REPERES - IREM . n°2 - janvier 1991

HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

Aperçu historique sur les nombres relatifs

REPERES - IREM . n°2 - janvier 1991

APERÇU HISTORIQUE SUR LES NOMBRES RELATIFS

Les relatifs : quelle Histoire !

D. GAUD et J.P. GUICHARD
Irem de Poitiers

I — L'usage des Relatifs en Mathématiques

Ce qui est à noter en premier est une énorme différence due à un fait de civilisation.

1. En Chine

Les Chinois ont utilisé depuis le 1er siècle de notre ère les nombres négatifs pour faire leurs calculs et résoudre des équations [1] ; ces nombres ne leur posent aucun problème : ils sont représentés par des baguettes noires et les positifs par des baguettes rouges que l'on manipule sur un échiquier pour résoudre tous les problèmes. Les règles de manipulation des nombres relatifs (addition, soustraction, multiplication) sont connues et utilisées constamment pour résoudre des systèmes d'équations à plusieurs inconnues [2].

2. En Inde

Les Indiens ont aussi très tôt utilisé les négatifs pour résoudre leurs équations. Au VIIème siècle Bhramagupta donne la règle suivante « *une dette retranchée de zéro devient un bien et un bien retranché de zéro devient une dette* » [3].

3. En Occident

Les nombres négatifs apparaissent vers la fin du XVème siècle et au XVIème siècle, en même temps que les nombres complexes, chez des mathématiciens qui s'intéressent aux équations et à leurs racines : par exemple Chuquet (*Triparti en la science des nombres* 1484), Cardan (*Ars Magna* 1545), (cf. [4]).

Mais d'autres mathématiciens de la même époque ou postérieurs, tel Viète, ne donnent pour les équations que des racines positives. D'autre part les règles de calcul sur ces nombres sont connues au XVème siècle et on les trouve déjà chez Diophante (vers 325-410) mais il s'agit en fait le plus souvent de règles de calcul « algébrique » concernant des quantités ou des grandeurs que l'on ajoute ou retranche et non de nombres positifs ou négatifs, comme le montre le texte suivant de Cardan [5] :

Cardan ([5])

Définition X

C'est un simple conseil de ne pas confondre les quantités défaillantes avec les quantités abondantes. Il faut ajouter entre elles les quantités abondantes, ajouter entre elles aussi les quantités défaillantes, et retrancher les quantités défaillantes des quantités abondantes, mais en tenant compte des espèces, c'est-à-dire n'opérer que sur les *semblables* ; combiner les nombres entre eux ; aussi les carrés ; de même les cubes, etc.

Définition IX

La multiplication de deux (quantités) défaillantes produit une (quantité) abondante ; et la multiplication d'une (quantité) défaillante par une (quantité) abondante produit une (quantité) défaillante.

ainsi que le texte d'Arnauld reproduit dans l'encadré ci-contre.

A partir de Viète (1541-1603) le calcul « algébrique », c'est-à-dire littéral, va se développer et, aux XVII$^{\text{ème}}$ et XVIII$^{\text{ème}}$ siècles avec l'essor du calcul infinitésimal, ses règles sont parfaitement maîtrisées, mais elles ne concernent que des quantités positives au sens où les lettres ne représentent pas des quantités négatives. C'est ce qui apparaît clairement dans ce texte du Marquis de l'Hopital [7] :

« Il est à propos de bien remarquer que l'on a toujours supposé en prenant les différences, qu'une des variables x croissant, les autres y , z etc. croissaient aussi ; c'est-à-dire que les x devenant $x + dx$, les y , z , etc. devenaient $y + dy$, $z + dz$, etc. C'est pourquoi s'il arrive que quelques-unes diminuent pendant que les autres croissent, il en faudra regarder les différences comme des quantités négatives

Arnauld ([6])

SOUSTRACTION
DES GRANDEURS COMPLEXES

Pour soustraire une grandeur complexe d'une autre grandeur ou complexe ou incomplexe, il ne faut que l'y joindre en changeant tous les signes de la grandeur qu'on soustrait, & observant toujours que le signe affirmatif est sous-entendu où il n'y en a point.

De $b + c$ *oster* $m + n$ *reste* $b + c - m - n$.

De $b + c$ *oster* $m - n + o$ *reste* $b + c - m + n - o$.

Il n'est pas difficile de juger pourquoi on change le plus sous-entendu en moins dans le premier terme de la grandeur à soustraire : car c'est en cela même que consiste la soustraction. Mais d'abord on est surpris de ce qu'il faut changer les signes des autres termes de plus en moins & de moins en plus. Et néanmoins cela est assez facile à comprendre, si on considère que pour oster m moins p, il ne faut pas oster m tout seul ; car ce serait trop oster de p (puisque m est plus grand que m moins p) & ainsi ayant osté m parce qu'on a trop osté, il faut ajouter p qui est ce qu'on a osté de trop. D'où il s'ensuit qu'il faut changer le signe de moins qui était avant p, & qui faisait qu'en ostant m on ostait trop, au signe de plus qui remet ce p qu'on avait osté de trop.

Et par la même raison il faut changer en moins le signe de plus qui était avant o, parce qu'on osterait pas assez si on n'ostait cet o ; ce qui se fait en l'affectant du signe moins. [6]

N.B. : Les grandeurs complexes n'ont rien à voir avec les nombres complexes. Il s'agit en fait de grandeurs « composées », terminologie que l'on retrouve en arithmétique élémentaire où des expressions telles que 3h 20mn 32s sont appelées nombres complexes. Voici la définition donnée par Arnauld [6] des grandeurs complexes et incomplexes.

Je les appelle incomplexes quand on considère une grandeur d'une ou de plusieurs dimensions à part, comme b, ou cd, ou mno, sans y rien ajouter ou en rien oster. Et je les appelle complexes quand on y en joint d'autres de même genre par un plus ou un moins, ou qu'on marque par un chiffre que la même grandeur se doit prendre plusieurs fois, comme $b + c$, *ou* $b + c + d$, *ou* $b + f - g$, *ou* $bc + fg$, *ou* $bc + fg - mn$. *Ou par des chiffres 3b.*

par rapport à celles des autres que l'on suppose croître, et changer par conséquent les signes des termes où les différences de celles qui diminuent se rencontrent. Ainsi si l'on suppose que les x croissant, les y et les z diminuent, c'est-à-dire que les x devenant $x + dx$, les y et les z deviennent $y - dy$ et $z - dz$, et que l'on veuille prendre la différence du produit xyz ; il faudra changer dans la différence trouvée, les signes des termes où dy et dz se rencontrent : ce qui donne $yzdx - xydz - xzdy$ pour la différence cherchée. »

Donc ce ne sont pas des nombres relatifs qui sont utilisés contrairement à ce qui s'est passé en Chine et en Inde, les nombres négatifs ne sont utilisés que par certains mathématiciens dans la résolution des équations. En voici un exemple chez Albert Girard dans son *Invention Nouvelle en Algèbre* (1629), extrait de [4] , où il résout $x^3 = 300x + 432$ puis donne la solution « oubliée » par Viète, son contemporain, à propos de l'équation $124x - x^3 = 240$. Notez au passage que Viète n'écrira jamais $-x^3 + 124x = 240$ une telle équation.

note : *faction* = coefficients, et nous noterions (3), (2), (1) par : x^3, x^2, x) .

(Folio F recto)

Item 1(3) esgale à 300(1) + 432, laquelle remise en ordre alterne ce sera 1(3) – 300(1) esgales à 0(2) + 432 ; les factions seront 0, –300, 432 : donc trouvons trois nombres &c. Or l'un est 18 ; donc la somme des deux autres sera –18, & leur produit 24 ; parquoy 1 (2) sera esgale à –18 (1) – 24 ; les deux solutions seront : $-9 + \sqrt{57}$ & $-9 - \sqrt{57}$, puis l'autre cy-dessus 18 feront les trois solutions requises : de mesme si 1(4) est esgale à 4(1) – 3, alors les quatre factions seront 0, 0, 4, 3, & partant les quatre solutions seront :

$1 \quad 1 \quad -1 + \sqrt{-2} \quad -1 - \sqrt{-2}$

(Notez que le produit des deux derniers est 3).

(Folio F verso)

Touchant François Viète, qui surpasse tous ses devanciers en l'algèbre ; [...] il ne trouve que deux solutions (comme aussi en beaucoup de lieu dans ses livres) soit dit-il 124(1) – 1(3) esgale à 240 : Il ne trouve que 2 & 10, & je trouve encor –12, car voicy les factions 0, –124, –240.

A. Girard (1629)

Mais leur utilisation est sujette à de nombreuses controverses, comme nous le verrons par la suite (quant à leur droit à l'existence et à la validité de certaines règles de calcul les concernant) jusqu'au milieu du XIX^{ème} siècle où alors ils acquièrent un statut à égalité avec les nombres positifs, en particulier avec les travaux de Hankel (1867). Mais il faudra encore un siècle pour que leur usage se répande, en physique notamment [8] .

4. Conclusion

Cette brève perspective montre que la pratique et l'utilisation des nombres relatifs ont été bien antérieures à leur définition comme pour beaucoup d'autres notions mathématiques. D'autre part ces nombres, concrets pour les orientaux, « faux » pour les occidentaux [voir § II-3.] sont apparus comme outil de calcul facilitant la résolution des équations pour lesquelles on ne retenait que les solutions positives. Il s'agit donc d'un outil théorique et algébrique. D'ailleurs dans les manuels scolaires du XX^{ème} siècle, jusqu'à une époque assez récente, les nombres positifs et négatifs étaient classés dans la partie algèbre et portaient le nom de nombres algébriques, (cf. par exemple [9], [10], [11]). Ils sont aussi intimement associés à la notion de mesure algébrique.

note : L'utilisation des nombres relatifs dans la vie pratique comme outil de codage (graduation d'une droite) n'a commencé qu'au XVIII^{ème} siècle avec l'invention du thermomètre, mais il est à noter que Fahrenheit a choisi sa graduation pour éviter des températures négatives, et si Réaumur en 1732 choisit 0 pour point de fusion de la glace, il faudra attendre un siècle pour que l'on s'habitue à l'expression de température au-dessous de zéro (cf. [8]).

II — Les Obstacles à la Compréhension des Relatifs

1. Zéro absolu – Zéro relatif

Un premier obstacle est que le zéro est une limite infranchissable : en dessous de « rien », il ne peut rien y avoir. Voici ce que dit Lazare Carnot (1753-1823), membre de l'Académie des Sciences :

« Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ? »

Géométrie de position 1803
(cf. [8] ou [12])

« Avancer qu'une quantité négative isolée est moindre que 0, c'est couvrir la science des mathématiques, qui doit être celle de l'évidence, d'un nuage impénétrable et s'engager dans un labyrinthe de paradoxes tous plus bizarres les uns que les autres : dire que ce n'est qu'une quantité opposée aux quantités positives, c'est ne rien dire du tout parce qu'il faut expliquer ensuite ce que c'est que ces quantités opposées, recourir pour cette expression à de nouvelles idées premières semblables à celles de la matière, du temps et de l'espace, c'est déclarer qu'on regarde la difficulté comme insoluble et c'est en faire naître de nouvelles, car si l'on me donne pour exemple de quantités opposées, un mouvement vers l'orient et un mouvement vers l'occident, ou un mouvement vers le nord et un mouvement vers le sud, je demanderai ce que c'est un mouvement vers le nord-est, vers le nord-ouest, vers le sud-sud-ouest, etc., et de quels signes ces quantités devront être affectées dans le calcul. »

Réflexions sur la métaphysique
du calcul infinitésimal, 1797. [12]

De son côte F.C. Busset, auteur d'un manuel très utilisé au milieu du XIX^{ème} siècle, fait porter l'échec de l'enseignement des mathématiques en France sur l'admission des quantités négatives. Il est choqué que l'on discute de savoir « s'il existe des quantités plus petites que rien ». Pour lui, c'est « le comble de l'aberration de la raison humaine » et il critique Euler (sic) d'avoir admis de telles quantités [13].

