REPERES - IREM . n°2 - janvier 1991

A PROPOS DES NOUVEAUX PROGRAMMES

Philippe LOMBARD
Irem de Lorraine

« ... dessine-moi un mouton ... »

Costa-Gavras, le réalisateur du film « Z », avait-il choisi ce titre de façon à s'assurer la sympathie de l'association des professeurs de mathématiques ? Grâce à lui en tout cas, des millions de spectateurs découvrirent incidemment l'une des bêtes noires du fascisme contemporain : parmi les premières mesures imposées par le régime des colonels, ... figurait en bonne place l'interdiction des mathématiques modernes !

Les raisons profondes des militaires grecs peuvent laisser perplexe, mais la question n'est plus guère d'actualité : leurs illusions n'ont pas mis vingt ans pour s'effondrer. Plus inquiétant, en revanche, est cet amalgame *maths modernes / antifascisme* qui ne choquait nullement l'intelligentsia de l'époque, cette alliance objective qui portait à voir dans « la Mathématique contemporaine » une des clés de « l'évolution sociale, économique et technologique », la pièce essentielle d'un nouvel humanisme véritablement adapté à notre siècle, le moyen de « donner à chacun la capacité de s'adapter aux conditions largement imprévisibles de l'avenir » [1].

Combien de temps les illusions de ceux qui y ont cru auront-elles mis, sinon pour s'effondrer, du moins pour faire une place au principe de réalité ? Après dix années d'expérience, suivies de dix années de transition, tout porte à croire que la querelle des anciens et des modernes n'a plus vraiment cours. Est-ce dire pour autant que la révolution des programmes de 1970 s'est trouvée silencieusement remplacée par un nouvel ordre des choses ? que, de façon inéluctable, le balancier de l'Histoire a opéré son retour vers l'ordre antérieur ? ... Rien n'est moins sûr.

Certes, à observer ici ou là certaines pratiques quotidiennes, on peut parfois penser que la profondeur du changement conserve quelques chances de n'être vraiment mesurée ... qu'au moment où la prochaine réforme viendra mettre en lumière ce qu'il conviendra précisément d'abandon-

[1] Ces expressions entre «...» sont extraites de la " Charte de Chambéry ", supplément au *Bulletin de l'A.P.M.E.P*, n° 263-264 — Juil. - Oct. 1968.

ner. Certes, l'heure est plus à la mise en place, années après années, de nouveaux remèdes miracles qui relèvent beaucoup moins d'une *réflexion sur les contenus* que de la métamorphose en idées de patronage des utopies les plus porteuses de la didactique ... Certes, l'inertie propre au système se conjugue admirablement au contexte des « 80% » pour occulter les vraies questions et pour enfermer le débat dans les simplifications idéologiques ... On assiste pourtant aujourd'hui, pour peu que l'on veuille bien observer la mise en place des nouveaux programmes, à rien moins qu'à un *phénomène global de rejet*.

Là où la réforme semble le mieux acceptée c'est, qu'en réalité, elle n'a pratiquement rien changé aux discours ... ailleurs, les inquiétudes ne tardent généralement pas à s'exprimer : « mais que vont-ils donc savoir au moment d'entrer en seconde ? ... », « l'algèbre a disparu, la géométrie est réduite à presque rien, on ne sait vraiment plus quoi leur faire ! ... », « la démonstration est interdite, on ne leur apprendra même plus à raisonner ! ... » Bref : ***forme-t-on encore les élèves!?*** D'un côté des réticences qui vont bien au-delà de la simple mauvaise humeur inhérente à tout changement. De l'autre une routine inébranlable ancrée, quoi qu'on en dise, dans le confort des « maths modernes ». Les conditions sont ainsi réunies, soit d'une nouvelle crise, soit d'un nouveau rendez-vous manqué. Et ceux qui voudraient en apercevoir les causes les trouveraient sans peine : tout comme l'avait fait en son temps l'introduction aux mathématiques dites « modernes » — mais privé cette fois de l'alibi de la modernité — le retour en arrière contient en germe un risque réel de déstabilisation des enseignants vis-à-vis de leur discipline, vis-à-vis de l'idée qu'ils s'en font, vis-à-vis de tous les discours contradictoires qu'elle aura suscités jusqu'ici.

Il n'y a d'ailleurs rien d'étonnant à cela, puisque l'on a formé — *et que l'on forme toujours* — des promotions entières de professeurs pour enseigner les mathématiques dans l'*état d'esprit* des programmes de 1970, alors que les programmes que l'on se propose de mettre en place supposent, pour fonctionner efficacement, une rupture presque totale avec cet *état d'esprit*. C'est cette rupture qu'il convient d'analyser une fois de plus, en essayant de ne pas se cantonner trop facilement dans la simple volonté de « retour au concret » manifestée haut et fort par la réforme actuelle, même si certains pensent résumer le problème dans l'éternelle — et bien superficielle — notion de « modélisation du réel ». La question, en effet, est beaucoup plus difficile que celle d'une vague « modélisation » qu'il suffirait de savoir appliquer aux diverses « situations-problèmes » rencontrées, de-ci de-là, au cours de l'apprentissage ... On ne saurait, au contraire, faire plus longtemps l'économie du véritable débat de fond que la crise de l'enseignement des mathématiques s'est ingéniée à masquer depuis vingt ans : celui de la nature même des « modèles » proposés par les mathématiques et, plus encore, celui de la finalité que l'on veut bien assigner à leur enseignement.

Le constructivisme des années 70

« Formalisme », « structuralisme », « dogmatisme », « bourbakisme », ... dès l'introduction des « maths modernes », les barbarismes n'ont pas manqué pour qualifier les perversions d'un processus qui dépassait largement les espérances de ses auteurs. Il faut dire qu'eux-mêmes avaient fourni les verges pour se faire battre : « *ce qu'on appelle un peu vite la mathématique moderne, ce qu'il conviendrait mieux d'appeler la conception constructive, axiomatique, structurelle des mathématiques,* [...] *s'adapte " comme un gant ", nous permettons-nous de dire, à la formation de la jeunesse de notre temps* », ou encore : « *les notions ensemblistes,* [...] *la notion de structure qui sert d'armature à l'œuvre de Bourbaki peuvent être comparées, quant à leurs effets, au rôle qu'aurait un urbaniste disposant de crédits pour supprimer les bidonvilles* »(²) ... les slogans ne manquèrent pas.

S'il fallait aujourd'hui classer les priorités de l'époque, c'est incontestablement la *façon de présenter la construction du savoir mathématique* qui apparaîtrait comme la clé de voûte de la pensée des réformateurs de 1970 : *construction* progressive et raisonnée s'opposant aux méthodes magistrales et *dogmatiques* du modèle antérieur. Cependant, cette opposition *constructivisme / dogmatisme* , qui paraît bien légitime à première vue, fut contaminée d'entrée de jeu par une question nettement plus idéologique sur laquelle il n'est pas inutile de s'arrêter un instant si l'on veut clarifier le débat : celle de l'opposition *constructivisme / idéalisme* , bien insoluble malheureusement, mais qui n'en ressurgit pas moins périodiquement aux détours de la plupart des analyses.

Ce *constructivisme*-là, lorsqu'il est opposé à la question de l'*idéalisme*, fait référence à une réaction philosophique vis-à-vis des doctrines platoniciennes sur la nature profonde de la *connaissance*, et en particulier de la connaissance scientifique. Pour les « idéalistes », le travail du mathématicien consiste à « dé – couvrir », c'est-à-dire à *soulever partiellement un coin du voile* masquant des vérités cachées, des principes d'ordre divin, préexistant en quelque sorte à leur mise en lumière. La position des « constructivistes » pose au contraire que ni les objets, ni les vérités qui sont manipulés par les mathématiciens n'ont besoin d'une « existence » ou d'une « signification », en dehors de celles que leur confère la construction axiomatique, seule véritable *règle du jeu*, décidée par les mathématiciens eux-mêmes.

Bien évidemment, la question de savoir *où est un théorème* avant qu'il ne soit découvert est, en première analyse, très sensiblement équivalente à celle de savoir ... *où va la flamme d'une bougie* quand on la souffle ! Mais même s'il faut bien convenir qu'en seconde analyse le problème ne parvient guère à devenir beaucoup plus consistant, on aurait tort de le négliger trop vite ...

D'abord parce qu'il condense une quantité invraisemblable d'angoisses existentielles auxquelles la métaphysique — des religions les plus anciennes aux matérialismes les plus cyniques — est précisément chargée d'apporter des éléments de réponse. Ensuite parce qu'il n'est rien moins qu'inquiétant de constater les conséquences habituellement funestes pour les nations des désaccords inhérents à ce genre de question. Enfin parce qu'il est difficile de ne pas se sentir interpelé — comme on a pris coutume de dire dans la sphère des Missions Académiques — dès que l'on apprend que la réponse, même inconsciente, que chacun peut y apporter serait déterminante en fin de compte dans sa position sur les programmes de mathématiques ...

(²) **Charte de Chambéry** , voir plus haut.

