet article est le compte rendu d'une recherche faite à l'*I.R.E.M. de Rennes par M. ALARD, M.F. CARNOT, P. COQUIL, J. HOUDEBINE, J. JULO, J. LAFFORGUE, J. LARIVAIN, P. PERON, A. LE HENO, F. MALLEDANT *et* A. LE POCHE *en* 1986-87 *et* 1987-88.

I – Qu'est-ce qu'une règle d'action.

Au cours de l'apprentissage d'un concept ou dans une activité de résolution de problème, les élèves, comme d'ailleurs les adultes, parallèlement à la mise en œuvre de certaines représentations, se créent des règles d'action.

Il s'agit pour l'élève, dans des situations particulières, d'avoir des réponses qui ne demandent qu'une mobilisation minimum des connaissances. Ces réponses ne sont pas imposées a priori de l'extérieur, mais elles paraissent pertinentes à celui qui les emploie pour résoudre le problème posé. Elles répondent au « principe d'économie » qui est sous-jacent à toute activité humaine.

On peut dire que l'action est pratiquement impossible devant une situation ou un problème si on ne possède pas une panoplie suffisante de règles d'action.

Les règles d'action utilisées par les élèves sont extrêmement variées :

— Elles dépendent des contenus mathématiques de la situation ; par exemple, dans les problèmes de proportionalité on utilise *la règle de trois* ou on fait des *tableaux*. En algèbre cela peut aller de « techniques » très simples, comme :

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2,$$

à des algorithmes comme les *méthodes de résolution d'équations*. En géométrie on trace des *figures dans des positions privilégiées* : un triangle ABC a toujours une base BC horizontale et un sommet C situé au-dessus.

— Elles peuvent être utiles et efficaces ou *conduire à des erreurs*, comme le montrent les exemples ci-dessus.

— Elles peuvent être de nature très différente. Par exemple certaines sont fondées sur des résultats mathématiques comme la *règle de trois* ; d'autres relèvent de considérations heuristiques comme les tracés particuliers en géométrie ; d'autres encore peuvent provenir du *contrat didactique*, comme : « il faut utiliser toutes les données du problème pour sa solution ».

— Parmi les règles d'action utiles acquises par les élèves, beaucoup ne font l'objet d'aucun apprentissage.

Il est évident que les problèmes d'enseignement qui se posent dépendent essentiellement de la règle d'action envisagée.

II – L'objet de la recherche.

La question posée au départ était « *comment enseigner efficacement une règle d'action faisant l'objet d'un apprentissage explicite* ». Des travaux antérieurs nous avaient convaincus que beaucoup d'erreurs, d'incompréhensions et même de blocages proviennent, dans le cas d'élèves en difficulté, d'une mauvaise maîtrise de règles d'action. En particulier un enseignement qui consiste à *énoncer des règles* puis à les appliquer systématiquement dans des exercices conduit trop souvent à une situation d'échec. Il faut citer ici l'exemple de la *règle de trois* qui était enseignée à l'école élémentaire et ne conduisait pas la moitié des enfants à une bonne maîtrise de la proportionnalité. Devant cet échec la règle de trois a été souvent remplacée par les tableaux de proportionnalité, ... pour un résultat sensiblement identique.

Dans les deux cas, l'apprentissage était fondé sur la mise en place d'une seule règle d'action. L'échec peut s'expliquer alors aussi bien par l'absence d'un contrôle fondé sur des représentations adaptées qu'à une mauvaise compréhension des techniques d'utilisation de cette règle d'action. En revanche, on peut penser que, pour une notion comme la proportionnalité, susciter des procédures variées par la résolution de problèmes, et éventuellement les institutionnaliser, contribue de manière significative à l'apprentissage de cette notion.

Il y a en algèbre beaucoup de règles d'actions qui font l'objet d'un apprentissage ; par exemple : les *identités remarquables*, les *techniques de mise en facteurs*, les *techniques de résolution d'équations*, etc. Finalement nous avons choisi de nous intéresser aux équations, car il nous a semblé que, dans ce domaine mathématique, les règles d'action jouaient un rôle particulièrement important et simple. Nous pensions dans un premier temps examiner le cas de plusieurs règles d'action. Mais l'expérience nous a montré qu'il valait mieux approfondir la réflexion sur une seule règle.