Voyez aussi l'article *Négatif* de d'Alembert au paragraphe 6.

2. Nature des négatifs

Comme on vient de le voir l'existence des nombres négatifs est niée : ce ne sont pas des nombres. D'ailleurs à la rubrique « nombre » des dictionnaires et encyclopédies (Ozanam - 1691, Trévoux - 1743, d'Alembert - 1789) ne figurent jamais les qualificatifs « négatif » ou « positif ». Les nombres ne peuvent être que « positifs ». Ce sont les quantités qui peuvent être négatives ou positives, comme le dit Cauchy dans son *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique* (p. 102-103) (1821).

« Nous prendrons toujours la dénomination des nombres dans le sens où on l'emploie en Arith-

métique, en faisant naître les nombres de la mesure des grandeurs, et nous appliquerons uniquement la dénomination de quantités aux quantités réelles positives ou négatives, c'est-à-dire aux nombres précédés des signes + ou − . De plus, nous regarderons les quantités comme destinées à exprimer des accroissements ou des diminutions ; en sorte qu'une grandeur donnée sera simplement représentée par un nombre, si l'on se contente de la comparer à une autre grandeur de même espèce prise pour unité, et par ce nombre précédé du signe + ou du signe −, si on la considère comme devant servir à l'accroissement ou à la diminution d'une grandeur fixe de la même espèce. Cela posé, le signe + ou − placé devant un nombre en modifiera la signification, à peu près comme un adjectif modifie celle d'un substantif. Nous appellerons valeur numérique d'une quantité le nombre qui en fait la base, quantités égales celles qui ont le même signe avec la même valeur numérique, et quantités opposées deux quantités égales quant à leurs valeurs numériques, mais affectées de signes contraires. »

(cité aussi dans [8].

Si Cauchy donne des règles de calcul sur les quantités négatives isolées (cf. 3.7), par contre 45 ans plus tard, il y a à peine un peu plus d'un siècle, Duhamel, professeur aussi à l'Ecole Polytechnique, écrit en 1866 :

« Toute démonstration de règles sur les quantités négatives isolées, ne peut être qu'une illusion, puisqu'il n'y a aucun sens à attacher à des opérations arithmétiques sur des choses qui ne sont pas des nombres, et n'ont aucune existence réelle. » [8]

3. Interprétation des racines négatives d'une équation

Où les négatifs auraient davantage le statut de nombre c'est comme racines d'équations. Mais là encore on ne parle pas de *nombre* mais de *racine* et qui plus est de *racine fausse*. C'est par exemple le cas de Descartes (cf. [14] ou [12]) :

« Mais souvent il arrive, que quelques-unes de ces racines sont fausses, ou moindres que rien. Comme si on suppose que x désigne aussi le défaut d'une quantité, qui soit 5, on a $x + 5 = 0$, qui étant multipliée par $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ fait

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

pour une équation en laquelle il y a quatre racines, à savoir trois vraies qui sont 2, 3, 4, & une fausse qui est 5. »

On peut remarquer que Descartes parle d'une *racine fausse* qui est 5, pas de −5. On peut faire la même remarque dans la suite où Descartes donne le moyen de faire que les « fausses » racines deviennent vraies :

« De plus il est aisé de faire en une même équation, que toutes les racines qui étaient fausses deviennent vraies, & par même moyen que toutes celles qui étaient vraies deviennent fausses : à savoir en changeant tous les signes + ou − qui sont en la seconde, en la quatrième, en la sixième, ou autres places qui se désignent par les nombres pairs, sans changer ceux de la première, de la troisième, de la cinquième & semblables qui se désignent par les nombres impairs. Comme si au lieu de

$$+ x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

on écrit $+ x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ on a une équation en laquelle il n'y a qu'une vraie racine, *qui est 5, & trois fausses qui sont 2, 3, & 4.»*

On peut aussi remarquer dans le texte ci-contre que Descartes ne raisonne que sur les « valeurs absolues » et pour lui quand on ajoute 3 à la racine 5 celle-ci augmente mais quand on ajoute 3 à –4 on obtient –1 et la racine fausse 4 a diminué. A noter aussi 1 qui est une racine vraie et une fausse qui est aussi 1.

En fait ces solutions négatives vont poser des problèmes aux mathématiciens car il faut alors les interpréter. Par exemple Lacroix dans ses *Éléments d'Algèbre* de 1800 tout comme Clairaut dans ses *Éléments d'Algèbre* de 1768 dit « *toute solution négative marque que la quantité cherchée doit être prise dans un sens opposé à celui dans lequel elle l'a été d'abord* » [13].

Mais (voir [13]) dans la septième édition de son livre en 1808 il qualifie les solutions négatives d'absurdes. Voici ce qu'il dit à propos de 60 + 7y = 46 : « *la seule inspection de cette équation y fait reconnaître une absurdité. En effet, il n'est pas possible de former le nombre 46 en ajoutant quelque chose au nombre 60, qui seul surpasse déjà 46.* »

Il est intéressant de voir (encadré page suivante) ce qu'il en est dans un traité d'Algèbre à l'usage des élèves des lycées dû à E. Tombeck (1878) (pages reproduites dans [15]).

On pourra noter la phrase « on les admet dans les calculs, bien qu'elles n'aient aucun sens par elles-mêmes » et le fait qu'on transfère les règles de calcul des polynômes aux quantités négatives.

Descartes (cf. [14])

Comment on peut augmenter ou diminuer les racines d'une équation, sans les connaître.

Que si sans connaître la valeur des racines d'une équation, on la veut augmenter, ou diminuer de quelque quantité connue, il ne faut qu'au lieu du terme inconnu en supposer un autre, qui soit plus ou moins grand de cette même quantité, & le substituer partout en la place du premier.

Comme si on veut augmenter de 3 la racine de cette équation

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

il faut prendre y au lieu de x, & penser que cette quantité y est plus grande que x de 3, en sorte que $y - 3$ est égal a x, & au lieu de x^2, il faut mettre la carré de $y - 3$ qui est $y^2 - 6y + 9$ & au lieu de x^3 il faut mettre son cube qui est $y^3 - 9y^2 + 27y - 27$, & enfin au lieu de x^4 il faut mettre son carré de carré qui est $y^4 - 12y^3 + 54y^2 - 108y + 81$.

Qu'en augmentant les vraies racines on diminue les fausses & au contraire.

Et il est à remarquer qu'en augmentant les vraies racines d'une équation, on diminue les fausses de la même quantité ; ou au contraire en diminuant les vraies, on augmente les fausses. Et que si on diminue soit les unes soit les autres, d'une quantité qui leur soit égale, elles deviennent nulles, & que si c'est d'une quantité qui les surpasse, de vraies elles deviennent fausses, ou de fausses vraies. Comme ici en augmentant de 3 la vraie racine qui était 5, on a diminué de 3 chacune des fausses, en sorte que celle qui était 4 n'est plus que 1, & celle qui était 3 est nulle, & celle qui était 2 est devenue vraie & est 1, à cause que $-2 + 3$ fait $+1$.

Traité d'algèbre à l'usage des lycées (1878) [15]

THEORIE DES QUANTITES NEGATIVES

142. On arrive souvent, en appliquant les règles précédemment données pour la résolution des équations, à des expressions de la forme $-5, -\frac{2}{3}$. Ces expressions, appelées des *quantités négatives*, sont formées de quantités arithmétiques que l'on appelle leurs *valeurs absolues*, précédées du signe $-$. Comme les symboles singuliers que nous avons déjà rencontrés, on les admet dans les calculs, bien qu'elles n'aient aucun sens par elles-mêmes, et elles fournissent à l'algèbre un des plus puissants moyens de généralisation dont elle dispose.

Par opposition aux quantités négatives, les quantités ordinaires ou arithmétiques, prennent le nom de *quantités positives*.

— Nous allons voir d'abord comment les quantités négatives se présentent dans les problèmes ; nous verrons ensuite quelles règles on leur applique, et quel usage on en fait, en les introduisant dans les calculs.

Usage des quantités négatives dans les problèmes.

143. 1er EXEMPLE. Proposons-nous ce problème, déjà résolu sur d'autres données :

Un père avait 58 ans en 1850 ; son fils en avait 30. A quelle époque l'âge du père a-t-il été double de l'âge du fils ?

L'énoncé ne nous apprend pas si l'époque cherchée est antérieure ou postérieure à 1850. Supposons-la postérieure, et soit x le nombre d'années écoulées depuis 1850 jusqu'à cette époque.

x années après 1850, l'âge du père était $58 + x$, l'âge du fils $30 + x$, et d'après l'énoncé, l'on doit avoir :

$$2(30 + x) = 58 + x \qquad [a]$$

En résolvant cette équation, nous trouvons successivement :

$$60 + 2x = 58 + x,$$
$$2x - x = 58 - 60,$$
$$x = 58 - 58 - 2,$$
$$x = -2.$$

Ce résultat privé de sens nous apprend, non pas que le problème proposé est impossible, mais bien que nous avons eu tort de supposer l'époque postérieure à 1850.

Supposons-la donc antérieure, et soit x' le nombre d'années qui la séparent de 1850. A cette époque, l'âge du père était $58 - x'$, l'âge du fils $30 - x'$, et en vertu de l'énoncé, l'on doit avoir :

$$2(30 - x') = 58 - x' \qquad [b]$$

Résolvant cette équation, on trouve successivement :

$$60 - 2x' = 58 - x',$$
$$60 - 58 = 2x' - x',$$
$$x' = 2.$$

Ainsi l'époque cherchée est arrivée deux ans avant 1850.

EQUATIONS DU PREMIER DEGRE

— Nous pouvons tirer de ce qui précède cette première conséquence :

Quand l'inconnue d'un problème est susceptible d'être comptée en deux sens, si, en résolvant le problème, on arrive à une quantité négative, on est averti par là, au moins en général, qu'on doit changer le sens attribué à cette inconnue dans la mise en équation.

144. Nous pouvons observer de plus que la vraie solution $x' = 2$, du problème précédent, n'est autre chose que la quantité négative trouvée en premier lieu, prise en valeur absolue. Or ce n'est pas par hasard que ce fait se présente, et il devait nécessairement en être ainsi.

Pour le faire voir, nous remarquerons d'abord que la quantité négative -2, est solution de l'équation [a] qui l'a fournie, c'est-à-dire qu'en remplaçant x par -2 dans cette équation

[a] , on obtiendra une égalité vérifiée, pourvu que l'on convienne d'appliquer à cette quantité négative -2 , les mêmes règles de calcul qu'aux termes soustractifs des polynômes.

Si en effet nous nous reportons à la suite des calculs faits pour résoudre cette équation, nous voyons que -2 satisfait à l'équation finale $x = -2$, puisqu'en y mettant -2 au lieu de x , on obtient l'égalité évidente $-2 = -2$; par suite, -2 satisfait aux précédentes qui n'en diffèrent que par des réductions ou des inversions de termes. Par suite enfin, -2 satisfait à la première de ces équations, c'est-à-dire à l'équation [a] .

Si donc, en substituant -2 à x dans l'équation [a] , on lui satisfait, on lui satisfera en substituant $-x'$ au lieu de x , et en faisant après coup $x' = 2$. Or, si dans l'équation [a] , on met $-x'$ au lieu de x , elle devient :

$$2(30 - x') = 58 - x',$$

c'est-à-dire précisément l'équation [b] . Cette équation [b] devait donc bien admettre la solution $x' = 2$.