Cela dit, s'il est indéniable que les mathématiciens finissent presque toujours — mathématiquement parlant — par tomber d'accord sur tout, ils ne le sont jamais sur la question de savoir s'ils sont plutôt « idéalistes » ou plutôt « constructivistes ». Tous conviennent cependant que l'influence de ce point sur le besoin qu'ils ont de *chercher* des théorèmes, mais aussi d'imaginer des *constructions* logico-déductives permettant de les rattacher à un très petit nombre d'axiomes, tous conviennent donc, que cette influence s'est toujours révélée ... rigoureusement identique à zéro. Dans l'état actuel de la discussion, il nous faut par conséquent considérer que cette interprétation du *constructivisme* ne peut avoir eu qu'une influence assez obscure sur le phénomène des maths modernes. Les lecteurs particulièrement angoissés, inquiets, ou plus simplement « interpelés », pourront se reporter s'ils le désirent aux quelques centaines de pages écrites pour montrer en quoi la réforme de 1970 était une réaction à l'*idéalisme* antérieur — celles-là même qu'avaient lues les colonels grecs pour y voir un matérialisme toxique. Ils pourront pareillement se reporter — avis aux militaires de tous les pays ... — aux quelques centaines de pages qui ont été écrites depuis, pour expliquer en quoi la réforme actuelle n'est rien d'autre ... qu'une réaction à l'*idéalisme* de « la Mathématique moderne ».

En fait, il est clair dans le problème qui nous concerne, qu'il ne s'agit pas tant de *réinventer le savoir scientifique*, que *d'aider à l'appropriation* de ce savoir par des élèves et de gérer — si cela est possible — une *reconstruction* partielle de ce savoir. C'est sur ce point que le débat entre « dogmatisme didactique » et « constructivisme » est fondamental. C'est sur ce point que les choix de 1970 furent déterminants et instaurèrent un *état d'esprit* qui est toujours présent.

Comparons par exemple une définition introduite en 1970, comme :

> *les droites sont des sous-ensembles du plan qui vérifient les propriétés d'incidence ... ,*

avec l'absence totale de définition qui, pratiquement, prend force de loi dans les programmes d'aujourd'hui, ... ou encore avec une définition du type suivant, qui avait cours depuis quelques siècles :

> *une droite est une ligne sans épaisseur qui ... .*

Depuis 1970, la première définition s'est indéniablement mise à présenter sur la seconde des avantages considérables ... La définition ensembliste procure en effet une sécurité à laquelle il est devenu difficile de renoncer, et ceci sur bien des fronts :

— tous les mots sont « verrouillés » aux définitions précédentes de façon à ne laisser place à aucune ambiguïté,

— toutes les données sont clairement explicitées, accompagnées de leur *statut* exact dans la règle du jeu,

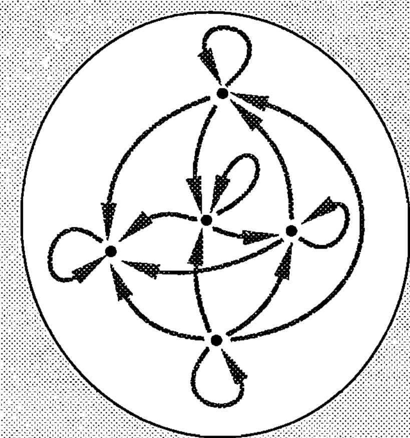
— toutes les propriétés nouvelles sont prêtes à être exploitées dans la suite du développement théorique.

Il va sans dire, en revanche, que la seconde définition ne présente aucun des avantages que je viens de citer. On se convraincra même aisément que si l'on doit mettre l'une plutôt que l'autre au service d'un cours magistral, il vaut encore mieux choisir la première car, à tout prendre, elle est la seule susceptible de s'inscrire dans un *discours formel* qui soit rigoureusement cohérent.

Est-il besoin de souligner que ces avantages sont surtout sensibles *pour le professeur* ?

Pour l'élève — qui n'a pas nécessairement les mêmes préoccupations que le maître — ces deux définitions présentent avant tout une différence fondamentale à un autre niveau : celui de l'*objet qu'il doit manipuler*. En effet, la « ligne sans épaisseur » place l'enfant devant une notion de droite très proche de celle qui est véhiculée par son expérience sociale et par le dessin lui-même. C'est, pourrait-on dire, un « concept à l'état brut », avec ses complexités et sa richesse, presque tel qu'il s'impose à l'observation première. A l'étude d'en percer ensuite quelques secrets, par la fréquentation des images, par l'exploration de situations inattendues, par le choix d'éclairages particuliers susceptibles de faire découvrir des relations cachées entre des *cas de figures* apparemment très différents. Dans ce cadre, l'*idée* de la droite ne changera pas vraiment pour l'élève, ce sont ses propriétés qui se préciseront peu à peu.

C'est théoriquement le contraire qui devait se produire au travers de la méthode ensembliste. La définition que nous avons prise en exemple est trop restreinte pour ne pas devenir très vite caduque, elle n'est intéressante que pendant la préparation de l'étape suivante, car les concepts demandent à être modifiés et enrichis dès que l'on veut dépasser le stade des propriétés élémentaires. Ils évoluent, se multiplient, se compliquent au fur et à mesure que les besoins de la théorie amènent à introduire de nouveaux axiomes. Les *droites* du plan deviendront ainsi, progressivement, des droites ordonnées, puis des droites affines, puis — enfin — des droites euclidiennes. Les enfants finiront peut-être bien, en fin de cycle, par rejoindre leur droite habituelle, mais entre temps ils auront été constamment confrontés à des objets artificiels, pour lesquels les images dont ils disposent n'apportent que des illustrations ambiguës, fragmentaires, ... lorsqu'elles ne sont pas carrément considérées comme trompeuses, voire dangereuses par le maître!



Droite ordonnée ...
(Brédif Livre 4°, *Hachette* 1971)

En supprimant le flou et le mystère, la méthode ensembliste offre ainsi une indéniable sécurisation au professeur. Il n'est pas sûr que l'élève y trouve son compte si l'on ne prend pas garde de gérer les *décalages entre ses propres images et les passages obligés de la progression axiomatique*. A l'époque, on a cru qu'il était possible de contourner cet écueil, on a même pensé que la progression constructive commandée par la logique *s'adapterait mieux* que les démarches anciennes à la construction « génétique » du savoir chez l'enfant. Jointe à la capacité de certains d'opérer de façon toute naturelle la transmutation de l'or en plomb, cette illusion aura mené tout un système éducatif au délire le plus complet, de la droite affine de quatrième au cycle infernal des similitudes complexes, en passant par « l'homomorphisme θ » introduisant la mesure des angles ...

Mon but n'est pas de rentrer ici dans un historique de la question, ni même d'instruire un procès devenu vain aujourd'hui. On pourra par exemple se reporter aux deux « classiques » parus en 1964 [3] pour se rendre compte à quel point l'enfer peut effectivement être pavé de bonnes intentions et de naïvetés tonitruantes. Je dirai simplement, pour résumer, que l'élément déclencheur réside dans la rencontre du légitime « dépoussiérage », qui était demandé par les universitaires de manière parfois quelque peu irresponsable, avec l'alibi psycho-pédagogique qui a pu être trouvé dans les travaux de Piaget et son école.

Sans trahir excessivement la pensée de Piaget, on peut dire en effet que l'idée majeure des psychologues fut de démontrer que les « concepts » numériques ou géométriques de l'enfant se construisaient peu à peu selon une progression identique à celle que les mathématiciens mirent en forme sous le nom de « théorie des ensembles ». Les conclusions ne se firent pas attendre :

« L'enseignement de la géométrie ne saurait trop gagner à s'adapter à l'évolution spontanée des notions, et cela d'autant plus que [...] cette évolution est beaucoup plus proche de la construction mathématique elle-même, que ne le sont la plupart des manuels soi-disant « élémentaires ». On a dit que la « théorie des ensembles » de Cantor devrait s'enseigner à l'école primaire. Nous ne serions pas éloignés d'en penser autant des éléments de la topologie ... » [4]

Cette extrapolation de « la mathématique » à tout le développement psychologique de l'élève reposait sur une certaine *analogie* observée, d'une part entre la présentation axiomatique à l'ordre du jour, et d'autre part la *structuration* de l'idée de nombre ou d'espace chez l'enfant. De façon plus précise, on constata — notamment au travers de la maîtrise progressive de l'enfant sur l'espace environnant — un processus semblable à celui de « l'enrichissement progressif des structures », qui est une des notions autour desquelles s'articule la présentation ensembliste. En ce qui concerne la géométrie plane, le phénomène est maintenant — grâce à la réforme de 1970 ... — relativement familier. On commence par regarder le plan comme un *ensemble de points*, on enrichit ensuite sa « structure » en le dotant d'axiomes concernant des notions assez souples de proximité — on lui confère alors une *topologie*. On le dote ensuite de droites ordonnées, on lui confère alors — au sens de Piaget — une structure *projective*. On ajoute une structure numérique cohérente à ces droites, on obtient une structure *affine*. Il reste à fixer des règles définissant les angles et la distance, pour être à la tête d'une structure *euclidienne*. Etc., etc.