Le choix s'est fait sur la *transposition* [1] à la fois parce que cette règle est incontournable et parce qu'elle est la cause apparente de beaucoup d'erreurs en 3ème.

III – La démarche suivie.

Pour conduire notre analyse, nous avons préféré une méthodologie légère car dans des problèmes aussi ouverts, le premier but est de rejeter ou de renforcer les nombreux *a priori* et de dégager quelques idées force qui peuvent faire ultérieurement l'objet d'une étude plus minutieuse. Nous préparions des fiches qui étaient proposées à des groupes d'élèves observés par l'un d'entre nous, puis nous mettions en commun nos réflexions. Nous avons complété nos informations par les interviews de 40 élèves de 5ème, 4ème et 3ème au cours de la deuxième année de travail.

Pendant un an nous avons essayé d'isoler le plus possible le problème de l'enseignement de la transposition. L'analyse a porté en particulier sur

— les prérequis nécessaires à une bonne maîtrise,

— le rôle des « *justifications* » données par l'enseignant,

— les moyens de contrôle que possèdent les élèves.

Au bout d'un an il est apparu évident que c'est l'enseignement de tout le chapitre sur les équations qui était en jeu. En d'autres termes, il ne s'agissait plus « *d'enseigner la transposition* » mais de réfléchir à l'enseignement des équations pour que la transposition y trouve sa meilleure place.

Cette constatation est intéressante car elle donne des indications sur une méthodologie qu'il serait raisonnable de suivre dans l'étude d'autres règles d'action. Nous en reparlerons dans le § VI.

IV – Une analyse du statut de la transposition.

Cette analyse ne s'est pas faite *a priori*. Elle s'est développée aussi bien par les discussions que nous avions à propos des activités que nous mettions au point, qu'à la lumière des réactions des élèves.

1) Proposons d'abord une définition (à l'usage des enseignants) dans laquelle nous avons souligné les mots qui nous ont paru les plus importants :

DÉFINITION. *La transposition est la règle d'action qui consiste, **pour obtenir des égalités ou des inégalités équivalentes,** à déplacer un **terme** de la somme qui apparaît dans l'un des membres de l'égalité ou de l'inégalité pour le placer dans l'autre membre en le changeant de signe.*

2) Les problèmes où on la rencontre :

Un recensement des situations où cette règle est utile montre que tôt ou tard les élèves sont appelés à l'utiliser et qu'on ne peut donc en aucun cas faire l'impasse sur son enseignement. Nous présentons ces situations dans l'ordre où elles se présentent dans l'enseignement :

— Résolution d'équations et d'inéquations du premier degré à une inconnue à coefficients entiers ou décimaux. Le but est de « *mettre les x d'un côté et le reste de l'autre* ».

[1] *Transposition* = changement de membre d'un terme en changeant de signe dans une équation.

— Résolution d'équations où interviennent des vecteurs.

— Résolution d'équations et d'inéquations du deuxième degré ou de degré plus élevé. Le but est ici de mettre « *tout dans le premier membre* » (ou bien « *tout dans le second membre* »).

— Démonstration d'une égalité (ou d'une inégalité). Il s'agit ici de remplacer une égalité par une égalité équivalente plus facile à démontrer. Cette tâche paraît *a priori* plus simple que les précédentes puisqu'elle ne nécessite pas la notion d'équation, mais dans la pratique on ne la rencontre qu'à un niveau assez élevé.

— Equations de droites, puis équations de courbe. Il s'agit par exemple de passer de la forme :

$$ax + by + c = 0,$$

à la forme

$$y = \frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

puis plus tard, de l'équation d'un cercle :

$$x^2 + y^2 = 1,$$

à la forme

$$y^2 = 1 - x^2.$$

3) Cette règle d'action du point de vue mathématique a deux fondements.