On déduit de là cette seconde conséquence :

Après qu'on a été averti, par la valeur négative obtenue pour x , que l'on s'est trompé sur le sens attribué à cette inconnue dans la mise en équation, il n'est pas nécessaire de remettre le problème en équation. Il suffit, au moins le plus souvent, en même temps que l'on compte l'inconnue en sens inverse, de prendre pour sa valeur, la valeur absolue de la quantité négative trouvée d'abord.

C'est en ce sens que l'on peut dire que $x = -2$ fournit la vraie solution du problème précédent.

D'ailleurs la comparaison de l'équation [b] à l'équation [a] , montre que, pour avoir l'équation rectifiée du problème, il suffit de changer x en $-x'$, ou, ce qui revient au même, x en $-x$ dans l'équation primitive.

Pour terminer voici un exemple de manipulation de nombres négatifs à propos de la solution numérique d'une équation à partir de son expression littérale extraite des *Éléments d'Algèbre* de Clairaut (1768). [16]

« Qu'on se propose, par exemple, de trouver quelles doivent être, dans le problème précédent, les dépenses des deux sources, pour que la seconde fournissant de l'eau pendant six jours, tandis que la première en dérobe pendant trois jours, un réservoir de 180 muids soit rempli ; & que la première source ensuite fournissant de l'eau pendant trois jours, & la seconde pendant quatre jours, un réservoir de 320 muids soit rempli.

On n'aura qu'à faire dans la solution générale $a = 180$, $b = -3$, $c = 6$, $d = 320$, $e = 3$, $f = 4$.

Et l'on aura $dc = 1920$, $af = 720$, $ce = 18$, $bf = -12$, $ae = 540$, $bd = -960$, *& par conséquent* $dc - af = 1200$, $ce - bf = 30$, $ae - db = 1500$, *qui donnent* $x = \dfrac{dc - af}{ce - bf} = 40$ *&* $y = \dfrac{ae - db}{ce - bf} = 50$, *par lesquelles on apprend que la dépense de la première source est de 40 muids par jour, soit pour dérober comme elle fait dans la première opération, soit pour fournir, ainsi qu'il arrive dans la seconde ; & que la dépense de la seconde est de 50 muids par jour qu'elle fournit dans chacune des deux opérations. Il était si naturel d'imaginer que b devait être négatif dans cette application, & si aisé de s'en assurer en remontant à l'usage qu'on fait de cette lettre, en exprimant les conditions du problème, qu'il est inutile de s'arrêter à le faire voir. »*

4. Les règles de calcul

Un des obstacles à l'adoption des nombres négatifs est le non fonctionnement de certaines règles connues pour les « positifs » et considérées comme universelles c'est-à-dire devant s'appliquer à tous les nombres.

En voici un exemple chez Carnot dans son ouvrage *La géométrie de position* (1803) :

« Soit cette proportion 1 : –1 = –1 : 1 ; si la notion combattue était exacte, c'est-à-dire, si –1 était moindre que 0, à plus forte raison serait-il moindre que 1 ; donc le second terme de cette proportion devrait être moindre que le premier ; donc le quatrième devrait être moindre que le troisième ; c'est-à-dire, que 1 devrait être moindre que –1 ; donc –1 serait tout ensemble moindre et plus grand que 1 ; ce qui est contradictoire ...

Une multitude de paradoxes ou plutôt d'absurdités palpables résulteraient de la même notion ; par exemple, –3 serait moindre que 2 ; cependant $(-3)^2$ *serait plus grand que* 2^2*, c'est-à-dire qu'entre deux quantités inégales le carré de la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite, ce qui choque toutes les idées claires qu'on peut se former de la quantité.*

Passons à la seconde notion, qui consiste à dire que les quantités négatives ne diffèrent des positives qu'en ce qu'elles sont prises dans un sens opposé. Cette idée est ingénieuse ; mais elle n'est pas plus juste que la précédente. En effet, si deux quantités, l'une positive, l'autre négative, étaient aussi réelles l'une que l'autre et ne différaient que par leurs positions, pourquoi la racine de l'une serait-elle une quantité imaginaire, tandis que celle de l'autre serait effective ?

Pourquoi $\sqrt{-a}$ *ne serait-elle pas aussi réelle que* $\sqrt{a}$ *? Conçoit-on une quantité effective dont on ne puisse extraire la racine carrée ? Et d'où viendrait le privilège que la première, –a, aurait de donner son signe au produit* $-a \times +a$ *? »* (cité dans [8]).

Lacroix, quant à lui, distingue dans son traité de 1800 les opérations algébriques et arithmétiques :

« L'extension que les signes généraux employés dans l'algèbre donnent aux résultats, ne permet plus leur comparaison exacte avec ceux de l'arithmétique ... La soustraction b – a , indiquée algébriquement, n'emporte pas nécessairement l'idée que b surpasse a . »

Mais il revient en arrière dans son traité de 1808 où il restreint la soustraction au cas où la différence est positive ou nulle [13].

On voit donc que rapport, ordre, racine carrée, soustraction sont sources de problèmes lorsqu'on veut y mêler des nombres négatifs. Même pour l'addition, Clairaut prend des précautions :

« On demandera peut-être si on peut ajouter du négatif avec du positif, ou plutôt si on peut dire qu'on ajoute du négatif. A quoi je réponds que cette expression est exacte quand on ne confond point ajouter avec augmenter. Que deux personnes, par exemple, joignent leurs fortunes, quelles qu'elles soient, je dirai que c'est là ajouter leurs biens, que l'un ait des dettes & des effets réels, si ses dettes surpassent ses effets, il ne possédera que du négatif, & la jonction de sa fortune à celle du premier diminuera le bien de celui-ci, en sorte que la somme se trouvera, ou moindre que ce que possédait le premier, ou même entièrement négative. » [8] et [16]

Reste le problème de la multiplication, avec la fameuse règle des signes dont nous reparlerons au paragraphe 3, car sa justification a posé beaucoup de problèmes. Cependant nous pouvons dire que cette règle utilisée depuis au moins Diophante (voir I-3.) est néanmoins sujette au doute.

Par exemple Cardan (1505-1576) tantôt donne une version correcte de la règle des signes :

« *Plus ductum in plus* (*ducere in veut dire multiplier par*), *et divisum per plus ; et minus ductum in minus, et divisum per minus producunt semper plus, et ita* (*de même*) *plus in minus, vel minus in plus, vel plus divisum per minus, vel minus per plus, producit minus.* » [5]

tantôt une version erronée :

« *Igitur minus in minus, seu alienum in alienum* (ce qui n'existe pas sur ce qui n'existe pas), *et minus in plus, seu plus in minus, quod est in alienum, seu alienum in id quod est, producunt minus solum, seu alienum.* »

C'est-à-dire : *donc moins multiplié par moins, ou ce qui n'existe pas par ce qui n'existe pas, et moins multiplié par plus ou plus multiplié par moins, ne produisent jamais que moins, ou quelque chose qui n'existe pas.*

« *Et ideo patet communis error dicentium quod minus in minus producit plus. Neque enim magis minus in minus producit plus quam plus in plus producat minus.* »

C'est-à-dire : *et ainsi est mise en évidence l'erreur commune de ceux qui disent que moins par moins fait plus. Car moins par moins ne fait pas davantage plus, que plus par plus ne fait moins.* [5]

et même essaie de concilier les deux points de vue :

« *Et quia nos ubique diximus contrarium, ideo docebo causam hujus, quare in operatione minus in minus videatur producere plus, et quomodo debeat intelligi.* »

C'est-à-dire : *et comme nous avons dit le contraire en divers endroits, j'enseignerai ici la raison pour laquelle, dans une opération, moins par moins paraît faire plus, et comment cela doit être entendu.* [5]

et ce qu'il dit aussi à propos de la division laisse perplexe :

« *Nous avons écrit ailleurs que moins multiplié par plus, et moins multiplié par moins, produisent moins. Il en résulte que moins divisé par moins produit tantôt plus et tantôt moins. Ou bien si deux quantités négatives sont divisées l'une par l'autre, ce qui proviendra pourra être plus ou moins ; mais toutes les choses qui sont divisées par plus donnent des semblables à ce qui est divisé : c'est-à-dire plus étant divisé par plus produit plus ; et moins étant divisé par plus, il en sort moins. Ce qui est évident par la multiplication.* » [5]

Il s'est même trouvé (cf. [13]) un certain Klostermann, correspondant de la Société royale des sciences de Gottingen, pour démontrer, en 1804, que moins multiplié par moins donne moins.

5. Confusion entre le signe d'opération et le signe du nombre

Alors que les Chinois utilisent par exemple deux couleurs différentes pour les positifs et les négatifs (voir I-1.), en Occident cette distinction n'a été faite clairement qu'au début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle par des mathématiciens allemands (Wilkens 1800, Busse 1804, Forstemann 1817) qui notent $\bar{a}$ au lieu de $-a$, l'opposé de a, et définissent la soustraction par l'addition de l'opposé : $a - b = a + \bar{b}$. Busse montre que les problèmes de Carnot viennent essentiellement de cette confusion entre signe opératoire et signe du nombre (signe prédicatoire) et c'est aussi cette confusion qui rend fausse la démonstration de Klostermann (voir II-4.) [13].

Cette confusion est en effet constante jusqu'à la fin du XIXème. Par exemple quand Descartes écrit $-2+3=+1$ (voir II-3.), + 3 désigne une augmentation de 3 et on ne sait pas très bien si ce + n'est pas en même temps signe d'une addition. De même dans le texte d'Arnauld (voir I-3.), il est question de signes que l'on change, qui sont parfois sous-entendus ; il semble donc qu'il s'agisse là de signes prédicatoires. Mais dans les explications il est fait par contre référence explicitement aux opérations : « oster », « ajouter ». (On pourra aussi se reporter au paragraphe suivant). Cela est dû au fait qu'il s'agissait toujours de quantités à ajouter ou à soustraire, c'est-à-dire de quantités en plus ou en moins.

6. Un document intéressant

L'*Encyclopédie méthodique mathématique* issue de la Grande Encyclopédie de Diderot est un document de référence sur l'état des sciences à la fin du XVIIIème siècle.

Aussi est-il intéressant de voir où l'on en était à cette époque à propos des nombres relatifs en liant les articles Négatif et Quantité.

Encyclopédie du XVIIIème siècle.

NEGATIF, adj. (*Alg.*), *quantités négatives, en algèbre*, sont celles qui sont affectées du signe –, & qui sont regardées par plusieurs mathématiciens, comme plus petites que zéro. Cette dernière idée n'est cependant pas juste, comme on le verra dans un moment. *Voy.* QUANTITE.

Les quantités *négatives* sont le contraire des positives : où le positif finit, le négatif commence. *Voy.* POSITIF.

Il faut avouer qu'il n'est pas facile de fixer l'idée des quantités négatives, & que quelques habiles gens ont même contribué à l'embrouiller par les notions peu exactes qu'ils en ont données. Dire que la quantité *négative* est au-dessous du rien, c'est avancer une chose qui ne se peut pas concevoir. Ceux qui prétendent que 1 n'est pas comparable à –1, & que le rapport entre 1 & –1 est différent du rapport entre –1 & 1, sont dans une double erreur : 1°. parce qu'on divise tous les jours, dans les opérations algébriques, 1 par –1 ; 2°. l'égalité du produit de –1 par –1, & de +1 par +1, fait voir que 1 est à –1 comme –1 à 1.