Selon les observations de Piaget, l'enfant se construit peu à peu une idée « opérationnelle » de l'espace qui l'entoure en suivant un processus analogue. De la même façon qu'une image floue et déformable se précise et se « rigidifie » progressivement, la vision intérieure qu'il se forge sur l'environnement se structure exactement dans le

(3) G. Choquet, *L'enseignement de la géométrie*, Hermann, 1964.
J. Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, 1964.

(4) J. Piaget - B. Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, Presses Universitaires de France, 1947.

sens où les mathématiciens conçoivent l'enrichissement des structures.

Si l'on ajoute à cette analyse le fait que la notion de nombre réel — c'est-à-dire de *droite numérique* — peut être reconstruite sans aucun appel à la géométrie, il est facile de recréer la progression tout entière (de la maternelle à la faculté ...) qui faisait l'ossature de la réforme de 1970. Nous pouvons même envisager sur ce modèle des « scénario-catastrophes » auquels nous avons échappé ... Supposons par exemple :

— qu'Einstein ait posé de façon insistante l'impérieuse nécessité de se mettre enfin à ne plus regarder le monde autrement que sous sa forme véritable de « continuum espace-temps »,

— que l'on ait approfondi l'analyse des confusions fréquentes des enfants entre les notions de *lieu* et de *temporalité*,

— que l'on en ait conclu que, conformément au développement génétique et aux idées de « la Physique moderne », la *bonne* notion de base est celle d'un univers où le scindage *espace / temps* ne relève que de choix secondaires ...

est-il besoin de prendre de gros risques pour parier, qu'en classe de quatrième, les professeurs se seraient interdit de parler d'un repère « axé sur l'espace et le temps », comme il se sont interdit de parler d'un repère « axé sur une horizontale et une verticale » ? ...

Il est clair que la *pratique* ayant suivi la réforme de 1970 en a souvent renforcé les erreurs, mais il n'en est pas moins nécessaire de comprendre *à partir de quels moments* les éléments *théoriques* de la psycho-pédagogie ont pu conduire à des contradictions majeures et à l'échec. Les confusions qui sont à la base de ces contradictions me semblent en effet avoir encore largement cours aujourd'hui, malgré le retour en arrière partiel opéré par les programmes.

La première erreur tient à une lecture abusive de Piaget : on a appliqué à *toute la géométrie* ce qui avait été observé seulement à propos de la structuration de l'environnement « géographique » chez l'enfant. Dès lors, des considérations métriques sur des figures aussi simples qu'un quadrilatère ou qu'un triangle ont été bannies au nom du fait qu'elles *anticipaient* sur la génèse de la géométrie affine ou euclidienne du plan et de l'espace. C'est là un singulier paradoxe, lorsque l'on pense à l'importance que peut avoir une habitude des mesures dans l'apprentissage du numérique, ou lorsque l'on observe la nécessité de se « raccrocher » à des figures simples, *familières*, pour induire des notions comme celles de repère dans le plan, d'équation de droites, de repère dans l'espace, etc. Au contraire, on a demandé aux élèves, un beau jour, de considérer comme évident qu'il pût y avoir des *ensembles de nombres* et des *ensembles de points* qui répondaient à la question ...

Mais au fond, *à quelle question* ? et au nom de quel « constructivisme » du savoir ? Alors que toute l'histoire de ce savoir prouve à l'évidence qu'il n'est pas si facile de maîtriser les sens différents qu'il faut attribuer à la notion de nombre ; qu'il est encore plus difficile d'extrapoler — *via* la technique des repères cartésiens — les propriétés d'objets géométriques simples aux structures de l'espace tout entier ; qu'il aura fallu quelques miracles pour se convaincre que le modèle euclidien lui-même valait bien la violence qu'il faut se faire avant d'accepter d'y voir ... une simple collection de points ! Pour donner l'impression de se tenir, les discours ont adopté la technique du *double langage*. Au lieu de « construire », au lieu de gérer une présentation qui était pourtant censée faire mieux que celle qui correspondait à l'inacceptable « ligne droite sans épaisseur », on s'est trouvé obligé d'embarquer celle-ci comme *passager clandestin* dans les pages honteuses des manuels. On a inventé la « droite physique », et celle-ci a été chargée — au même titre, d'ailleurs, que le « plan physique », ou que les « angles géométriques », ou que toutes les « représentations graphiques » ... — de commenter *en voix-off* cela même que l'on était soi-disant en train d'introduire : une géométrie et une analyse « modernes » qui, elles, peuvent-très-bien-se-passer-de-figures !

Pire : on *a cru* les embarquer comme passagers clandestins, mais on avait tout bonnement *oublié de les enseigner* ... Si bien que la seule utilité de la droite ou du plan « physiques » aura été de donner bonne conscience aux auteurs de manuels qui, eux, s'y étaient entraînés lorsqu'ils étaient enfants.

La deuxième erreur, bien plus importante, de la psycho-pédagogie — relayée sans hésitation par le système — tient en réalité **à un malentendu énorme sur la *finalité* de l'enseignement des mathématiques** : on a confondu *idée* du nombre ou de la géométrie, avec la *mathématisation des outils* qui permettent d'aller plus loin sur ces notions. Un peu comme si, de l'observation : « un enfant est capable d'intégrer à sa vision de l'environnement la notion de courant électrique et celle de couleur », on avait conclu : « il faut l'habituer le plus tôt possible à une *présentation unificatrice*, c'est-à-dire à rien moins qu'aux notions fondamentales de champs électrique et magnétique » ... On a confondu *genèse de l'intuition* de l'espace avec *exposé sur la fabrication des outils* pour étudier celui-ci.

Le discours du professeur s'est mis à calquer un livre, à aller du général au particulier, à ne plus parler que d'outils qui n'étaient *jamais utilisés*, et qui n'avaient en fait d'intérêt que pour traiter de concepts pour lesquels on ne disposait d'*aucun exemple*.

C'était oublier que, pour séduisante que soit la notion d'enrichissement des structures, cette séduction ne saurait empêcher que les structures les plus « faibles » sont précisément **les plus *difficiles* à comprendre**. Cela provient évidemment du fait que les concepts manipulés rassemblent, en quelque sorte, *plus d'objets* en leur sein et que tout énoncé un peu général est dès lors censé s'appliquer à un nombre invraisemblable de situations. D'autant plus grand que le nombre d'axiomes est plus réduit, et les propriétés que l'on peut rencontrer sont alors soit évidentes ou inintéressantes, soit hors de portée d'un auditoire sans expérience.

Bien sûr, il est clair que l'enseignement des mathématiques doit reposer sur une conciliation dialectique entre l'apprentissage des *objets* et le passage à une certaine *formalisation*. Il convient cependant d'éviter en permanence la bascule vers ce qui est en cause ici : le formalisme qui n'intéresse plus personne d'autre que quelques mathématiciens ... La géométrie n'est malheureusement pas la seule victime de cette « perversion », et je voudrais essayer d'expliquer dans la suite ce qu'il en est à d'autres niveaux.

L'algèbre depuis les années 70

Alors que les activités géométriques avaient déjà assez nettement évolué aux cours des modifications de programmes qui ont eu lieu depuis l'apogée des « maths modernes », il semble que le domaine du numérique et de l'algèbre constitue l'un des points les plus sensibles de la réforme actuelle. Qu'il s'agisse en effet de l'introduction du *calcul littéral* repoussée à la quatrième, qu'il s'agisse du retour imposé

PROBLEMES : **Fausse supposition.**

Une couturière reçoit **324ᶠ** *pour confectionner en tout* **60** *chemises d'homme et de garçonnet. Sachant que la chemise d'homme lui est payée* **6ᶠ** *et la chemise d'enfant* **4ᶠ**, *on demande combien il y a de chemises de chaque sorte.*

SOLUTION ARITHMÉTIQUE.

Raisonnement. — On demande combien il y a de chemises de chaque sorte. On sait que la couturière a reçu en tout **324ᶠ** ; mais comme les chemises sont de valeurs différentes, on ne peut pas calculer directement le nombre de chemises de chaque sorte.

Si toutes les chemises étaient des chemises d'enfant, la couturière recevrait : $4^f \times 60 = 240^f$, somme inférieure de $324^f - 240^f = 84^f$ à la somme indiquée. Dans les **60** chemises, il y a donc des chemises d'homme. Chaque fois que la couturière confectionne une chemise d'homme au lieu d'une chemise d'enfant, elle reçoit en plus : $6^f - 4^f = 2^f$.

Or la somme reçue — en calculant sur **60** chemises d'enfant — doit être augmentée de **84ᶠ** ; la couturière doit donc confectionner :

$$\frac{84}{2} = 42 \text{ chemises d'homme.}$$

D'où la solution suivante.

Solution. — Si la couturière confectionait **60** chemises d'enfant, elle recevrait :

$$4^f \times 60 = 240^f ;$$

soit : $324^f - 240^f = 84^f$ de moins.