D'une part, elle est une conséquence de la compatibilité de l'addition avec les égalités et les inégalités, dont voici par exemple un énoncé simple (à l'usage des enseignants) :

si $A = B$ *alors* $A + a = B + a$,

si $A \leq B$ *alors* $A + a \leq B + a$.

Dans le cas des équations cette compatibilité est utilisée dans la notion d'équations équivalentes, c'est-à-dire d'équations ayant les mêmes solutions.

D'autre part, elle s'appuie sur des propriétés très techniques des expressions algébriques, dont l'une pourrait s'énoncer : « *Si on a une somme de termes, on peut faire disparaître l'un des termes de cette somme en lui ajoutant ce terme avec un signe opposé* ».

Cette analyse indique bien les points d'ancrage nécessaires.

D'une part une solide maîtrise des expressions algébriques : reconnaissance des termes et des facteurs, lien des signes « + » et « – » avec les termes qui les suivent, bonne utilisation des parenthèses, bonne connaissance de toutes les règles implicites de présentation, etc. D'autre part, une bonne compréhension de la notion d'équations équivalentes .

V - Une étude du comportement des élèves.

Nos observations ont remis en question nos nombreux *a priori*. Nous mettons ici les points qui nous ont le plus frappés.

1) Les élèves appréhendent mal la structure d'une expression algébrique ; en particulier le repérage des termes dans une somme algébrique complexe n'est pas immédiat. Par exemple dans

$$2a + 3 - 5 \times b - 1$$

le quatrième terme peut être b. Ils connaissent incomplètement les règles implicites d'écriture : par exemple « *quand supprime-t-on les signes multipliés ?* », « *préfère-t-on* $x \times 4$ *à* $4x$ *?* », etc.

2) La transposition n'apparaît pas « naturellement » en 5ème et en 4ème.

Les élèves de 3ème donnent souvent l'impression d'utiliser la transposition comme s'ils la connaissaient depuis longtemps (même si cette utilisation est erronée) et l'idée vient que cette règle d'action apparaît spontanément dès que l'on travaille sur la résolution des premières équations. Des observations sur des élèves de 5ème et de 4ème montrent qu'il n'en est rien.

D'abord elle ne sert à rien pour résoudre les « petites équations ».

Pour $x + 5 = 7$ le résultat est évident : $2 + 5 = 7$. On trouve souvent la même attitude devant $2x + 3 = 5$.

Pour $x + 29 = 42$ beaucoup d'élèves pensent en terme de soustraction « *pour trouver le deuxième terme de la somme il faut soustraire du total le premier terme* ».

Pour beaucoup d'équations simples quelques essais de valeurs donnent le résultat.

Pour les équations plus compliquées, l'idée de « *simplifier* » les deux membres par deux termes égaux ne vient pas non plus immédiatement à l'esprit des élèves ; par exemple en 4ème devant la question :

trouver deux nombres entiers compris entre -3 *et* 3 *tels que*

$$4x^2 - x - 3(x+1) = 2 - 3(x+1) + 3x^2 .$$

trois groupes sur cinq ne pensent pas à simplifier et feront tous les calculs séparément sur chacun des membres, qu'ils utilisent ou non la calculatrice.

3) La notion d'*équations équivalentes* se heurte à une conception dissymétrique des équations.

En effet, beaucoup d'élèves, devant une égalité comme $2x + 7 = 22$, *pensent au premier membre comme à une opération et au second membre comme au résultat.* On a alors des arguments du type : « **j'ai déjà 7 il me faut 15 pour obtenir 22 donc il faut que $2x$ fasse 15** ».

Si une équation comporte des x dans les deux membres, elle est souvent comprise comme la donnée de deux opérations dont les résultats sont identiques. Cela peut conduire, devant l'équation

$$4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 + 2 ,$$

à une argumentation du type : « *Pour que le résultat des deux côtés soit le même il suffit que* $4x + 1$ *donne la même chose que* 2 ». Cependant cette manière de voir une équation conduit rarement à une simplification dans une équation comme $2x = x + 2$, qui dans l'optique des équations équivalentes est pourtant très simple.