Quand on considère l'exactitude & la simplicité des opérations algébriques sur les quantités *négatives*, on est bien tenté de croire que l'idée précise que l'on doit attacher aux quantités négatives doit être une idée simple, & n'être point déduite d'une métaphysique alambiquée. Pour tâcher d'en découvrir la vraie notion, on doit d'abord remarquer que les quantités qu'on appelle *négatives*, & qu'on regarde faussement comme au-dessous du zéro, sont très souvent représentées par des quantités réelles, comme dans la géométrie, où les lignes *négatives* ne diffèrent des positives que par leur situation à l'égard de quelque ligne au point commun. *Voyez* COURBE. De là il est assez naturel de conclure que les quantités *négatives*, que l'on rencontre dans le calcul, sont en effet des quantités réelles auxquelles il faut arracher une idée autre que celle qu'on avait supposée. Imaginons, par exemple, qu'on cherche la valeur d'un nombre x, qui, ajouté à 100, fasse 50, on aura, par les règles de l'Algèbre, $x + 100 = 50$, & $x = -50$; ce qui fait voir que la quantité x est égale à 50, & qu'au lieu d'être ajoutée à 100, elle doit en être retranchée ; de sorte qu'on aurait dû énoncer le problème ainsi : trouver une quantité x qui, étant retranchée de 100, donne 50 pour reste ; en énonçant le problème ainsi, on aurait $100 - x = 50$, & $x = 50$; la forme *négative* de x ne subsisterait plus. Ainsi, les quantités *négatives* indiquent réellement, dans le calcul, des quantités positives, mais qu'on a supposées dans une fausse position. Le signe $-$ que l'on trouve avant une quantité, sert à redresser & à corriger une erreur que l'on a faite dans l'hypothèse, comme l'exemple ci-dessus le fait voir très clairement. *Voyez* EQUATION.

Remarquez que nous ne parlons ici que des quantités *négatives* isolées, comme $-a$, ou des quantités $a - b$, dans lesquelles b est plus grand que a ; car, pour celles où $a - b$ est positif, c'est-à-dire, où b est plus petit que a, le signe ne fait aucune difficulté.

Il n'y a donc point réellement & absolument de quantité *négative* isolée : -3 pris abstraitement ne présente à l'esprit aucune idée ; mais, si je dis qu'un homme a donné à un autre -3 écus, cela veut dire en langage intelligible, qu'il lui a ôté trois écus.

Voilà pourquoi le produit de $-a$ par $-b$, donne $+ab$: car a & b étant précédés du signe $-$ par la supposition, c'est une marque que ces quantités a, b, se trouvent mêlées & combinées avec d'autres à qui on les compare, puisque, si elles étaient considérées comme seules & isolées, les signes $-$, dont elles sont précédées, ne présenteraient rien de net à l'esprit. Donc ces quantités $-a$ & $-b$ ne se trouvent précédées du signe $-$, que parce qu'il y a quelqu'erreur tacite dans l'hypothèse du problème ou dans l'opération ; si le problème était bien énoncé, ces quantités $-a$, $-b$, devraient se trouver chacune avec le signe $+$, & alors leur produit serait $+ab$; car que signifie la multiplication de $-a$ par $-b$? c'est qu'on retranche b de fois la quantité *négative* $-a$; or, par l'idée que nous avons donnée ci-dessus des quantités *négatives*, ajouter ou poser une quantité *négative*, c'est retrancher une positive ; donc, par la même raison, en retrancher une *négative*, c'est en ajouter une positive ; & l'énonciation simple & naturelle du problème doit être, non de multiplier $-a$ par $-b$, mais $+a$ par $+b$; ce qui donne le produit $+ab$. Il n'est pas possible, dans un ouvrage de la nature de celui-ci, de développer davantage cette idée ; mais elle est si simple, que je doute qu'on puisse lui en substituer une plus nette & plus exacte ; & je crois pouvoir assurer que, si on applique à tous les problèmes que l'on peut résoudre, & qui renferment des quantités *négatives*, on ne la trouvera jamais en défaut. Quoi qu'il en soit, les règles des opérations algébriques sur les quantités *négatives*, sont admises par tout le monde, & reçues généralement comme exactes, quelqu'idée qu'on attache d'ailleurs à ces quantités. Sur les ordonnées négatives d'une courbe & leur situation par rapport aux ordonnées positives, *voyez* COURBE.

Nous ajouterons seulement à ce que nous avons dit dans cet article, que, dans la solution d'un problème géométrique, les quantités *négatives* ne sont pas toujours d'un côté opposé aux positives, mais d'un côté opposé à celui où l'on les a supposées dans le calcul. Je suppose, par exemple, que l'on ait l'équation d'une courbe entre les rayons partant d'un centre ou pôle, que j'appelle y, & les angles correspondants que je nomme z ; en sorte que y, par exemple, $= \frac{a^2}{a + \cos z}$, il est évident que, lorsque $\cos z$ sera $= -1$, alors, si c est $> b$, y sera dans une position directement contraire à celle qu'elle avait lorsque $\cos z = 1$, cependant l'une & l'autre valeurs de y seront sous une forme positive dans l'équation. Mais, si a est $< b$, alors la valeur algébrique de y sera négative, & y devra être prise du même côté que quand $\cos z = 1$, c'est-à-dire, du côté contraire à celui vers lequel on a supposé qu'elle devait être prise. Il se présente encore d'autres cas, en géométrie, où les quantités *négatives* paraissent se trouver du côté où elles ne devraient pas être ; mais les principes que nous venons d'établir, & ceux que nous avons posés ou indiqués à l'*article* EQUATION, suffiront pour résoudre ces sortes de difficultés. Nous avons expliqué, dans cet article, en quoi les racines *négatives* des équations différaient des racines imaginaires ; c'est que les premières donnent une solution du problème envisagé sous un aspect un peu différent, & qui ne diffère point même dans le fond de la question proposée ; mais les imaginaires ne donnent aucune solution possible du problème, de quelque manière qu'on l'envisage. C'est que les racines *négatives*, avec de légers changements à la question, peuvent devenir positives, au lieu que les imaginaires ne le peuvent jamais. Je suppose que j'aie $b^2y = x^3 - a^3$, ou en faisant $b = 1$, $y = x^3 - a^3$; lorsque x est $< a$, y devient *négative*, & doit être prise de l'autre côté (*voyez* COURBE) pourquoi cela ? c'est que, si on avait reculé l'axe d'une quantité c, ce qui est absolument arbitraire, en sorte qu'au lieu des coordonnées x & y, on eût eu les coordonnées x & z, telles que z fut $= y + c$, alors on aurait eu $z = c + x^3 - c^3$; & en faisant $x < a$, z n'aurait plus été *négative*, ou plutôt aurait continué à être encore positive pendant un certain temps : d'où l'on voit que la valeur *négative* de y, $x^3 - a^3$, appartient aussi bien à la courbe que les valeurs positives ; ce qui a été développé plus au long au mot COURBE. Au contraire, si on avait $y = \sqrt{x^2 - ca}$, & que x fut $< a$, alors on aurait beau transporter l'axe, la valeur de y resterait imaginaire ; ainsi, les racines *négatives* indiquent des solutions réelles, parce que ces racines deviennent positives par de légers changements dans la solution ; mais les racines imaginaires indiquent des solutions impossibles, parce que ces racines ne deviennent jamais ni positives ni réelles par ces mêmes changements. *Voyez* EQUATION & RACINE.

Quand on a dit plus haut que le *négatif* commence où le positif finit, cela doit s'entendre avec cette restriction, que le positif ne devienne pas imaginaire. Par exemple, soit $y = x^2 - a^2$, il est visible que, si $x > a$, y sera positif ; que, si $x = 1$, y sera $= 0$, & que, si $x < a$, y sera *négatif*. Ainsi, dans ce cas, le positif finit où $y = 0$, & le *négatif* commence alors ; mais, si on avait $y = \sqrt{x^2 - ax}$, alors $x > a$ donne y positif, & $x = a$ donne $y = 0$; mais $x < a$ donne y imaginaire.

Le passage du positif au *négatif* se fait toujours par zéro, ou par l'infini. Soit, par exemple, $y = x - a$, on aura y positif tant que $x > a$, y *négatif* lorsque $x < a$, & $y = 0$ lorsque $x = a$; dans ce cas, le passage se fait par zéro. Mais, si $y = \frac{1}{x - a}$, on aura y positif tant que x est > 1, y *négatif* lorsque x est $< a$, & $y = \infty$ lorsque $x = 1$; le passage se fait alors par l'infini.

Ce n'est pourtant pas à dire qu'une quantité qui passe par l'infini ou par le zéro, devienne nécessairement positive, *négative* ; car elle peut rester positive. Par exemple, soit $y = |a - x|^3$, ou $y = \frac{1}{|a - x|^3}$; lorsque $a = x$, y est $= 0$ dans le premier cas, & $= \infty$ dans le second ; mais soit que a soit $> x$, ou que a soit $< x$, y demeure toujours positive. *Voy.* MAXIMUM.

QUANTITE. [...] Les *quantités* sont proprement le sujet de l'algèbre, qui roule entièrement sur leur calcul. *Voyez* ALGEBRE & CALCUL.

On marque ordinairement les *quantités* connues par les premières lettres de l'alphabet, a, b, c, d, &c. & les *quantités* inconnues par les dernières, z, y, &c.

Les *quantités* algébriques sont ou positives ou négatives.

On appelle *quantité positive* celle qui est au-dessus de zéro, & qui est précédée, ou que l'on suppose être précédée du signe $+$, *voyez* POSITIF.

Quantités négatives sont celles qui sont regardées comme moindres que rien, & qui sont précédées du signe $-$, *voyez* NEGATIF.

Puis donc que $+$ est le signe de l'addition, & $-$ celui de la soustraction, il s'ensuit qu'il ne faut pour produire une *quantité* positive, qu'ajouter une quantité réelle à rien ; par exemple $0 + 3 = +3$; & $0 + a = +a$. De même pour produire une *quantité* négative il ne faut que retrancher une quantité réelle de 0 ; par exemple $0 - 3 = -3$; & $0 - a = -a$.

Eclaircissons ceci par un exemple. Supposez que vous n'ayez point d'argent, & que quelqu'un vous donne cent écus ; vous aurez alors cent écus plus que rien, & ce sont ces cent écus qui constituent une *quantité* positive.

Si au contraire vous n'avez point d'argent, & que vous deviez cent écus, vous aurez alors cent écus moins que rien ; car vous devez payer ces cent écus pour être dans la condition d'un homme qui n'a rien & qui ne doit rien : cette dette est une *quantité* négative.

De même dans le mouvement local, le progrès peut être appelé une *quantité* positive, & le retour une *quantité* négative ; à cause que le premier augmente & le second diminue le chemin qu'on peut avoir déjà fait.

Si l'on regarde en géométrie une ligne tirée vers quelque côté que ce soit comme une *quantité* positive, celle que l'on mènera du côté opposé sera une *quantité* négative. *Voyez* COURBE.

Selon quelques auteurs, les *quantités* négatives sont les défauts des positives.

Selon ces mêmes auteurs, puisqu'un défaut peut excéder un autre (car, par exemple, le défaut de 7 est plus grand que celui de 3) ; une *quantité* négative prise un certain nombre de fois, peut être plus grande qu'une autre.

D'où il suit que les *quantités* négatives sont homogènes entre elles.

Mais, ajoutent-ils, puisque le défaut d'une *quantité* positive prise tel nombre de fois que l'on voudra, ne peut jamais surpasser la *quantité* positive, et qu'elle devient toujours plus défective ; les *quantités* négatives sont hétérogènes aux positives ; d'où ils concluent que les *quantités* négatives étant hétérogènes aux positives, & homogènes aux négatives, il ne peut y avoir de rapport entre une *quantité* positive & une négative, mais il peut s'en trouver entre deux négatives. Par exemple, $-3a : -5a = 3 : 5$. Le rapport est ici le même que si les *quantités* étaient positives. Mais ils prétendent observer qu'entre 1 & -1, & entre -1 & 1, la raison est tout-à-fait différente. Il est vrai pourtant, d'un autre côté, que $1 : -1 = -1 : 1$, puisque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens ; ainsi la notion que donnent ces auteurs des *quantités* négatives, n'est pas parfaitement exacte. *Voyez* NEGATIF.