Chaque fois qu'elle confectionne une chemise d'homme au lieu d'une chemise d'enfant, elle reçoit :

$$6^f - 4^f = 2^f \text{ de plus.}$$

Pour recevoir le compte exact, elle devra donc confectionner :

$$\frac{84}{2} = 42 \text{ chemises d'homme.}$$

Et $60 - 42 = 18$ chemises d'enfant.

SOLUTION ALGÉBRIQUE.

Mise en équation. — Soit **x**, le nombre de chemises d'homme ; le nombre de chemises de garçonnet est **60 – x**.

La couturière reçoit pour **x** chemises d'homme **6 x** ; et pour **(60 – x)** chemises d'enfant **4 (60 – x)**.

On a donc :

$$6x + 4(60 - x) = 324$$
$$6x + 240 - 4x = 324$$
$$6x - 4x = 324 - 240$$
$$2x = 84$$
$$x = \frac{84}{2} = 42.$$

Réponses. — Il y a **42** chemises d'homme ; et $60 - 42 = 18$ chemises d'enfant.

Vérification. —
$$6^f \times 42 = 252^f$$
$$4^f \times 18 = 72^f$$
$$\text{Total: } 324^f$$

Remarques. — Pour résoudre l'équation :

$$6x + 240 - 4x = 324,$$

on a fait passer le terme connu **240** *du premier membre de l'équation dans le second en l'écrivant avec un signe contraire.* L'égalité subsiste, car les deux membres de l'équation sont diminués de la même quantité. (Pour le comprendre, pensez à une balance en équilibre dont les plateaux sont chargés de poids égaux. Si on enlève le même poids sur chaque plateau, la balance reste en équilibre).

ARITHMÉTIQUE, Cours supérieur. (*Armand Colin*, 1929) vers les *problèmes concrets*, qu'il s'agisse enfin de la réduction de l'*analyse* en seconde, on assiste, une fois encore, à un renversement de tendance par rapport aux ambitions antérieures. Mais ce *renversement de tendance* touche ici à un domaine qui était resté l'un des piliers importants des programmes depuis 1970 , et dans lequel un certain goût du formalisme passait pour inévitable.

On a sans doute oublié l'écart entre la pratique récente et ce qui pouvait se faire auparavant ... Je commencerai donc par l'observation d'un exemple aussi vieux que le certificat d'études primaires et le brevet supérieur : la méthode dite des « fausses suppositions » (voir page précédente). Naturellement, il ne s'agit pas de donner purement et simplement comme modèle ce qui pouvait se faire il y a soixante ans au niveau du collège. Ce « classique » parmi les classiques permet cependant à lui seul d'expliquer les principales difficultés du domaine algébrique.

S'il est aisé, en effet, de regrouper les techniques relatives aux calculs qui contiennent des lettres sous le nom de « calcul littéral », la réflexion se heurte d'emblée à une difficulté majeure : comment définir et justifier l'usage même des lettres ? Quels statuts convient-il de leur attribuer ? Comment un élève peut-il « s'y retrouver » dès que les *lettres* et les *nombres* se côtoient dans les formules, tout en conservant jalousement leur nature propre ?

La réponse à cette question varie avec l'interprétation que l'on adopte, explicitement ou non, pour parler du *calcul littéral* lui-même. Elle dépend de façon essentielle du contexte dans lequel on se place et elle implique des choix — plus ou moins conscients — sur la présentation retenue. Je dirai pour résumer que l'on doit distinguer les principaux aspects du problème en cherchant à préciser trois statuts différents dans l'utilisation des lettres : celui d'*inconnue*, celui d'*indéterminée* et celui de *variable*.

1. — La notion d'inconnue. Attachons-nous à l'exemple de la couturière : le problème possède une solution « raisonnée », la *solution arithmétique*, et des *solutions algébriques* diverses, selon que l'on décide de regarder le problème comme un problème à « une inconnue » ou comme un problème à « deux inconnues » ...

On peut ainsi avoir en tête une autre méthode que celle qui est présentée :

— *appelons* x *le nombre de chemises d'homme,* y *le nombre de chemises d'enfant,*

— *comme la couturière a vendu* 60 *pièces en tout, on a :* $x + y = 60$

— *comme une chemise d'homme vaut* 6^f, *ces* x *chemises ont rapporté :* $x \times 6^f$,

d'une façon analogue, les y *chemises de garçon ont rapporté :* $y \times 4^f$,

d'où : $(x \times 6^f) + (y \times 4^f) = 324^f$.

— *les nombres* x *et* y *cherchés sont donc solutions du système* (S) *suivant :*

$$\begin{cases} x + y = 60, \\ 6x + 4y = 324. \end{cases}$$

Ces étapes franchies — celles de la mise en équations — , nous arrivons dans le domaine du *calcul algébrique* proprement dit. Avant d'y pénétrer plus avant, arrêtons-nous sur ce **passage du problème concret à sa formulation littérale.** Il met en effet en évidence un important *point d'ancrage* du calcul littéral sur le calcul numérique : **la notion d'*inconnue*.**

On pourrait certes ne regarder la méthode *arithmétique* que comme une simple paraphrase de la résolution suivante du système à deux inconnues (S) :

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 6x + 4y = 324 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 240 \\ 6x + 4y = 324 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 60 \\ 2x = 324 - 240 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 60 \\ x = 42 \end{cases} \quad \text{etc.}$$

mais le parallélisme apparent des deux méthodes ne doit pas masquer leur profonde différence de nature : dans la démarche algébrique on a pris **la décision de calculer avec les nombres x et y** de chemises d'homme et de garçonnet ***sans les connaître*** ... On s'est ainsi autorisé à les manipuler dans les opérations et les simplifications susceptibles de faire apparaître le système sous sa forme définitive, exactement comme s'il s'agissait de *nombres donnés* au même titre que les hypothèses.

Ce serait un lieu commun de souligner la puissance de cette démarche. Il suffit pour s'en convaincre de penser à la moindre structure de problème comme :

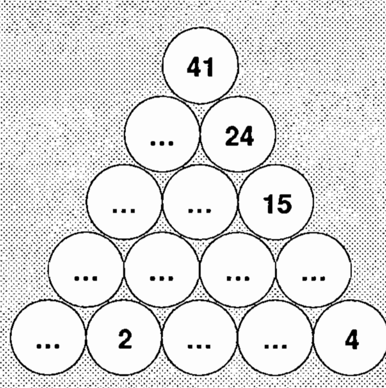
J'ai deux nombres. J'ajoute la moitié du premier au double du deuxième, j'obtiens ce que j'obtiendrais en ajoutant le tiers du second au triple du premier. J'obtiens le cinquième de ce résultat augmenté de un si je calcule la différence des deux nombres. Quels sont ces nombres ?

pour laquelle c'est seulement la *mise en équation* qui permet sérieusement d'arriver à une solution ...

Ce serait une erreur d'oublier que le passage à la méthode *algébrique* repose sur deux actes « contre nature », qui **demandent donc un apprentissage**, et qui sont donc difficiles à enseigner. En premier lieu il convient de se rappeler que ***calculer avec des nombres inconnus*** — qui sont précisément, ici, ceux que l'on cherche — en les désignant par des *lettres* est une étape importante. Aussi bien dans l'histoire des mathématiques que dans le développement de l'enfant. Il faut en considérer à sa juste mesure la difficulté, si l'on veut être capable d'en préparer et d'en maîtriser l'apprentissage au niveau du collège.

Ce premier écueil en rejoint ensuite un second : celui du ***renversement de démarche***, dans la lecture de l'énoncé, par rapport à la méthode dite *arithmétique*. Illustrons-le sur un exemple simple :

Les nombres de chacun de ces disques sont la somme des deux nombres situés en-dessous. Trouver les nombres manquants.



Une recherche « de type arithmétique » **partira de la case supérieure** pour essayer de combler progressivement les vides. Il est clair qu'elle se terminera à la troisième ligne. Elle se trouvera alors privée d'arguments. Après cela il n'y aura guère que la démarche empirique possible : on cherchera par tâtonnements, mais en essayant des valeurs particulières *dans les cases inférieures*, afin de reconstruire le triangle en partant du bas ...

C'est évidemment ici qu'il faut situer le début de la démarche de type *algébrique* : il ne reste plus, en effet, qu'à utiliser des *lettres* — à la place des valeurs testées à la base — pour anticiper d'un seul coup le résultat de tous les essais possibles ... Tout, en fin de compte, est bien évidemment dans ce « il ne reste plus qu'à ... ». C'est le passage à la notion d'*inconnue*, et à la démarche qui consiste à **remonter le tableau dans le sens où il a été originellement construit**, pas à partir de la dernière case.