Cet obstacle didactique, c'est-à-dire lié au travail fait par les élèves dans les années antérieures, ne serait-il pas doublé d'un obstacle épistémologique? Il s'agit en effet de passer d'une conception de l'égalité comme lien entre deux objets (éventuellement variables), à une conception beaucoup plus formelle dans laquelle les deux membres ne sont plus deux entités bien séparées, mais au contraire peuvent être modifiés l'un par l'autre par la transposition.

4) Quand les élèves rencontrent pour la première fois la transposition, elle a le sta-

tut d'une *procédure*, c'est-à-dire d'une action réfléchie, ou encore d'une opération légale parmi d'autres, qui permet de transformer les équations sans perdre ni gagner des solutions.

En revanche, dès que la transposition est devenue plus familière, après avoir été appliquée sur un nombre suffisant d'exemples, elle se transforme en une véritable règle d'action. En fin de 4ème et en 3ème la transposition devient une réponse immédiate, un réflexe, devant tous les problèmes de résolution d'équations. Le plus souvent la réflexion n'y a pas sa part et les justifications ne sont plus d'aucun secours. Il est très difficile à ce stade d'agir pour réduire les erreurs observées (cf [4] par exemple).

5) Le rôle des justifications.

Dès que la règle est effectivement énoncée par l'enseignant, celui-ci essaie naturellement d'apporter des justifications pour la faire mieux assimiler :

— On peut ajouter à chaque membre d'une égalité la même quantité. Si on veut supprimer un terme d'un côté il suffit d'ajouter l'opposé de ce terme à chaque membre.

— On peut retrancher à chaque membre la même quantité.

Il semble bien que les élèves ne ressentent guère cela comme des justifications mais plutôt comme d'autres procédures qui conduisent au même résultat. Ces procédures deviennent aussi pour certains des règles d'action.

Cette remarque est d'autant plus intéressante que les enseignants attachent beaucoup d'importance à la présentation de ces justifications. Par exemple certains refusent d'employer l'expression: « *retrancher des deux membres la même quantité* » et préfèrent parler « *d'ajouter l'opposé* ». Il semble bien que du point de vue des élèves, et en particulier des élèves en difficulté, tout cela ait bien peu d'importance ...

6) Quelques représentations de la transposition.

Comme toujours il est très difficile de se faire une idée des représentations des élèves. Dans la pratique, les enseignants en proposent deux.

Soit on propose à l'élève l'image de la balance : il y a équilibre et si on retire ou si on ajoute la même chose de chaque côté l'équilibre n'est pas rompu. L'expérience montre que cette image n'apporte pas d'éclaircisssements à tous les élèves. Cela peut s'expliquer parce que les concepts physiques mis en jeu sont sans doute aussi compliqués, voire plus compliqués, que la notion d'équation (d'autant plus que les balances à deux plateaux disparaissent peu à peu de notre environnement).

Une autre manière de présenter la transposition, qui est peut-être mieux fondée, est d'associer plusieurs équations à un même problème et de constater qu'on passe d'une équation à une autre par une transposition. Au cours de la résolution de « petits problèmes » apparaît assez naturellement, en effet, une opération qu'on pourrait appeler une *transposition sémantique.* Par exemple le problème :

Dans la cour de l'école maternelle il y a deux bacs à sable, l'un est carré et l'autre est un triangle équilatéral. Le carré et le triangle ont des côtés de même mesure. Le périmètre du bac carré *a 2,7m de plus que celui du bac triangulaire. Trouvez la mesure du côté du carré et du triangle.*

peut conduire un élève de quatrième à l'équation $4x = 3x + 2,7$. Des élèves qui n'ont pas su faire de transposition sur des équations de ce type en dehors de la résolution d'un problème concret, ont obtenu très facilement **1 *côté* = 2,7** à partir de : **4 *côtés* = 3 *côtés* + 2,7** . Cette opération est étroitement liée à la représentation du problème, et très peu d'élèves reconnaîtraient leur action dans « *j'ai changé un terme de membre en changeant de signe* » ou « *j'ai retranché* 2,7 *à chaque membre* ». Cependant il paraît assez raisonnable de s'appuyer sur ce contrôle sémantique pour conduire l'élève à une représentation de la transposition où intervient l'idée : les équations sont équivalentes puisqu'elles correspondent au même problème.