Addition des quantités. 1°. Si les *quantités* exprimées par la même lettre ont aussi le même signe, on ajoutera les nombres dont elles sont précédées, comme dans l'arithmétique ordinaire.

2°. Si elles ont différents signes, l'addition devient une soustraction, & l'on ajoute au restant le signe de la plus grande *quantité*.

3°. On ajoute les quantités exprimées par différentes lettres par le moyen du signe $+$, comme dans l'exemple suivant :

$$\begin{array}{llllll} 4a & +2b & -2c & -5d & -9 & \qquad a-b \\ 5a & +2b & +2c & +2d & -39 & \qquad \quad\;\; c \\ \hline 9a & +4b & & -3d & -48 & \qquad a-b+c \end{array}$$

Soustraction des quantités. *Voyez* SOUSTRACTION.

Multiplication & division des quantités. *Voyez* MULTIPLICATION ou DIVISION.

Combinaison des quantités. *Voyez* COMBINAISON, PERMUTATION, &c.

1°. Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise deux *quantités* positives l'une par l'autre, il en résulte une *quantité* positive.

2°. Quand on multiplie ou qu'on divise une *quantité* négative par une positive, le produit & le quotient sont négatifs.

3°. En multipliant ou divisant deux *quantités* négatives l'une par l'autre, il en résulte une *quantité* positive.

4°. Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise une *quantité* positive par une négative, ce qui en vient est une *quantité* négative.

III — La Règle des Signes : un choix d'explications

1. Les difficultés de Stendhal

« Mon enthousiasme pour les mathématiques avait peut-être eu pour base principale mon horreur pour l'hypocrisie, l'hypocrisie à mes yeux c'était ma tante Séraphie, Mme Vignon, et leurs pr[êtres].

Suivant moi l'hypocrisie était impossible en mathématiques et, dans ma simplicité juvénile, je pensais qu'il en était ainsi dans toutes les sciences où j'avais ouï dire qu'elles s'appliquaient. Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se fait que : moins par moins donne plus (– x – = +) ? (C'est une des bases fondamentales de la science qu'on appelle *algèbre*).

On faisait bien pis que ne pas m'expliquer cette difficulté (qui sans doute est explicable car elle conduit à la vérité), on me l'expliquait par des raisons évidemment peu claires pour ceux qui me les présentaient.

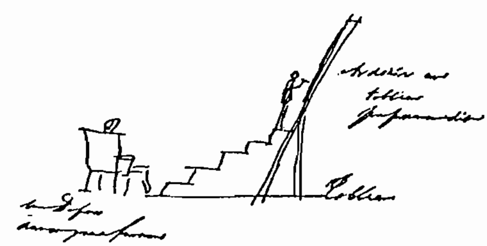
M. Chabert pressé par moi s'embarrassait, répétait sa *leçon*, celle précisément contre laquelle je faisais des objections, et finissait par avoir l'air de me dire :

« Mais c'est l'usage, tout le monde admet cette explication. Euler et Lagrange, qui apparemment valaient autant que vous, l'ont bien admise. Nous savons que vous avez beaucoup d'esprit (cela voulait dire : Nous savons que vous avez remporté un premier prix de *belles-lettres* et bien parlé à *M. Teste-Lebeau* et aux autres membres du Département), vous voulez apparemment vous singulariser. »

Quant à M. Dupuy, il traitait mes timides objections (timides à cause de son ton d'emphase) avec un sourire de hauteur voisin de l'éloignement. Quoique beaucoup moins fort que M. Chabert, il était moins bourgeois, moins borné, et peut-être jugeait sainement de son savoir en mathématiques. Si aujourd'hui je voyais ces Messieurs huit jours, je saurais sur-le-champ à quoi m'en tenir. Mais il faut toujours en revenir à ce point.

Je me rappelle distinctement que, quand je parlais de ma difficulté de *moins par moins* à un *fort*, il me riait au nez ; tous étaient plus ou moins comme Paul-Émile Teysseyre et apprenaient par cœur. Je leur voyais dire souvent au tableau à la fin des démonstrations : « *Il est donc évident* », etc.

Rien n'est moins évident pour vous, pensais-je. Mais il s'agissait de choses évidentes pour moi, et desquelles malgré la meilleure volonté il était impossible de douter.



[Ardoise ou tableau proprement dit. — Tableau. — M. Dupuy dans son grand fauteuil.]

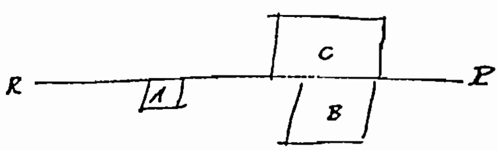
Les mathématiques ne considèrent qu'un petit coin des objets (leur quantité), mais sur ce point elles ont l'agrément de ne dire que des choses sûres, que la vérité et presque toute la vérité.

Je me figurais à quatorze ans, en 1797, que les hautes mathématiques, celles que je n'ai jamais sues, comprenaient tous ou à peu près tous les côtés des objets, qu'ainsi, en avançant je parviendrais à savoir des choses sûres, indubitables, et que je pourrais me prouver à volonté, *sur toutes choses*.

Je fus longtemps à me convaincre que mon objection sur $- \times - = +$ ne pourrait pas absolument entrer dans la tête de M. Chabert, que M. Dupuy n'y répondrait jamais que par un sourire de hauteur, et que les forts auxquels je faisais des questions se moqueraient toujours de moi.

J'en fus réduit à ce que je me dis encore aujourd'hui : il faut bien que – par – donne + soit vrai, puisque évidemment en employant à chaque instant cette règle dans le calcul, on arrive à des résultats *vrais* et *indubitables*.

Mon grand malheur était cette figure :



Supposons que RP soit la ligne qui sépare le positif du négatif, tout ce qui est au-dessus est positif, comme négatif tout ce qui est au-dessous ; comment, en prenant le carré B autant de fois qu'il y a d'unités dans le carré A, puis-je parvenir à faire changer de côté au carré C ?

Et, en suivant une comparaison gauche que l'accent souverainement traînard et grenoblois de M. Chabert rendait encore plus gauche, supposons que les quantités négatives sont les dettes d'un homme, comment en multipliant 10 000 francs de dette par 500 francs, cet homme aura-t-il ou parviendra-t-il à avoir une fortune de 5 000 000, cinq millions ?

M. Dupuy et M. Chabert sont-ils des hypocrites comme les pr[êtres] qui viennent dire la [messe] chez mon grand-père et mes chères mathématiques ne sont-elles qu'une tromperie ? Je ne savais comment arriver à la vérité. Ah ! qu'alors un mot sur la logique ou l'art de *trouver la vérité* eût été avidement écouté par moi ! Quel moment pour m'expliquer la *Logique* de M. de Tracy ! Peut-être j'esse été un autre homme, j'aurais eu une bien meilleure tête.

Je conclus, avec mes pauvres petites forces, que M. Dupuy pouvait bien être un trompeur, mais que M. Chabert était un bourgeois vaniteux qui ne pouvait comprendre qu'il existât des objections non vues par lui. » [18] et [8]

On notera l'obstacle auquel se heurte Stendhal : le modèle des gains et des pertes qui fonctionne pour l'addition des relatifs ne fonctionne plus pour la multiplication.

2. L'explication de Stevin (1625)

Voici, par exemple, comment elle est présentée dans l'Arithmétique de Simon Stevin, publiée en 1625 :

« Plus multiplié par plus, donne produit plus, & moins multiplié par moins, donne produit plus, &

plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus, donne produit moins.

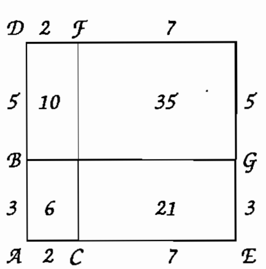
Explication du donné. Soit $8-5$ *multiplié par* $9-7$*, en cette sorte :* -7 *fois* -5 *font* $+35$ *(parce que, comme dit le théorème,* $-$ *par* $-$ *fait* $+$*). Puis* -7 *fois* 8 *fait* -56 *(parce que, comme est dit au théorème,* $-$ *par* $+$ *fait* $-$*). Et semblablement, soit* $8-5$*, multiplié par le* 9*, & donneront produits* $72-45$*. Puis ajoutez* $+72+35$ *font* 107*. Puis ajoutez les* $-56-45$*, font* -101 *; et soustrait le* 101 *de* 107 *telle* 6*, pour produit de telle multiplication. De laquelle la disposition des caractères de l'opération est telle :*

$$\begin{array}{r} 8-5 \\ 9-7 \\ \hline -56+35 \\ 72-45 \\ \hline 6 \end{array}$$

Explication du requis. Il faut démontrer par le dit donné, que $+$ *multiplié par* $+$*, fait* $+$*, & que* $-$ *par* $-$*, fait* $+$*, & que* $+$ *par* $-$*, ou* $-$ *par* $+$*, fait* $-$*.*

Démonstration. Le nombre à multiplier $8-5$ *vaut* 3*, & le multiplicateur* $9-7$ *vaut* 2 *; mais multipliant* 2 *par* 3*, le produit est* 6 *; donc le produit ci-dessus, aussi* 6*, est le vrai produit. Mais le même est trouvé par multiplication, là où nous avons dit que* $+$ *multiplié par* $+$ *donne produit* $+$*, &* $-$ *par* $-$ *donne produit* $+$*, &* $+$ *par* $-$*, ou* $-$ *par* $+$*, donne produit* $-$*, donc le théorème est véritable.*

Autre démonstration géométrique. Soit AB 8–5 (à savoir AD 8 – DB 5). Puis AC 9–7 (à savoir AE 9 – EC 7). Leur produit CB ; ou bien selon la multiplication précédente :



ED 72 – EF 56 – DG 45 + GF 35, lesquelles nous démontrerons être égales à CB en cette sorte : de tout le ED + GF, soustrait EF & DG, reste CB. Conclusion. « Plus », donc, multiplié par « plus », donne produit « plus », et « moins » multiplié par « moins », donne produit « plus ». & « plus » multiplié par « moins », ou « moins » multiplié par « plus » donne produit « moins » ; ce qu'il fallait démontrer. » [8] et [19]

On peut constater que l'explication de Stevin est fondée sur la distributivité et que Stevin prend la peine de faire deux « démonstrations » : l'une arithmétique et l'autre géométrique. Cette règle est introduite par Stevin pour pouvoir calculer des produits du type :

$$(\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{4}-\sqrt{8}+\sqrt{3})$$

qu'il appelle « multinomie radicaux entiers ».

3. L'explication de McLaurin (1748)

« On pourroit de là déduire la règle des signes telle qu'on a coutume de l'énoncer, qui est que les signes semblables dans les termes du multiplicateur & du multiplicande donnent + au produit, & les signes différents donnent –. Nous avons évité cette manière de présenter la règle, pour épargner aux Commençants l'expression révoltante – par – donne +, qui est cependant une conséquence nécessaire de la règle : on peut, comme nous avons fait, la déguiser, mais non l'anéantir ou la contredire ; le Lecteur, sans s'en appercevoir, en a observé tout le sens dans les exemples précédents ; familiarisé avec la chose, pourrait-il encore s'effaroucher des mots ? s'il lui reste là-dessus quelque scrupule, qu'il fasse attention à la démonstration suivante qui attaque directement la difficulté.