La méthode arithmétique cherche à **revenir en arrière**, pas à pas, depuis les données qui « closent » le problème, la méthode algébrique suppose, au contraire, de **se laisser porter par l'énoncé**, en attendant que le résultat final — la ou les données de clôture, en quelque sorte —, fournisse les égalités qui s'écriront sous forme d'équation à résoudre. Disons-le autrement : l'énoncé raconte une « histoire », et ce récit décrit en fait une *transformation* qui fait passer de certaines quantités — dans mon exemple, il s'agit des nombres que l'on peut injecter **à la base** du triangle — à d'autres quantités qui sont données. La phase de « mise en équations » consiste à **gérer cette transformation**. Il faudra ensuite en mettre en rapport le résultat **avec les informations connues** pour obtenir l'équation. La *méthode arithmétique* consiste, bien au contraire, à chercher un moyen — parfois très subtil — pour **construire la transformation inverse**, celle qui, partant du résultat — il s'agit ici des lignes supérieures du triangle —, permet de retrouver les prémisses.

Evidemment, on pensera ici à la notion de fonction : un énoncé cache une ou plusieurs fonctions qui permettraient de passer des données initiales (manquantes) à des résultats supposés connus ... La méthode algébrique consiste à expliciter ce(s) fonction(s). La méthode arithmétique cherche de façon implicite à trouver directement une fonction réciproque. Mais si je n'ai pas encore utilisé jusqu'ici la notion de *fonction*, c'est qu'il ne s'agit pas exactement de cela, tout au moins *dans le sens où les mots sont utilisés aujourd'hui*. C'est là un point essentiel. J'y reviendrai plus loin.

2. — LA NOTION D'INDÉTERMINÉE. Dans tout ce qui vient d'être dit sur la phase de mise en équation, les lettres doivent être considérées sous le statut d'*inconnues* car elles sont alors pensées comme des *nombres précis*. Ces nombres ne sont désignés par des lettres que provisoirement, de façon à ce que notre ignorance sur leur valeur effective n'empêche pas de les faire participer, au même titre que les autres données du problème, à la succession des calculs. Mais **une fois écrites les équations** — et avant même quelles soient écrites — les données littérales changent de nature pour prendre ce que j'appellerai le « statut d'indéterminées ».

En effet, le problème acquiert une très grande autonomie vis-à-vis de l'énoncé d'origine à partir du moment où j'ai remplacé, dans l'exemple de la couturière, l'expression :

$$(x \times 6^{f}) + (y \times 4^{f}) = 324^{f},$$

par une écriture où l'ordre change et où les unités disparaissent :

$$6x + 4y = 324.$$

Pendant toute la phase de *résolution* de l'équation ou du système, ni l'origine et le sens des opérations arithmétiques effectuées, ni la nature des données, ni les unités dans lesquelles elles étaient quantifiées, n'auront plus aucune importance. De la même façon, la méthode utilisée pour conduire les calculs algébriques n'aura désormais nul besoin **de coller à un quelconque raisonnement arithmétique**, comme cela pouvait être le cas dans le parallèle avec la méthode des « fausses suppositions ». On imaginera en effet sans peine des manières de résoudre (S) qu'il deviendrait acrobatique ou illusoire de traduire simultanément par un raisonnement concret, en s'obligeant à rester à tout moment en prise directe avec des notions définissables dans le contexte de l'énoncé initial, et en s'interdisant d'utiliser les nombres inconnus x ou y.

Il y a plus : les quantités x, y, z, etc. devront nécessairement **ne plus avoir de valeurs numériques fixées** — et encore moins les « valeurs non connues recherchées » elles-mêmes — car, presque toujours, la démarche de résolution perdrait son sens. En effet, comment justifier, par exemple, une implication comme :

$$\{x^2 - 6x + 5 = 0\} \Rightarrow \{(x - 5).(x - 1) = 0\}$$

si l'on doit admettre en permanence que x ne représente pas autre chose que la valeur numérique 5, ou la valeur numérique 1, qui — en tant que solutions du problème — sont celles que nous avions désignées par la lettre x dans la phase de mise en équations ? En réalité **nous avons changé d'univers.** Et une difficulté est remplacée par une autre : à la « combinatoire » du raisonnement arithmétique — qui demande d'agencer des idées en rapport direct avec les nombres ou les objets concrets —, succède une nouvelle « combinatoire », beaucoup plus formelle, qui nécessite d'**enchaîner des opérations élémentaires sur des expressions algébriques littérales.**

Ce nouvel « univers » a ses règles propres. Il a aussi une logique et une existence propres, parfaitement abstraites du problème initial, et qui ne se nourrissent que d'elles-mêmes. Il devient ainsi possible de faire apparaître des quantités négatives sans aucun support pour l'intuition ... Voire, parfois, d'inventer des nombres *imaginaires*, ... pour peu que les formules deviennent séduisantes ...

Les lettres ont acquis entre temps un **statut d'*indéterminées*,** — pour ne pas dire tout simplement de ... *lettres* — et n'ont plus vraiment besoin de représenter intuitivement quoi que ce soit. Pratiquement ce sont seulement les *règles de calcul* autorisées qui comptent. Il s'agit d'établir des identités, des *formules* dans lesquelles la substitution de valeurs numériques constitue une phase secondaire, extérieure en quelque sorte au calcul.

On sait bien entendu, étant donné la puissance réelle de l'outil algébrique, la place tenue par cet aspect du calcul littéral en mathématiques. Est-il besoin d'insister sur la place qu'il a prise dans l'enseignement, au détriment trop souvent du raisonnement ou même de la phase de mise en équations ?

Cette place paraît excessive, mais s'explique en grande partie par le côté sécurisant et relativement accessible de la « combinatoire » sous-jacente. La règle du jeu apparaît souvent, en effet, comme acceptable sans grande motivation particulière pour un assez grand nombre d'élèves moyens. Et on constate bien vite que la phase de mise en équation d'un problème peut conduire un enfant à de véritables blocages, alors que celui-ci donne l'impression de se retrouver en terrain connu et stable dès qu'il n'est plus confronté qu'à l'équation et à sa résolution ... Ce n'est d'ailleurs sans doute pas un hasard si cet aspect-là du calcul littéral constituait, au travers des « factorisations », l'outil par excellence de la sélection en fin de troisième. Il est finalement plus facile que n'importe qu'elle *résolution arithmétique* d'un problème comme celui de la couturière.

Encore convient-il de garder à l'esprit, d'abord que la puissance de cet outil formel n'a d'intérêt que dans la mesure où l'on sait le mettre en œuvre dans des problèmes concrets ; ensuite qu'une focalisation excessive sur ce calcul pour *lui-même* conduit vite à centrer les activités uniquement sur des aspects hors de portée de l'élève moyen — les factorisations —, qui n'ont en fait pas plus d'utilité véritable que n'en possèderaient, à l'école primaire, les extractions systématiques de racines carrées ou cubiques. A moins de considérer que le but de l'enseignement de mathématiques de ce siècle ... est de former une armée de petits « Inaudi » du calcul algébrique !

3. — La notion de variable. Il nous faut enfin étudier un troisième aspect du calcul littéral qui pourrait être illustré de façon frappante sur l'exemple du calcul polynomial : qu'advient-il des petits « Inaudi » évoqués précédemment lorsque l'on introduit dans une formule très simple un symbole de *valeur absolue* ou un symbole de *racine carrée* ? Si l'on peut encore s'en tirer dans le cas du radical en compliquant un peu les opérations autorisées — c'est-à-dire en enrichissant la « combinatoire » —, il n'en va plus du tout de même pour la valeur absolue. Le problème change de nature : malgré certaines similitudes avec le domaine algébrique formel, nous avons maintenant affaire à un concept tout à fait différent : **celui de *fonction*.**

On sait en effet que cette notion de fonction passe pour être la « bonne notion » en matière de problèmes dits concrets. Elle apporte, par exemple, sans grand effort la solution à de nombreux soucis pour de nombreuses couturières ...

Reprenons, en effet, la méthode algébrique précédente, nous aurions pu dire d'emblée :

— *le nombre total* N *, de pièces vendues par la couturière, dépend du nombre* x *de chemises d'homme et du nombre* y *de chemises d'enfants. Il est donné par :*

$$N = x + y ,$$

— *La somme* P *reçue pour la vente de ces pièces est fonction des nombres* x *et* y*, elle se calcule sous la forme :*

$$P = 6x + 4y ,$$

— *Le problème revient donc à trouver les valeurs qu'il faut donner au couple* (x,y) *pour obtenir un couple* (N,P) *donné ... Ici, le problème correspond à :* (N,P) = (60,324) .

On aboutit certes au même système (S) , mais l'introduction des nouvelles lettres N et P est loin d'être un simple jeu d'écriture. D'abord ces deux lettres ne peuvent en aucun cas bénéficier du statut d'inconnues au sens du premier paragraphe. Ensuite les valeurs cherchées pour x et y se trouvent placées dans un très large éventail de valeurs possibles, *parmi lesquelles les solutions n'ont plus guère qu'un intérêt secondaire*. Enfin, contrairement au cas des indéterminées, une sorte d'antériorité hiérarchique apparaît, qui fait que les valeurs de certaines lettres dépendent de celles qui sont affectées aux autres.