On peut s'appuyer simultanément sur les deux représentations en proposant par exemple le problème :

Pierre a dans son atelier plusieurs billes d'acier identiques. Il voudrait bien trouver la masse d'une bille. Il a un morceau de plomb de 3 kg et un autre de laiton de 2,7 kg. Il s'aperçoit qu'une bille et le morceau de plomb ont la même masse que quatre billes et le morceau de laiton. Quelle est la masse d'une bille ?

Cela permet en particulier à l'enseignant d'utiliser l'image de la balance dans le cadre du problème sans lui donner un caractère excessivement institutionnel.

7) Rappelons que la notion de variable est aussi la source de nombreuses difficultés (cf. {2} par exemple).

V – Les conséquences pour l'enseignement des équations en 4ème. Une proposition de progression.

Ces observations nous conduisent à proposer des repères pour réaliser une progression.

a) *Un travail de « préparation lointaine » est nécessaire sur deux plans :*

— la maîtrise des expressions algébriques car, repétons-le, toutes les règles qui serviront en 3ème dans la résolution d'équations sont fondées sur une reconnaissance de la structure des expressions algébriques. Il ne faut pas confondre cela avec le calcul algébrique. Il s'agit en effet de rendre les élèves capables de repérer dans une expression algébrique les principaux éléments de sa structure : *est-ce une somme ?, est-ce un produit ?, quels sont les termes ?, les expressions* $-a+b$ *et* $b-a$ *sont-elles égales ?,* a *est-il un terme dans ces expressions ou est-ce* $-a$ *(difficultés liées à l'image du signe –) ?*

— la maîtrise de la notion de variable et d'équation. En particulier il faut se donner les moyens de supprimer la représentation : le premier membre est une opération, le second membre un résultat.

b) *Un travail préparatoire sur la transposition elle-même.*

Par des activités adaptées : résolutions d'équations « *lourdes* » par tâtonnement, rapprochement d'équations et problèmes, il faut arriver à faire « *découvrir* » la transposition et les règles d'action voisines : simplification, ajout de quantités égales, etc. Comme nous l'avons déjà dit, cela est plus difficile que nous le pensions et nécessite des activités très bien adaptées (cf. [3]).

c) *Un cours centré sur la notion « d'équations équivalentes »*, d'abord comme équations correspondant au même problème, puis comme équations ayant les mêmes solutions. Cela va contre l'évolution des manuels dont beaucoup ne parlent pas d'équations équivalentes. On peut par exemple proposer des énoncés dont le seul objet est de construire des équations équivalentes et de dégager les règles qui permettent d'en construire.

Cette démarche est indispensable si l'on veut éviter que ne se mettent en place des idées implicites fausses. Par exemple, pour un élève de 4ème, il paraît aussi naturel pour obtenir des équations équivalentes « *d'élever au carré les deux membres* » que de faire une transposition.

d) *Enseigner explicitement dans ce cours la transposition.*

Plutôt que de parler de justifications, faire un travail approfondi sur l'ensemble des règles d'action ou des procédures utilisées dans la résolution des équations.

Là encore cela va à l'encontre de l'évolution récente. De plus en plus de livres ne parlent nulle part de la transposition.

Nous ne croyons pas que l'énoncé de la règle suivi des justifications habituelles soit une manière efficace d'enseigner la transposition, même après la préparation que nous préconisons ci-dessus. Il faut partir des expressions des élèves. Rappelons que les équations trop simples ne relèvent pas de la transposition. C'est donc à partir d'une ou plusieurs équations suffisamment complexes qu'il faut faire expliciter par les élèves leurs procédures ; à partir de ces formulations, un travail approfondi doit être fait sur toutes les règles d'action qui interviennent dans la résolution de ces équations, sur leurs différentes formulations et sur leur efficacité.