$+a-a=0$*, ainsi par quelque quantité qu'on multiplie* $+a-a$*, le produit doit être 0 : si je le multiplie par* n*, j'aurai pour le premier terme* $+na$*, donc j'au-*

rai pour le second $-na$ *, puisqu'il faut que les deux termes se détruisent. Donc les signes différents donnent* $-$ *au produit. Si je multiplie* $+a-a$ *par* $-n$ *, par le cas précédent, j'aurai* $-na$ *pour premier terme ; donc j'aurai* $+na$ *pour second, puisqu'il faut toujours que les deux termes se détruisent ; donc* $-$ *multiplié par* $-$ *donne* $+$ *au produit. »* [8]

McLaurin utilise la distributivité mais de façon plus formelle et générale en utilisant l'astuce du zéro. On peut noter le rôle que joue la démonstration pour McLaurin : éliminer les scrupules éventuels de ceux qui n'auraient pas été convaincus par les exemples.

4. Les explications de Clairaut (1768)

D'abord voici la méthode suivie par Clairaut pour introduire la règle des signes.

1. Calcul algébrique du type $a(b-c+d)$,

2. Calcul algébrique du type

$$(a-b)(c-d+e)$$

où a, b, c, d, e sont des nombres entiers positifs. La règle est utilisée sans être énoncée.

3. Résolution d'un problème (mise en équation) de deux façons différentes où l'une des deux conduit à des produits avec des nombres négatifs.

4. Conséquences : énoncé de la règle et attitude face aux solutions négatives.

On notera aussi la démonstration que Clairaut donne pour le produit de deux quantités négatives *isolées*.

Clairaut

La multiplication, de toutes ces opérations celle qui arrête ordinairement le plus les Commençants, & dont l'explication embarrasse le plus les maîtres : ce principe qu'elle renferme, que deux quantités négatives donnent par leur produit une quantité positive, est presque toujours l'écueil des uns & des autres.

Pour éviter d'y tomber, je n'établis ce principe qu'après avoir fait faire des opérations dans lesquelles on a dû en remarquer la nécessité. Je commence par enseigner à multiplier une quantité composée de plusieurs termes positifs & négatifs par un seul terme que je suppose toujours positif, parce que l'on ne s'accoutume pas ordinairement à considérer une quantité négative, comme existant seule. Cette multiplication étant expliquée je passe à celle où le multiplicateur est aussi bien que le multiplicande composé de plusieurs termes positifs & négatifs, & je fais voir facilement que cette opération n'est autre chose que la première répétée autant de fois qu'il y a de termes dans le multiplicateur, & que, suivant que les termes de ce multiplicateur sont positifs ou négatifs, les produits qu'ils donnent, doivent être ajoutés ou retranchés.

Par ce moyen, je familiarise les Commençants avec la multiplication ; sans que j'aie seulement besoin d'énoncer ces principes ordinaires, que moins par plus donne moins, moins par moins donne plus, &c. qui, en présentant à l'oreille une contradiction dans les mots, laissent presque toujours croire qu'il y en a dans les choses.

On pourrait croire d'abord que je n'ai fait qu'éluder la difficulté, & je n'aurais fait réellement que l'éluder, si je ne parlais pas de la multiplication des quantités purement négatives, par d'autres quantités aussi entièrement négatives, opération dans laquelle on ne saurait éviter la contradiction apparente dont je viens de parler. Mais je traite à fond de cette multiplication, après en avoir montré la nécessité au Lecteur, en le conduisant à un problème où l'on est obligé de considérer des quantités négatives indépendamment d'aucunes quantités positives dont elles soient retranchées.

Lorsque je suis parvenu, dans ce problème, au point où il s'agit de multiplier ou de diviser des quantités négatives les unes par les autres, je prends le parti qu'ont sans doute pris les premiers analystes qui ont eu de ces opérations à faire, & qui ont voulu suivre une route entièrement sûre, je cherche une solution au problème par laquelle je puisse éviter toute espèce de multiplication ou de division de quantités négatives, par ce moyen j'arrive au résultat, sans employer d'autres raisonnements, que ceux sur lesquels on ne peut former aucun doute ; où je vois ce que doivent être ces produits ou quotients des quantités négatives que m'avait donnés la première solution. Il n'est pas difficile ensuite d'en tirer ces principes si fameux que moins par moins fait plus, &c.

Je délivre ainsi ces principes de tout ce qu'il ont de choquant, & le lecteur parvient en même temps à connaître la nature des solutions négatives des problèmes ; il apprend cette vérité si utile, que lorsque dans une solution on arrive à trouver une racine négative, elle doit être prise dans un sens opposé à celui suivant lequel on l'avait employée, en exprimant les conditions du problème.

Voici la démonstration que Clairaut donne pour le produit de quantités négatives isolées :

Pour nous assurer que la multiplication de $-$ *par* $-$ *doit toujours donner* $+$ *au produit, voyons quelle lumière nous pouvons tirer de la méthode générale des multiplications données, art. XLV. Suivant cette méthode, on voit très clairement que le produit d'une quantité telle que* $a-b$ *par une autre* $c-d$, *doit être* $ac-bc-ad+bd$; *& on voit par conséquent en même temps que le terme* bd *qui est venu par la multiplication de* b *&* *de* d *a le signe* $+$, *tandis que les produisants* b *&* d *ont le signe* $-$. *Il ne reste donc plus qu'à savoir si lorsque deux quantités négatives telles que* $-b$ *&* $-d$ *ne seront précédées d'aucune quantité positive, leur produit sera encore* $+bd$. *Or, c'est ce dont il est facile de reconnaître la vérité, puisque la méthode par laquelle on a découvert que le produit de* $a-b$ *par* $c-d$ *était* $ac-bc-ad-bd$, *ne spécifiant aucune grandeur particulière ni à* a *ni à* c, *doit avoir encore lieu lorsque ces quantités sont égales à zéro : or, en ce cas, le produit* $ac-bc-ad+bd$ *le réduit à* $+bd$, *donc* $-b \times -d = +bd$.

5. L'explication d'Euler (1770)

Léonard Euler (1707-1783) fut assurément un virtuose du calcul. Dans ses articles scientifiques, il manie les nombres relatifs et complexes avec ingéniosité et hardiesse, sans trop soulever de questions au sujet de la légitimité de ses constructions. Mais dans un ouvrage destiné aux débutants (Euler 1770), il fait œuvre pédagogique et se trouve dans l'obligation de fournir des explications. Notamment il essaie de justifier la règle des signes. Nous découpons son argumentation en trois parties :

1. La multiplication d'une dette par un nombre positif n'offre guère de difficulté : trois dettes de a écus font une dette de 3a écus. Donc b x (–a) = – ab.

[On remarquera que dans cet exemple, la multiplication est une opération externe. L'argument est donc sans valeur si le multiplicateur n'est pas un entier naturel.]

2. Par commutativité, Euler en déduit que (–a) x b = –ab.

[Argument sans valeur pour une loi externe, que signifie (–3) gains de a écus ?]

3. Il reste à déterminer ce qu'est le produit (–a) par (–b). Il est clair, dit Euler, que la valeur absolue est ab. Il s'agit donc de se décider entre + ab et –ab.

Mais comme (–a) x b vaut déjà –ab, il ne reste plus comme unique possibilité que (–a) x (–b) = ab (! ! !)

Cette pirouette ne dépasse guère le niveau de la vulgarisation. Mais si Euler ne fournit pas ici de meilleure justification de la règle des signes, c'est sans doute qu'il n'en connaissait pas de plus valable. [8]

6. L'explication de Laplace (1795)

Dans les célèbres conférences pédagogiques que Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) fit à l'Ecole Normale Supérieure (Pluviôse an III), il commence par manifester le même embarras que ses prédécesseurs, témoignant ainsi que la théorie des nombres relatifs n'était pas considérée comme facile. Mais il entrevoit les éléments de la solution :

« [La règle des signes] présente quelques difficultés : on a peine à concevoir que le produit de –a par –b soit le même que celui de a par b. Pour rendre cette identité sensible, nous observerons que le produit de –a par +b est –ab (puisque le produit n'est que –a répété autant de fois qu'il y d'unités dans b). Nous observerons ensuite que le produit de –a par (b – b) est nul, puisque le multiplicateur est nul ; ainsi le produit de –a par +b étant –ab , le produit de –a par –b doit être de signe contraire ou égal à +ab pour le détruire. »

On notera dans ce texte :

a. La même maladresse que chez Euler pour démontrer b x (–a) = – ab.

b. La mise en évidence du rôle de la distributivité, dans la démonstration.

c. L'absence de référence à un modèle physique, (l'obstacle (6) est ainsi contourné) et une approche, *en apparence*, purement formelle.

d. Mais l'idée d'une extension formelle du système numérique ne semble pas avoir effleuré l'esprit de Laplace. L'emploi des mots que nous soulignons (« sensible », « doit être »), etc.) ne révèle-t-elle pas une croyance implicite en un système numérique préexistant, dont il suffirait de déchiffrer les propriétés ? [8]

7. L'explication de Cauchy (1821)

« D'après ces conventions, si l'on représente par $\mathcal{A}$ soit un nombre, soit une quantité quelconque, et que l'on fasse $a = +\mathcal{A}$, $b = -\mathcal{A}$, *on aura* $+a = +\mathcal{A}$, $+b = -\mathcal{A}$, $-a = -\mathcal{A}$, $-b = +\mathcal{A}$.

Si dans les quatre dernière équations, l'on remet pour a et b leurs valeurs entre parenthèses, on obtiendra les formules

$$(1)\quad \begin{array}{ll} +(+\mathcal{A}) = +\mathcal{A}, & +(-\mathcal{A}) = -\mathcal{A}, \\ -(+\mathcal{A}) = -\mathcal{A}, & -(-\mathcal{A}) = +\mathcal{A}. \end{array}$$

Dans chacune de ces formules le signe du second membre est ce qu'on appelle le produit des deux signes du premier. Multiplier deux signes l'un par l'autre, c'est former leur produit. L'inspection seule des équations (1) suffit pour établir la règle des signes, comprise dans le théorème que je vais énoncer.

1er Théorème : Le produit de deux signes semblables est toujours +, et le produit de deux signes opposés est toujours −. » Cité dans [8]

8. L'explication de Hankel (1867)

La révolution accomplie par Hankel consiste à aborder le problème dans une *toute autre perspective*. Il ne s'agit plus de déterrer dans la Nature des exemples pratiques qui « expliquent » les nombres relatifs sur le mode métaphorique. Ces nombres ne sont plus *découverts*, mais *inventés, imaginés*.

Connaissant, par exemple, les propriétés additives de $\mathbb{R}$ et la multiplication de $\mathbb{R}^+$, Hankel propose explicitement de prolonger la multiplication de $\mathbb{R}^+$ à $\mathbb{R}$ en respectant un *principe de permanence* : la structure algébrique cherchée doit avoir de bonnes propriétés.

L'existence et l'unicité du prolongement résulte du théorème suivant :

Théorème : La seule multiplication sur $\mathbb{R}$, qui prolonge la multiplication usuelle sur $\mathbb{R}^+$, en respectant les distributivités (à gauche et à droite) est conforme à la règle des signes.

Dès que l'on a formulé ce problème, la démonstration est triviale :

$0 = a \times 0 = a \times (b + \text{opp } b) = ab + a \times (\text{opp } b)$

$0 = 0 \times (\text{opp } b) = (\text{opp } a) \times (\text{opp } b) + a \times (\text{opp } b)$

D'où $(\text{opp } a) \times (\text{opp } b) = ab$

D'ailleurs cette démonstration n'est même pas originale. Elle se retrouve essentiellement dans beaucoup de textes antérieurs, notamment chez MacLaurin et Laplace. Cependant, on notera une différence considérable : Laplace croit en l'existence, *a priori*, d'une multiplication des relatifs, dans la Nature. Selon lui, il ne reste qu'à la découvrir, et le raisonnement précédent prouve que cela n'est possible que conformément à la règle des signes.

9. L'explication de Neveu (1911)

Elle utilise pour modèle concret le déplacement d'un mobile à vitesse constante. Le livre est un manuel pour l'enseignement primaire supérieur.