Le problème de la couturière se trouve tout entier dans la fonction :

$$(x,y) \to (N,P),$$

qui permet d'étudier la portée exacte des hypothèses ; *pour peu que l'on s'efforce de faire varier* x et y .

La démarche a donc changé : le calcul littéral n'est plus ici une fin en soi, il est **au service d'une *fonction*.** C'est elle qui devient le véritable objet de l'étude et qui entretient des rapports naturels avec le problème concret. Parallèlement les lettres acquièrent un nouveau statut. On devra désormais prendre en compte la *succession des valeurs possibles*, leur ordre de grandeur et son influence sur l'ordre de grandeur du résultat, l'influence éventuelle de la restriction des variations de x à certains intervalles, etc., etc.

Compte tenu de ces remarques sur les différents statuts du calcul littéral, il est maintenant aisé de mettre en évidence la spécificité de l'approche instaurée par la réforme de 1970.

Sur un problème comme celui de la couturière, l'introduction de la notion de fonction pouvait apparaître auparavant comme une *interprétation seconde* des formules servant à poser le problème, comme un *concept supérieur* améliorant la compréhension de l'énoncé, non comme un passage obligé. **Le choix fut inversé** dans l'esprit des « maths modernes » et le chemin proposé à l'élève devint le suivant :

— introduction abstraite du « concept » de fonction (dans la foulée du « concept » d'ensemble),

— position *a priori* de la problématique liée à la notion d'image réciproque,

— résolution des applications concrètes sous la forme :

a) il s'agit de telle fonction f,

b) il s'agit d'un problème d'image réciproque : l'énoncé me donne y_0 et je dois trouver x_0 tel que $f(x_0) = y_0$,

c) le problème est donc en particulier de savoir si f est surjective, injective, etc.

Comme en géométrie, l'accent aura été mis sur la description et l'introduction de l'outil mathématique **avant** son utilisation pratique. Obligeant ainsi à introduire — ou plutôt à tenter d'introduire — des « concepts » **avant** de rencontrer les objets et les situations auxquels ils sont censés s'appliquer ...

Le formalisme ...

Choisis dans le seul but d'illustrer les aspects géométrique et algébrique de l'*état d'esprit* des « maths modernes », les deux exemples précédents pourraient être multipliés indéfiniment. Ils montrent de façon frappante la vraie difficulté de l'enseignement des mathématiques : **par quels chemins** conduire l'élève, alors que la résolution de problèmes et l'apprentissage de situations élémentaires passe nécessairement par des « outils conceptuels » excessivement complexes, qui ont été forgés pour traiter tous ces problèmes d'**une façon optimale** ?

Nous sommes loin du simple point de vue de la « modélisation du concret ». C'est-à-dire, plus exactement, qu'une fois cette évidence énoncée, le problème reste entier : comment peut-on apprendre à « modéliser » ? quels sont les « modèles » que l'on doit enseigner de préférence ? comment apprend-on un « modèle » ?

Reprenons par exemple la « modélisation » du problème de la couturière grâce au « concept de fonction ». La méthode est, au fond, assez séduisante : la notion de fonction est très simple à expliquer sur des schémas enfantins d'ensembles où ne figurent que peu d'éléments ; il suffit ensuite d'investir cette façon de penser dans le cadre du problème proposé : « ... ici j'ai l'ensemble des valeurs de départ, ... ici l'ensemble des valeurs d'arrivée, ... etc. »

Malheureusement la méthode ne marche pas plus que n'a pu marcher l'introduction de la droite affine à partir des familles de bijections ! Et la raison est relativement simple à constater : le « concept » de fonction **ne s'investit pas**, comme on pourrait l'espérer, depuis le cas des diagrammes saggitaux entre patatoïdes au cas des ensembles numériques suffisamment sophistiqués pour traiter le problème de la couturière. Et, même si le schéma de pensée peut partiellement servir de guide, il ne suffira pas pour résoudre les questions qui apparaîtront au moment de **la manipulation des formules**, étape évidemment nécessaire dès que l'on voudra mettre en œuvre le « concept » ...

Considérons un autre exemple encore plus simple. Comment ne pas trouver mathématiquement séduisante l'idée de traiter directement un problème comme :

« Pierre a trois fois l'âge de Paul ; Pierre a 13 ans, quel est l'âge de Paul ? »

en disant :

« si je désigne par P l'âge de Paul, je dois avoir :

$$3 \times P = 13,$$

donc je dois ***diviser*** *chaque membre par 3 pour trouver P ... ».*

Il est pourtant à peu près clair que cette méthode est prématurée au moment où il s'agit d'**introduire le sens pratique de la division**. Parce qu'elle passe par un usage des lettres, des égalités et des opérations qui ne s'acquiert, en réalité, qu'**après** la maîtrise de ce que l'on serait censé introduire. De la même façon, le « concept » de fonction ne s'acquiert véritablement qu'**après une certaine habitude dans la manipulation des formules.**

Ainsi, dans l'exemple de Pierre et Paul, le symbolisme abstrait de l'expression littérale semble à proscrire, ce qui ne veut pas dire pour autant qu'un autre des symbolismes utilisés — celui de la notation décimale — doive ou puisse être évité, ... même si, lui aussi, présente des difficultés intrinsèques inévitables, même si certains n'hésitent pas à considérer qu'il peut introduire un obstacle à l'apprentissage futur du « concept » de ... nombre réel !

Tout l'enjeu pédagogique est précisément dans la gestion « spiralaire » des progrès de l'élève dans chaque domaine. Et l'interdépendance, en mathématiques, entre le moindre concept et les cas de figures auquel il s'applique est telle que seul l'empirisme apporte parfois certaines voies plus ou moins praticables ... La première morale à tirer de l'échec des maths modernes, c'est d'avoir cru trop naïvement que l'**économie de pensée d'une axiomatique pourrait résoudre toutes les difficultés liées à l'apprentissage**.

Il convient cependant d'aller plus loin dans l'analyse, car la nature même du problème est malheureusement encore plus désagréable à regarder pour le professeur des années 90 : l'erreur des maths modernes n'a pas été seulement d'oublier un peu vite l'aspect dialectique entre un « concept » et ses applications, elle a été de croire qu'il y avait, en mathématiques, **des « concepts » susceptibles d'être expliqués à travers ce qu'on appelle couramment leur sens, c'est-à-dire en passant par la compréhension déductive**.

Il ne s'agit pas, en disant cela, de tomber dans une sorte d'« idéalisme » qui s'opposerait au « constructivisme », et qui postulerait une telle transcendance des principes que ceux-ci en deviendraient inaccessibles par des voies rationnelles. Il s'agit de tout autre chose, de bien plus terre à terre : pas plus qu'un enfant de quatre ou cinq ans n'apprend à compter en accédant à l'« essence mathématique du concept de nombre », un apprenti mathématicien n'accède à quelqu'essence mathématique que ce soit, lorsqu'il rencontre un phénomène nouveau.

Pour le dire plus simplement : les professeurs de mathématiques se sont mis, depuis la réforme de 70, à centrer leur discours sur le « sens » de ce qu'ils voulaient faire, or le **discours sur le sens** est impénétrable s'il n'est pas là uniquement pour rassembler des faits qui sont déjà familiers. Plus simplement encore : le « sens » qui intéresse le maître ne peut intéresser un élève ... Et les professeurs devraient se rappeler plus souvent qu'eux-mêmes n'y ont eu généralement accès qu'après bien des années de pratique comme élève, ... lorsque ce n'est pas seulement au commencement de leur carrière que l'intérêt conceptuel a pu leur apparaître ...

S'il arrive — plus souvent qu'on ne le croit — que des élèves s'impatientent et interrogent : « Madame, quand est-ce qu'on fera le cosinus ? », « Monsieur, on verra bientôt les limites ? », à la manière dont *le Petit Prince* ordonnait : « dessine-moi un mouton ! », il est inutile de s'illusionner très longtemps ; le *cosinus* ou les *limites* **racontées par le professeur de mathématiques** n'ont guère de chances de combler leur attente. L'élève espère un savoir **qui lui apporte une nouvelle puissance**, le maître risque fort de lui « dessiner un mouton » fort décevant ...

Que peut bien faire l'enfant, en effet d'un *cosinus* présenté comme simple cas particulier de la notion de projection ? comment ne peut-il pas ressentir une frustration énorme face à une notion de *limite* du type : « on dira que ... », suivi de la phrase bien connue ... Même sans tenir compte de l'aspect technique indigeste, faut-il beaucoup de recul pour ressentir tous les implicites enfermés une fois pour toutes dans ce « **on dira que** ... » ?

Elevé au rang de règle du jeu permanente, il peut résumer à lui tout seul ce que j'ai appelé, au début de cet article, l'« état d'esprit » de la réforme de 1970, c'est-à-dire l'« état d'esprit » assez général de l'enseignement des mathématiques depuis une vingtaine d'années. Or c'est précisément l'acceptation de cette règle du jeu — et même l'engouement pour cette règle du jeu — qui *a eu pour conséquence naturelle la réforme des maths modernes*. Nous en avons souligné plus haut quelques aspects pervers non négligeables, il convient aujourd'hui d'en bien comprendre les **caractères structurels fondamentaux.** Il devient indispensable de les dépasser si l'on veut opérer sainement un retour en arrière salutaire, ou si l'on veut, plus conjoncturellement, comprendre les intentions véritables du « retour au concret » de la réforme actuelle.