VI – Comment enseigner les règles d'action qui font l'objet d'un apprentissage explicite.

Du travail fait à propos de la transposition, quelques points méthodologiques nous semblent se dégager pour l'étude d'autres règles d'action. On peut penser par exemple à :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

qui conduit très souvent à :

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2.$$

a) *Une démarche possible.*

Comme nous venons de le voir ce n'est pas une tâche facile que d'étudier l'enseignement d'une règle d'action. Trois volets nous paraissent complémentaires dans ce type de recherche.

1) Une analyse mathématique fine du statut de la règle qui permette de repérer, d'une part, *tous les prérequis nécessaires à un bon fonctionnement*, d'autre part, *les*

fondements théoriques de cette règle et enfin *toutes les règles voisines et toutes les formulations de ces règles*.

2) Une analyse du comportement des élèves. C'est au moment – ou juste avant – l'apprentissage de la règle que cette analyse paraît la plus profitable. Elle peut se faire à partir d'activités où la règle est *a priori* nécessaire.

3) La mise au point d'activités pour différents objectifs :

— mettre en place les prérequis nécessaires au bon fonctionnement,

— faire apparaître « *spontanément* » la règle d'action dans des situations significatives

— introduire le cours sur cette règle d'action et son environnement.

b) *Des obstacles à éviter.*

1) Il ne faut pas essayer d'isoler la règle d'action de son contexte mais au contraire réfléchir aux modifications de l'enseignement du contexte qui peuvent en améliorer la maîtrise.

2) Comme nous l'avons remarqué pour la transposition, les règles d'action dont nous parlons ici naissent de procédures réfléchies. C'est sur ces procédures que l'action de l'enseignant peut être efficace. En d'autres termes, il faut que l'enseignant renforce les bonnes procédures et neutralise les procédures erronées dès qu'elles font naturellement leur apparition, afin d'éviter que de mauvaises règles d'action s'installent, plutôt que d'essayer de supprimer après coup ces mauvais réflexes par des exercices répétitifs.

3) Les exercices répétitifs peuvent sans doute être un moyen de rendre très performante une règle d'action déjà solidement implantée. En revanche, ils ne sont d'aucun secours pour l'apprentissage initial, car ils éloignent l'élève de la réflexion indispensable au bon fonctionnement ultérieur de la règle.

4) L'institutionnalisation de la règle est un point à ne pas négliger. Un énoncé rapide ne suffit pas. Une solution est de prendre en compte tous les énoncés proposés par les élèves, de replacer la règle parmi d'autres règles d'action voisines et de faire un travail de comparaison sur l'efficacité, la clarté des énoncés, le champ d'application, etc.

5) Les justifications habituelles sont d'un piètre secours pour les élèves en difficulté.

6) Le temps pris pour enseigner convenablement une règle d'action n'est pas du temps perdu. D'une part l'expérience nous a montré que la mise en place des prérequis, le travail des élèves sur des activités adaptées capables de faire rencontrer la règle, permettent de gagner par la suite beaucoup de temps sur le cours. D'autre part, à long terme, l'investissement est encore plus rentable puisqu'il diminue les efforts à faire pour supprimer les règles d'action fausses.

Bibliographie

[1] *Les élèves en difficulté dans le 1er cycle de l'enseignement secondaire pour une intervention didactique différenciée* par J. HOUDEBINE et J. JULO.

Revue Française de Pédagogie, n° 84 juillet-août-septembre 1988.

[2] *Petit x* , 1984 n° 5, édité par l'I.R.E.M. de Grenoble.

[3] *Vers les équations.*

Fascicule édité par l'I.R.E.M. de Rennes, 1990, 110 p.

[4] *Analyse des erreurs et difficultés constatées dans les classes de seconde en calcul algébrique.*

Fascicule édité par l'I.R.E.M. de Rennes, 1990, 93 p.