NEVEU. — Cours d'algèbre. (1911)

CALCUL ALGEBRIQUE

30. — Multiplication. — *On appelle produit de deux nombres algébriques a et b un troisième nombre algébrique dont la valeur absolue est égale au produit des valeurs absolues des deux nombres, et qui est affecté du signe + si les deux nombres sont de même signe, et du signe – s'ils sont de signes contraires.*

Pour justifier cette définition, cherchons l'espace **e** parcouru par un mobile qui se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme avec la vitesse **v** pendant le temps **t**.

On a vu (n° 7) que l'espace **e** parcouru est donné par la formule :

$$\mathbf{e} = \mathbf{v\,t}.$$

Le mobile se déplaçant sur la droite XY, nous supposerons v positif, lorsque le mobile marche dans le sens de X vers Y, sens positif, et v négatif lorsque le mobile marche en sens inverse.

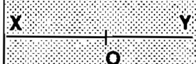


Fig. 9

De même, t sera *positif* s'il s'agit d'un temps *avenir*, et *négatif* s'il s'agit d'un temps *passé*. Dans ce dernier cas, on cherche la position du mobile avant l'*époque actuelle*, ou origine des temps.

L'origine des distances O est le point où le mobile se trouve à l'origine des temps, c'est-à-dire au temps *zéro*, ou époque actuelle.

Le nombre algébrique qui mesure le segment compris entre l'origine O et la position finale du mobile au temps t représentera le produit vt généralisé.

— 1° Dans le cas où v et t sont positifs, le mobile est évidemment situé à droite de O au bout du temps t ; de sorte que le nombre qui mesure le segment parcouru est positif.

Donc : *le produit de deux nombres positifs est un nombre positif.*

Ce produit n'est autre que le produit de deux nombres arithmétiques.

— 2° *Multiplication d'un nombre négatif par un nombre positif.*

Soit

$v = -2$ et $t = +3$ (évalué en secondes)

La vitesse étant négative, le mobile se déplace dans le sens de Y vers X. Dans 3 secondes, le mobile sera en un

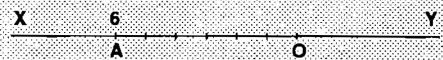


Fig. 10

point A situé à *gauche* de O à une distance égale à 3 fois la vitesse 2 en valeur absolue, c'est-à-dire à la distance G. On a donc :

$$\overline{OA} = -6$$

Par suite, on a :

$$(-2)(+3) = -6$$

Donc : *le produit d'un nombre négatif par un nombre positif est un nombre négatif.*

— 3° *Multiplication d'un nombre positif par un nombre négatif.*

Soit

$$v = +2 \quad \text{et} \quad t = -3.$$

La vitesse étant positive, le mobile se déplace dans le sens de X vers Y ; mais t étant négatif, il s'agit de trouver la position du mobile il y a 3 secondes. Il est évident qu'à ce moment le mobile était à *gauche* du point O à la distance 6 (*fig. 10*). On a donc :

$$(+2)(-3) = -6$$

Donc : *le produit d'un nombre positif par un nombre négatif est un nombre négatif.*

— 4° *Multiplication d'un nombre négatif par un nombre négatif.*

Soit : $v = -2$ et $t = -3$.

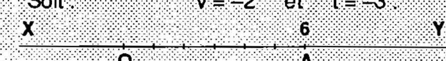


Fig. 11

La vitesse étant négative, le mobile se déplace dans le sens de Y vers X ; or, au temps zéro il est au point O, donc il y a 3 secondes il était évidemment à *droite* de O à une distance OA égale à 6. Le segment $\overline{OA}$ étant positif, on a donc :

$$(-2).(-3) = +6$$

Donc : *le produit de deux nombres négatifs est un nombre positif.*

La définition se trouve donc justifiée.
— Ainsi, en résumé :
1° *le produit de deux nombres algébriques de même signe est positif.*

2° *Le produit de deux nombres algébriques de signes contraires est négatif.*

On a ainsi la *règle des signes* relative à la multiplication, et qu'on peut énoncer comme il suit :

+ par + donne +,
— par — donne +,
+ par — donne —,
— par + donne —.

31. — REMARQUE. — Si l'on compare les produits suivants :

$$(+2)(+3) = +6,$$
$$(-2)(+3) = -6,$$
$$(+2)(-3) = -6,$$
$$(-2)(-3) = +6,$$

on en tire les conséquences suivantes :

1° *Si, dans un produit de deux facteurs, on change le signe d'un facteur, le produit change de signe.*

2° *Si, dans un produit de deux facteurs, on change les signes des deux facteurs, le produit ne change pas de signe.*

— La définition du produit d'un nombre quelconque de facteurs est analogue à celle donnée en arithmétique, et l'on vérifie facilement que :

1° *Si, dans un produit de plusieurs facteurs, on change les signes d'un nombre impair de facteurs, le produit change de signe.*

2° *Si, dans un produit de plusieurs facteurs, on change les signes d'un nombre pair de facteurs, le produit ne change pas de signe.*

32. — *Puissance.* — Rappelons que : *la puissance n d'un nombre est le produit de n facteurs égaux à ce nombre.*

En appliquant la règle de la multiplication, on a successivement :

$$(-a)^2 = (-a)(-a) = +a^2,$$
$$(-a)^3 = (+a^2)(-a) = -a^3,$$
$$(-a)^4 = (-a^3)(-a) = +a^4,$$
....

On voit donc que :

1° *Les puissances paires d'un nombre négatif sont positives.*

2° *Les puissances impaires d'un nombre négatif sont négatices.*

33. — *Division.* — *Diviser a par b, c'est chercher un nombre qui, multiplié par b, reproduise a.*

Ce nombre est le *quotient* de a par b.

Je dis que l'on peut écrire :

$$(+15) : (-3) = -5.$$

[...]

10. Dans un bulletin de l'APMEP des années 80

En vertu du principe de continuité ...

4	x	(–3)	=	–12
3	x	(–3)	=	– 9
2	x	(–3)	=	– 6
1	x	(–3)	=	– 3
0	x	(–3)	=	0
(–1)	x	(–3)	=	......
(–2)	x	(–3)	=	......
(–3)	x	(–3)	=	......
(–4)	x	(–3)	=	......
...	...			...

+ 3
+ 3
+ 3
+ 3
+ 3
+ 3
+ 3
+ 3
+ 3
+ 3

donc :

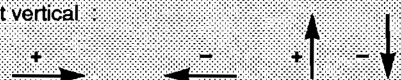
(–1) x (–3) = + 3
(–2) x (–3) = + 6
(–3) x (–3) = + 9
(–4) x (–3) = + 10
... ...

10. Les aires orientées : L'histoire revisitée en 1988

Voici la présentation donnée par un collègue de l'IREM de Lille [21] qui fait la synthèse de l'idée de déplacement et de la représentation du produit de deux nombres par un rectangle comme le faisait Euclide.

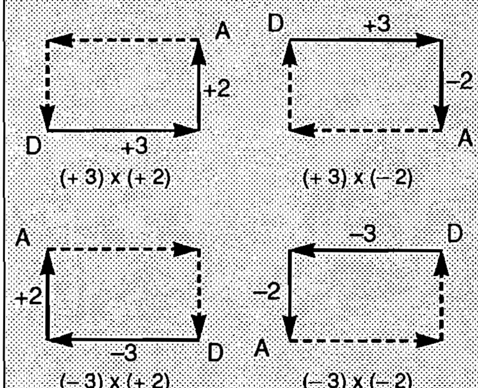
Une introduction géométrique ([21])

Une unité étant choisie, un nombre relatif est représenté par un segment orienté, matérialisant un déplacement, soit horizontal,
soit vertical :



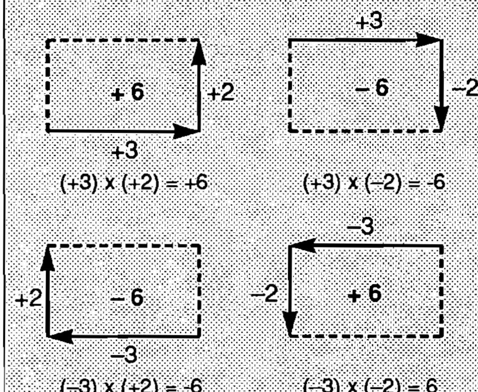
La somme de deux relatifs se représente à l'aide de deux déplacements successifs.

Pour le produit, il procède ainsi :



On n'obtient alors que deux sens de parcours possibles. On attribue le signe + à celui dont on sait qu'il représente un produit positif : (+ 3) x (+ 2) = 3 x 2 = 6 = + 6.

Donc on a :



IV — Conséquences pour l'Enseignement

1. Le point de vue de Lacroix (1765-1843)

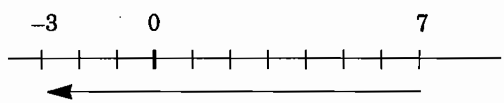
« *Je me suis convaincu de plus en plus, à chaque cours, que la considération des quantités négatives isolées était en général placée trop près du commencement, dans la plupart des livres élémentaires ; et cela est d'ailleurs confirmé par l'histoire de la science, où l'on voit que l'explication des solutions négatives des problèmes est un des derniers progrès de l'analyse, dû à Descartes. Aussi la plupart des auteurs ne se sont adressés sur ce sujet qu'à la mémoire ; et ceux qui, ne voulant pas en fait un objet d'autorité, ont cherché à expliquer la nature de ces quantités, ont eu recours à des comparaisons forcées, commes celles des biens et des dettes, qui ne conviennent qu'à des cas particuliers de cette théorie.*

Ce n'est d'ailleurs que par l'application de l'Algèbre à la Géométrie, qu'on peut concevoir dans son ensemble la théorie des quantités négatives, puisque les principales circonstances de cette théorie sont des faits algébriques qu'il faut se contenter de bien constater et de classer ensuite dans l'ordre qui les fait le mieux ressortir. C'est aussi ce que j'ai tâché de faire craignant, d'après une observation très répétée, l'obscurité que des détails métaphysiques trop étendus et trop multipliés jettent dans l'esprit des commençans ; car on abuse aussi en Mathématiques du raisonnement, lorsqu'on s'obstine à ne pas reconnaître certains faits résultant des combinaisons du calcul, qui ne peuvent s'expliquer plus clairement que par eux-mêmes. » [21]

Connaissant maintenant le temps qu'il a fallu pour élaborer la notion de nombre négatif et toutes les difficultés que son apparition a créées, il nous reste à mettre à jour les obstacles qui vont s'opposer à la mise en place des relatifs chez les élèves et à ménager le franchissement de ces obstacles.

2. A propos des nombres relatifs

Pour l'élève de sixième, le zéro est absolu et toute soustraction n'est pas possible. Il s'agit donc de faire comprendre à l'élève que l'on crée de nouveaux nombres qui vont résoudre des problèmes impossibles. Pour faire une soustraction « impossible » au CM_2 , du type « 7 – 10 » , il faut aller au « dessous » de zéro.



3. A propos des opérations

Le bon sens, les bonnes images anciennes doivent évoluer : dans une notion tout ne se généralise pas, ce qui est dur à admettre et surtout à mettre en pratique.

Pour l'addition déjà il y a conflit : une addition de relatifs peut être obtenue à partir d'une addition arithmétique ou d'une soustraction arithmétique. Il faut donc utiliser des soustractions pour faire des additions ! Il faut donc que l'élève comprenne qu'il y a alors généralisation du sens de l'addition et que le + qui signifie « et » change de sens quand le nombre qui le suit est négatif. (cf. Texte de Clairaut § II-4.).

Seul est conservé le sens du « et » : « et ensuite », c'est-à-dire le sens de concaténation.