Pour cela, c'est en quelque sorte *à la source* qu'il est nécessaire de revenir, c'est-à-dire à la « conception structurelle » des mathématiques — censée s'adapter « comme un gant à la jeunesse de notre temps » ... —, et au sujet de laquelle il nous faut bien accorder une grande lucidité aux concepteurs de la réforme de 1970, dans la mesure où eux-mêmes considéraient déjà qu'une des conséquences inévitables de cette nouvelle présentation résiderait dans le fait que les élèves « **sauraient sans doute calculer plus tard** », ... et cela dans l'espoir « **qu'ils le sauraient mieux** ». Leur pari fut en fait le suivant : donner la priorité à la **structure** et à la **logique** des divers schémas opératoires plutôt qu'à la **pratique** et à la **technique** proprement dites, en pensant que ce chemin amènerait à une meilleure acquisition des outils mathématiques.

Sans mettre aucun jugement de valeur dans ce mot, on peut donc dire que ce choix fut celui du « formalisme », mais il me semble préférable de bien spécifier en même temps qu'il s'agit plus exactement du choix d'un « **formalisme structurel** » — c'est-à-dire axé sur ce que l'on appelle la notion mathématique de structure —, si l'on veut en mettre en lumière les caractéristiques essentielles. Il serait en effet illusoire de penser que les mathématiques, quelles qu'elles soient, puissent faire l'économie d'un certain formalisme, et il serait encore bien plus imprudent de croire que ce mot ait un sens suffisamment précis pour s'affranchir d'une analyse un peu plus approfondie.

Le « formalisme » choisi par les programmes de 70 était fondé, comme je l'ai dit plus haut, sur une certaine idée du « **sens mathématique** » des objets ou des concepts manipulés par les professeurs et les élèves. Comme il serait bien long d'entrer de façon exhaustive dans tous les aspects philosophiques de cette question du « sens », je me contenterai de souligner ici deux des principaux « symptômes » que chacun a eu largement l'occasion d'observer ces dernières années et qui peuvent servir de points de repères inévitables dans la discussion. Le premier concerne l'*ésotérisme du langage*, le second *le caractère essentiellement relationnel* des notions que l'on s'est mis à considérer comme vraiment « mathématiques ».

L'introduction des maths modernes aura eu comme particularité, en effet, d'entraîner un phénomène sociologique sans doute unique en son genre : du jour au lendemain personne dans la population **n'a strictement plus rien compris** à ce que le système éducatif avait décidé d'appeler « enseignement des mathématiques » ! Mis à part les mathématiciens, plus aucun des **utilisateurs habituels** n'est parvenu à savoir où les réformateurs voulaient en venir ... Et paradoxalement, qu'il s'agisse de ces utilisateurs habituels, ou qu'il s'agisse des nouveaux consommateurs « bénéficiaires » de la réforme cela n'a en fait **entraîné aucun changement des pratiques** ! *Vu de l'extérieur, tout s'est passé comme si le seul résultat tangible tenait tout simplement dans une façon nouvelle de dire les mêmes choses.*

L'inflation du vocabulaire, l'accumulation des mots techniques, le pointillisme obsessionnel des définitions, le malin plaisir pris à redéfinir tous les mots du langage courant pour leur assigner un sens réservé aux initiés, l'intérêt maladif pour élever au rang de résultats des évidences dérisoires, l'incapacité à expliquer en langage commun des propositions impénétrables, l'épais mystère qui s'est mis à envelopper les finalités poursuivies, bref : l'*écran de fumée* qui s'est abattu sur le discours a brusquement transformé le « langage mathématique » en une caricature de « méta-langage » qui semblait s'intéresser à tout autre chose qu'aux centres d'intérêts antérieurement dévolus à la discipline, alors qu'au fond les seules choses vraiment importantes dans la pratique restaient les mêmes, qu'elles se trouvaient simplement noyées pour le plaisir dans des complications inutiles ...

Peut-on, rien qu'à ce critère, imaginer pire malentendu ? pouvait-on dépenser plus vainement de l'énergie ? Le drame c'est que les mathématiques modernes se proposaient en réalité de raconter effectivement **autre chose** que les mathématiques antérieures, que cet « autre chose » s'est purement et simplement révélé « incommunicable », mais que le discours n'en était pas moins centré entièrement sur cet apport nouveau qui, par un renversement des choses, devait permettre de retrouver et d'élargir la substance de tous les discours antérieurs. Exactement comme si l'on avait décidé de « dessiner un mouton » au *Petit Prince* en faisant fi des représentations figuratives pour lui en offrir une *image structurelle plus vraie que nature* ... A ceci près que seuls quelques initiés y reconnaissent encore un mouton.

C'est que l'**image structuraliste** ne s'intéresse plus directement au *contenu* du mouton, mais simplement aux *différences* entre un mouton et les autres animaux et aux *rapports*, qu'à partir de ces différences, il devient possible d'établir entre les diverses espèces animales.

Ainsi **les nombres** ont cessé d'être regardés comme des *objets individuels*, ayant chacun une personnalité propre pourrait-on dire. On ne s'est plus intéressé qu'aux relations de composition auxquelles ils participent et aux rapports que l'on pouvait déceler entre leur ensemble tout entier et les ensembles analogues. **Les objets géométriques** ont perdu brutalement l'attrait que chacun d'eux était susceptible de posséder, pris isolément, pour ne plus présenter d'intérêt autre que celui de faire partie d'une certaine catégorie. **Les transformations géométriques** n'ont plus été un objet d'étude privilégié pour la puissance conceptuelle qu'elles pouvaient apporter en tant que telles — c'est-à-dire tout simplement comme des déformations ou des déplacements de figures —, leur étude n'a plus eu d'autre fin que d'isoler des particularités globales concernant certains ensembles de transformations.

A maints égards, le genre fut poussé à la caricature au mépris complet du simple bon sens didactique. Comment, par exemple imaginer que les règles élémentaires d'associativité, de commutativité et de distributivité pouvaient tenir lieu d'*apprentissage* du calcul ? Comment espérer que la maîtrise des fractions pouvait être améliorée alors que l'essentiel du discours portait sur les relations d'équivalence ? Comment ne pas tricher pour parler de certains groupes d'isométries alors que le temps passé à fréquenter chacune d'elles était parfaitement dérisoire ?

Certes, la « Mathématique » **aurait dû** permettre de s'y retrouver en fin de compte, par la grâce des analogies profondes, dont on sait depuis environ un siècle qu'*au niveau théorique*, elles permettent effectivement de « boucler partiellement la boucle ». Mais comment le *Petit Prince* pouvait-il s'y retrouver, à force de ne plus rencontrer que des troupeaux de *moutons structurels*, comparés à d'autres troupeaux, ... tous aussi *structurels* ?

La réforme de 1970 a voulu croire que le « sens » pouvait être tout entier, (et pouvait se transmettre), à travers la notion de structure. C'était faire l'impasse sur de nombreux autres aspects de l'acquisition du savoir mathématique et même sur tout un aspect du formalisme mathématique que je qualifierai ici de « **formalisme procédural** » à défaut d'un mot plus pertinent.

La plus grande part de l'apprentissage, en effet, suit généralement des chemins beaucoup moins nobles que ceux sur lesquels on a généralement choisi, depuis vingt ans, de centrer tous les discours.

Sans aller jusqu'à m'appesantir trop complaisamment sur les raccourcis les plus inavouables, pourquoi refuser de regarder le nombre d'élèves qui ramènent le « sens de l'opération » (dans le problème de Pierre et Paul cité plus haut) au raisonnement : « si je fais une soustraction je vais trouver $13 - 3 = 10$, mais c'est trop grand ... donc je dois plutôt diviser ... » ? La méthode est-elle si scandaleuse, comparée à ce que font tous les jours les mathématiciens confrontés au calcul d'une intégrale et qui, pour savoir s'ils doivent utiliser plutôt une intégration par parties, ou plutôt un changement de variables, tranchent tout bonnement ... en regardant ce que cela donne ?

Mais que devient le mythe du « sens », face à toutes les méthodes fondées sur le côté « procédural » ? Que faire par exemple de l'importance de l'anticipation des résultats ou du balayage systématique de toutes les possibilités d'essais que l'expérience acquise permet d'envisager ? Nous sommes loin des structures, encore plus des explications logico-déductives ... Mais oublier cet aspect, c'est oublier en fait un des caractères **les plus importants de toute l'activité mathématique** parce qu'on ne le juge pas suffisamment « présentable » (exactement comme avait été jugées non « présentables » les figures de géométrie) et ceci en complète contradiction avec toute l'histoire des sciences, car le « sens » est toujours venu **après** ; les « concepts » — tout comme les moutons ... — ont toujours surgi de l'**étude des objets** qui les engendrent, non des rapports structurels qui les régissent.

Le « concept » de fonction par exemple, sur lequel je me suis arrêté longuement à propos de l'algèbre, n'est pas né des considérations élémentaires sur les diagrammes saggitaux, car réduit à cela il n'a **aucun intérêt**. Il s'est dégagé peu à peu de la fréquentation de **formules**, rencontrées au cours de ce que j'ai appelé plus haut la phase de « mise en équation », et dans lesquelles l'aspect « transformationnel » n'était en aucun cas recherché au départ. Bien au contraire. Il suffit de se reporter à l'*exemple de la couturière* pour sentir combien la recherche des équations relève plus de la **collecte des relations** traduisant les conditions imposées par l'énoncé, plutôt que d'une réflexion systématique dans un schéma de hiérarchie entre les variables. Le physicien qui analyse un problème quelconque ne fait pas autrement. Pratiquement aucune des « **lois** » classiques n'apparaît d'emblée comme une fonction au sens actuel de ce mot en mathématiques, c'est-à-dire que les liens de cause à effet ou le fait que certaines variables puissent se déduire des autres selon une certaine dépendance fonctionnelle ne résulte généralement que de choix purement conjoncturels. Le « formalisme » de base, en mathématiques, est en réalité quelque chose de beaucoup plus proche de la notion vague de « **formule** » que de la notion de fonction. C'est là une notion qui est à la fois plus générale dans son aspect relationnel, car on n'est pas nécessairement contraint dans le cadre d'un « départ » et d'une « arrivée », et à la fois plus étriquée, car on est cantonné dans un canal de type algébrico-analytique dans lequel doit pouvoir s'exprimer le « relation » en question.

Tout est là. Dans la possibilité ou non de trouver un **symbolisme formel** en accord avec le type de relation auquel on à affaire. Et c'est presque une lapalissade — mais une lapalissade que l'on s'est acharné à perdre de vue depuis vingt ans dans l'enseignement — **est mathématique ce qui passe par un symbolisme de type « mathématique »** ! et modéliser mathématiquement une situation n'est rien d'autre que de trouver un moyen de la faire entrer dans l'une des formes connues de symbolisme mathématique ... Ou de lui inventer, lorsque c'est possible, un « symbolisme » nouveau, qui possède une « puissance » digne de le faire considérer comme tel ... Si ce formalisme se révèle suffisamment porteur pour que la modélisation du problème apporte presque d'elle-même la procédure à suivre, comme c'est par exemple le cas en géométrie lorsque l'on a trouvé une bonne façon de traduire la situation dans le langage de la géométrie analytique. Alors le symbolisme nouveau viendra enrichir les symboles de la tribu.

Ce qui fait la puissance de la notion de fraction est plus dans le symbolisme qu'on a su, un jour, lui réserver que dans l'éclairage sous l'angle des classes d'équivalences. Ce qui fait la puissance du concept de différentielle ou d'intégrale est d'abord (n'en déplaise aux puristes) dans les formalismes inventés dès l'origine, avant d'être dans les théorèmes de justification d'existence. Les mathématiques dites modernes ont fait le pari que les élèves « sauraient mieux calculer » si le calcul opérationnel venait **après** l'aspect structurel ou conceptuel. Tout porte à croire aujourd'hui qu'ils n'avaient oublié qu'un détail : l'aspect structurel ou conceptuel ne peut généralement être compris qu'**après une certaine maîtrise des symbolismes calculatoires.**

Dès lors, ceux qui déduiraient de toutes les analyses précédentes que la tendance générale est désormais tournée vers des « mathématiques physiques » au détriment d'une véritable *formation mathématique*, ceux qui ne voudraient voir dans la réforme actuelle qu'un renoncement de plus ou un témoignage supplémentaire d'un climat sociologique de régression, tous ceux-là se tromperaient lourdement. Ce serait en vérité s'interdire de regarder à quel point la « Mathématique », parée d'universalité, avait fait naître des espérances fondées sur des illusions. Ce serait surtout tomber dans un contresens plus grave encore : penser *a priori* que les programmes qui viennent seront plus *faciles* que les anciens, alors qu'il y a malheureusement d'assez fortes chances qu'il n'en soit rien, ... bien au contraire !

Ce que je voudrais avoir montré, c'est que l'honorabilité de la science a tout à gagner de la réforme actuelle, pour peu que l'on veuille bien tenter d'en jouer le jeu et pour peu que le système soit capable de se libérer d'une habitude qui s'est gravée pendant vingt ans, et dont il serait difficile, et imprudent, de faire abstraction : celle de croire que le moyen existait pour transmettre au plus grand nombre tous les arcanes des mathématiques, qu'**il suffisait pour cela d'en enseigner leurs secrets dans le bon ordre,** et que **cet ordre était essentiellement fondé sur la rigueur**.

Mais n'en déplaise aux amateurs de vérités officielles, la plupart des réponses aux questions posées par la didactique des sciences sont sans réponse. Pas plus que celle des années 70, la réforme actuelle ne constitue un remède miracle en la matière, elle offre simplement une possibilité de retour en arrière salutaire par rapport à des erreurs grossières. Il serait aberrant **de ne pas en saisir l'opportunité, mais il serait aussi erroné de croire que la réflexion est achevée pour autant, ou de s'imaginer une fois de plus que les solutions aux problèmes puissent résider dans des panacées et faire l'économie d'un véritable travail d'analyse à tous les niveaux. D'abord sur les contenus, ensuite sur la mise au point de séquences d'apprentissage véritablement dignes de ce nom.**

Comme on a pris coutume de dire dans une sphère plus haute que celles des Missions Académiques, l'urgence est aujourd'hui de *laisser le temps au temps* ... Elle est de commencer par ne pas retomber dans l'engrenage des certitudes soudaines qui engagent périodiquement l'avenir sur des « paris » d'autant plus séduisants qu'ils sont risqués.

Comment est-il aussi souvent possible de ne pas se sentir « interpelé » par la capacité formidable d'engagement sur un leurre, dont témoigne, en fin de compte, le destin de la réforme des maths modernes ? Comment dès lors, ne pas mesurer le danger que peuvent faire courir la confusion si tentante entre ce qui peut apparaître comme une « piste » et son élévation subite au rang de vérité définitive ? Comment ne pas devenir méfiant devant les artifices indispensables à la transformation politico-médiatique de la recherche scientifique ? Le vide sidéral en matière de réflexion sur les disciplines qui accompagne actuellement ce qu'il faut bien appeler des formations pédagogiques, ne saurait laisser insensible. D'autant qu'il est impossible de ne pas s'apercevoir que, sous couvert de formations *générales*, le contenu didactique lui-même devrait susciter plus souvent perplexité et inquiétude ...

D'année en année les discours en matière de pédagogie s'enferment dans l'accession au statut de **vérités définitives** de quelques « pistes » plus ou moins explorées, qui sont semble-t-il d'autant plus dignes d'intérêt qu'elles sont capables de donner une coloration scientifique à des considérations qui ne relèvent en réalité que de l'idéologie ambiante, de l'éthique ou de la morale les plus élémentaires. Je n'en prendrai pour preuve que l'exemple du fameux triangle « élève - discipline - professeur », transporté de module base en module « d'approfondissement » et de module de « rénovation » en module de « remédiation » ... Il n'aura suscité jusqu'ici **aucune** application un tant soit peu effective au niveau de la classe, mais son succès s'avère si inépuisable qu'il faut bien que la raison en soit à rechercher ailleurs. Cette raison est simple. Le *triangle* est porteur d'un unique et sempiternel message : le rappel du *respect* qui revient légitimement à chacun de ses pôles.

Ethique inattaquable, soit. Mais le respect des professeurs, des élèves et des mathématiques ne réside-t-il pas, en premier lieu, dans l'aptitude d'un système à ne pas confondre à ce point la *proie* et l'*ombre de la proie* ? Ne vaudrait-il pas mieux pouvoir s'imaginer que l'**expérience des maths modernes** puisse éviter à tous de nouvelles erreurs en la matière ?

Elle aura pourtant montré à l'évidence l'échec inéluctable des confusions de cet ordre, même et surtout lorsqu'une foule de « bonnes raisons » peuvent laisser croire aux mieux intentionnés que le pari ne va pas nécessairement contre la raison.

L'erreur fut pourtant d'aller contre l'histoire en croyant se l'approprier, et de penser qu'une vision supérieure offerte par une *axiomatique* pouvait être autre chose qu'un simple impérialisme passager. Autre chose que l'illusion d'une puissance définitive et indépassable.

Or il en va des axiomatiques comme des empires, elles sont destinées à disparaître au profit d'autres axiomatiques plus parfaites et plus « totalitaires », et il ne reste jamais, sur les flancs où elles s'étaient autorisées à confondre la proie et l'ombre, que ce qu'il reste des empires, des fascismes disparus ou des remèdes miracles oubliés ...

Rien.