Pour la soustraction elle garde son nom mais perd son statut puisqu'on la remplace par une addition, celle du nombre opposé. Mais tout d'abord ce qui arrête l'élève c'est que pour lui « la différence c'est le nombre qu'il faut ajouter au plus petit pour obtenir le plus grand » alors que ce qui se généralise c'est « la différence c'est le nombre qu'il faut ajouter au second pour obtenir le premier ». (cf. Lacroix § II-4.). Et même si l'élève comprend que $7 - 10 = -3$ car c'est relativement immédiat, il a beaucoup de mal à comprendre que $(-20) - (+2)$ soit possible.

4. A propos des écritures simplifiées

Des exercices sur des gains et des pertes traduits sous la forme

$$+3-5+1$$

confortent la perception du nombre comme absolu et du signe comme une affectation : augmentation ou diminution. C'est ce qui a été le cas jusqu'au XIXème siècle (cf. § II-5.). De plus si le statut du nombre est flou, celui des opérations est aussi flou. Dans $+ 3 - 5 + 1$ le signe $-$, par exemple, désigne une diminution mais en même temps une soustraction !

Face à de telles écritures, deux problèmes se posent :

— où est le nombre négatif ?

— où est l'opération ?

En effet quand j'écris « + 3 − 5 » (cf. Descartes § II-3.) je fais une soustraction avec des nombres entiers « positifs » et je donne un résultat négatif, + indique que j'ai 3 francs en poche par exemple et − que je perds 5 francs. A proprement parler il ne s'agit ni d'une addition, ni d'une soustraction avec des relatifs. Si l'on veut que les relatifs aient leur statut de nombre avec leurs opérations il faudrait donc traduire « je gagne 3 » et « je perds 5 » sous la forme : $(+3) + (-5)$, en mettant bien en évidence le sens de + (qui, lui, a changé alors de statut cf. § IV-3.). Par contre une écriture simplifiée du type « 3 − 5 » désigne en fait une soustraction et devrait donc être interprétée ou traduite par : $(+3) - (+5)$.

5. La multiplication

Pour la multiplication il faut bien mettre en évidence que le modèle concret adopté pour l'addition ne fonctionne pas. On peut rechercher un autre modèle (cf. § III-9. et III-11.) mais il faut se rappeler qu'originellement la règle des signes prend racine dans la distributivité donc dans les problèmes de calcul algébrique liés aux équations. Pour lui donner sens, peut être vaudrait-il mieux la replacer dans son contexte.

6. A propos des modèles concrets

Des textes des paragraphes précédents montrent bien comment certains modèles concrets, donnés pour faire comprendre ou fonctionner une règle, peuvent soit en entraver la compréhension, soit être un obstacle à la compréhension d'une autre règle : par exemple, un modèle pour l'addition ne fonctionne plus pour la multiplication. C'est le problème de Stendhal (§ III-1.), c'est ce que rappelle aussi Lacroix (§ IV-1.) et ce qui apparaît aussi dans les objections de Carnot (§ II-1.).

Il faut donc bien avoir conscience, lorsqu'on donne de tels modèles pour faire comprendre, que l'on peut en même temps créer des obstacles, ce qui est peut-être inéluctable : mais il faudra alors prévoir ensuite leur dépassement par les élèves. En ce qui concerne les relatifs, l'important est de se rappeler que ces nombres ont pour fonction de résoudre des problèmes théoriques de type algébrique, et non des problèmes concrets : les modèles concrets ne sont que des aides pédagogiques, et qu'il n'est pas toujours possible, ni même souhaitable, d'en donner.

7. Conclusion

Pour l'enseignement des relatifs nous avons peut-être à tenir deux points de vue complémentaires :

Le point de vue moderne : les relatifs sont de nouveaux nombres pour lesquels on essaie d'étendre et de généraliser les opérations connues. Il s'agit alors de revenir sur le sens de ces opérations.

Le point de vue ancien : les relatifs s'imposent dans la résolution des équations et leurs règles d'emploi découlant du calcul littéral. Il s'agit alors essentiellement d'un outil algébrique. Ceci devrait inciter à ne pas séparer calcul algébrique littéral et calcul numérique.

Nous terminerons cette étude sur un dernier exemple consacré à une présentation datant du début du siècle ...

Introduction aux relatifs au début du siècle ([20])

CHAPITRE PREMIER
NOMBRES POSITIFS ET NOMBRES NEGATIFS

20. — Soit à retrancher le nombre 7 du nombre 5. Au sens même arithmétique, cette opération est impossible ; on ne peut, en effet, retrancher 7 de 5.

Dans un but de *généralisation*, l'algèbre ne rejette pas cette opération. On convient de représenter le résultat par -2 ; on écrit donc :

$$5 - 7 = -2 .$$

Le nombre -2 est dit un nombre *négatif*, et tout nombre précédé du signe $+$ est appelé nombre *positif*.

Les nombres *positifs* et les nombres *négatifs* forment ce qu'on appelle les nombres *algébriques*.

L'introduction des nombres négatifs simplifie certaines questions et permet d'interpréter des résultats qui, tout d'abord, paraissent impossibles ou absurdes. C'est ce qui arrive dans tous les problèmes où la quantité demandée peut être comptée dans deux sens opposés, comme, par exemple, le temps *avenir* ou *passé* ; un gain ou une perte ; une distance qui peut être portée dans un sens ou dans un autre par rapport à une origine choisie ; une température, etc.

Ainsi, imaginons un joueur qui convient de représenter les *gains* qu'il réalise par des nombres *positifs* et les *pertes* par des nombres *négatifs*, puis reprenons l'opération indiquée par $5 - 7$. Elle indique qu'une perte de 7 francs a succédé à un gain de 5 francs ; le résultat des deux opérations est donc une perte de 2 francs, qui, par conséquent, sera représentée par le nombre négatif -2 ; ce qui donne un sens à l'égalité

$$5 - 7 = -2 .$$

Si l'on veut exprimer que la perte -7 *s'ajoute* au gain $+5$, on écrira, en plaçant les nombres entre parenthèses :

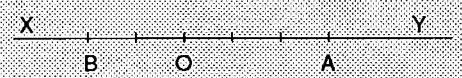
$$(+5) + (-7) ,$$

et l'on voit que, en réalité, ajouter -7 revient à retrancher 7 ; de sorte que l'on peut écrire :

$$(+5) + (-7) = +5 - 7 = -2 .$$

[...]

Le signe $+$ ou $-$ placé devant le nombre arithmétique qui mesure la distance n'est donc pas ici un signe d'opération ; il est employé exclusivement pour indiquer le *sens* dans lequel la distance doit être portée.



Ainsi, un point A situé à la distance $+3$ du point O sera à droite de ce point à une distance égale à 3 fois l'unité de longueur ; un point B situé à la distance -2 du point O sera à gauche de ce point à une distance égale à 2 fois l'unité de longueur. De sorte que l'on écrira :

$$OA = +3 ,$$
$$OB = -2 ,$$

3 et 2 représentant des mètres, des décimètres, des centimètres, ... suivant que l'unité de longueur est le mètre, le décimètre, le centimètre, ...

— Ainsi, en résumé : *un nombre positif est un nombre arithmétique précédé du signe* $+$.

Un nombre négatif est un nombre arithmétique précédé du signe $-$.

En général, *un nombre algébrique est un nombre positif ou négatif.*

22. — ***Valeur absolue d'un nombre algébrique.***

— On appelle *valeur absolue* d'un nombre algébrique, la valeur abstraction faite du signe.

Ainsi, les nombres algébriques $+2$ et -2 ont la même valeur absolue qui est 2.

La valeur obtenue en tenant compte du signe est la valeur *relative*.

Deux nombres algébriques de signes différents, mais de même valeur absolue, sont dits *égaux et de signes contraires*. On les appelle encore des nombres *opposés*.

[...]

OPERATIONS SUR LES NOMBRES ALGEBRIQUES

24. — ***Addition.*** — On appelle somme de deux nombres algébriques un troisième nombre algébrique obtenu comme il suit :

1° *Si les deux nombres algébriques sont de même signe, leur somme est un nombre algébrique de même signe dont la valeur absolue est égale à la somme des valeurs absolues des deux nombres.*

2° *Si les deux nombres algébriques sont de signes contraires, leur somme est un nombre algébrique dont la valeur absolue est la différence des valeurs absolues des deux nombres, et qui a pour signe le signe du plus grand des deux nombres en valeur absolue.*

Ainsi, en plaçant chaque nombre avec son signe entre parenthèses, on écrira :

$$(+3) + (+5) = +8\,,$$
$$(-3) + (-2) = -5\,,$$
$$(+5) + (-3) = +2\,,$$
$$(+3) + (-5) = -2\,.$$

Pour justifier cette définition, nous allons faire la somme des deux segments ayant respectivement pour mesures les deux nombres algébriques dont on veut faire la somme.

Pour faire la somme de deux segments, on porte le second à la suite du premier dans le sens indiqué par le signe, en plaçant l'origine du second à l'extrémité du premier : *le segment compris entre l'origine du premier et l'extrémité du second est alors la somme des deux segments.*

[...]

28. — ***Soustraction.*** — Retrancher b de a, *c'est chercher un nombre tel qu'en l'ajoutant à* b *on retrouve* a.

Soit à calculer : $5 - (-3)$.

Je dis que la différence est $5 + 3$. En effet, si à ce nombre on ajoute -3, on obtient :

$$5 + 3 - 3 = 5\,.$$

Donc $5 + 3$ représente la différence cherchée. Ainsi, on a :

$$5 - (-3) = 5 + 3 = 8\,.$$

Retrancher -3 revient donc à ajouter $+3$; de sorte que la soustraction ainsi généralisée n'implique plus nécessairement l'idée de *diminution*, pas plus d'ailleurs que l'addition qui n'implique pas nécessairement l'idée d'*augmentation*. Aussi, pour éviter l'ambiguïté, on emploie les expressions *somme algébrique* et *différence algébrique*.

On aura de même :

$$-5 - (-4) = -5 + 4 = -1\,.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Le matin des mathématiciens*, Belin, 1985.

[2] HOE J. *Les systèmes d'équations polynômes dans le Siyuan Yujian*, 1303.

[3] TATON. *Histoire du calcul*, Que sais-je ? n° 198, PUF.

[4] ITARD. *Matériaux pour l'histoire des nombres complexes*, brochure APMEP n° 2, 1969 .

[5] MARIE M. *Histoire des Sciences mathématiques et Physiques*, tome II, 1 883 .

[6] ARNAULD. *Nouveaux éléments de Géométrie*, 1667.

[7] DE L'HOPITAL. *Analyse des infiniment petits*, 1716.

[8] GLAESER. *Epistémologie des nombres relatifs*, in Recherches en didactique des mathématiques, vol 2. 3., Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1981 .

[9] NEVEU. *Cours d'Algèbre*, Masson 1911.

[10] MAILLARD. *Mathématiques 4ème*, Hachette, 1959.

[11] LEBOSSÉ-HEMERY. *Mathématiques 4ème*, Nathan, 1965.

[12] DHOMBRES et Alia. *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars, 1987.

[13] SCHUBRING G. *Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs*, in Petit x, n° 12, Irem de Grenoble, 1986.

[14] DESCARTES. *La Géométrie*, 1637.

[15] *Petit x*, n° 3, Irem de Grenoble, 1983.

[16] CLAIRAUT. *Eléments d 'Algèbre*, 1768.

[17] D'ALEMBERT et Alia. *Encyclopédie Méthodique Mathématiques*, tome 2, 1785. Réédition ACL éditions 1987.

[18] STENDHAL. *Vie de Henry Brulard*, Gallimard 1973, (folio n° 447).

[19] STEVIN. *L'Arithmétique*, Leide 1625. (BM LA ROCHELLE).

[20] SIP J. *Les nombres relatifs au Collège*, dans Bulletin Inter-Irem, Histoire des mathématiques (juin 1988).

[21] LACROIX. *Essais sur l'enseignement*, Bachelier, 1828.