INTUITION ET DEMONSTRATION CHEZ ARCHIMEDE

Bernard BETTINELLI
Irem de Besançon

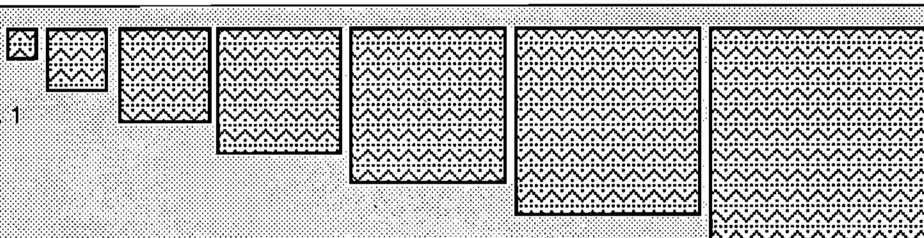
Lorsque j'ai été tenté par la lecture des œuvres d'Archimède, le travail qu'il avait pu faire avec sa spirale m'a d'abord inspiré. En même temps qu'au sujet choisi, je fus confronté à la découverte de sa manière de présenter des résultats. Cette forme obligée de la présentation, n'est en aucun cas conforme à la démarche par laquelle il découvrit ses grands résultats. Il y a d'une part la conviction personnelle qu'une relation est vraie : la *découverte*, et d'autre part la présentation aux autres et à la postérité : la *démonstration*. Je vais essayer d'en faire sentir la différence sur quelques exemples fondamentaux.

EXEMPLE 1 : L'aire de la première révolution de spirale ou l'exhaustion

En pénétrant dans le livre « Des spirales », je fus étonné de lire un ensemble disparate de propositions dont certaines avaient trait au déplacement d'un point dans un mouvement uniforme, d'autres à des rapports de segments liés à des sécantes ou tangentes à un cercle et enfin deux propositions difficiles à comprendre et sans rapport évident avec ce qui précédait.

Voici la traduction en images de la première :

Fig. 1



Proposition 1 : *la somme des carrés des n premiers multiples d'une longueur est supérieure au tiers de la somme de n carrés égaux au plus grand, elle-même supérieure à la somme des carrés des (n - 1) premiers multiples de cette longueur.*

En voici la raison :

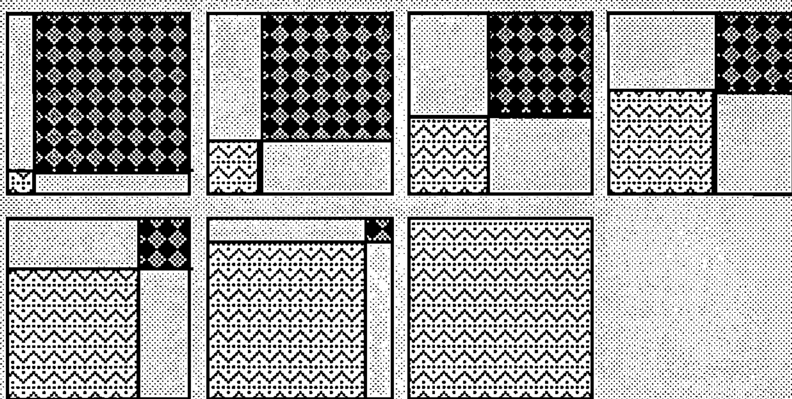


Fig. 2

Chaque carré est enfermé dans un carré de la plus grande taille, et fait apparaître en diagonale un second carré (sauf le dernier). Du coup, on voit la somme des carrés des n premiers multiples plus celle des (n - 1) premiers multiples (à contresens).

Dans ces grands carrés, les rectangles restants peuvent être découpés en bandes et réorganisés en une suite de rectangles intermédiaire entre les deux suites de carrés (fig. 3) :

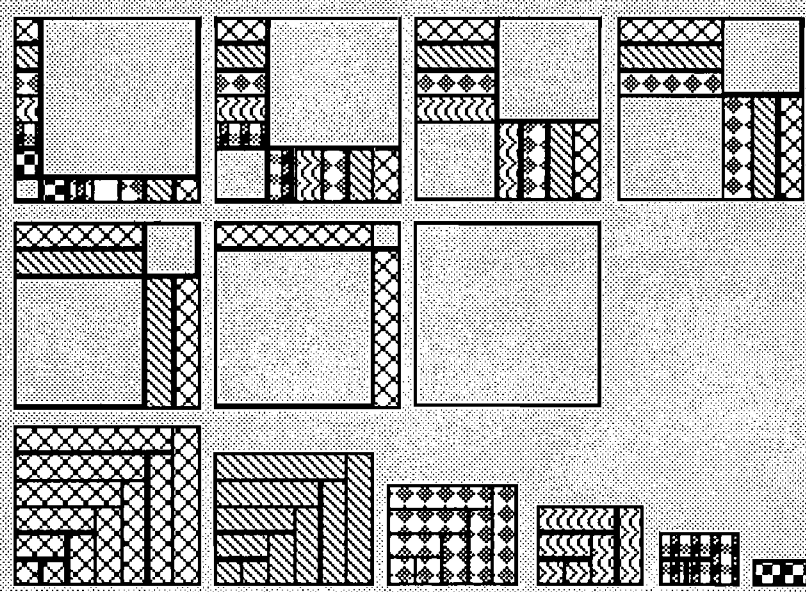


Fig. 3

Ainsi le résultat annoncé est vrai : la matière des n grands carrés s'est partagée en 3 suites rangées de la plus grande à la plus petite : les n carrés ; les n rectangles ; les (n - 1) carrés.

Le plus difficile à comprendre est le rapport entre une telle proposition et la spirale - non encore définie.

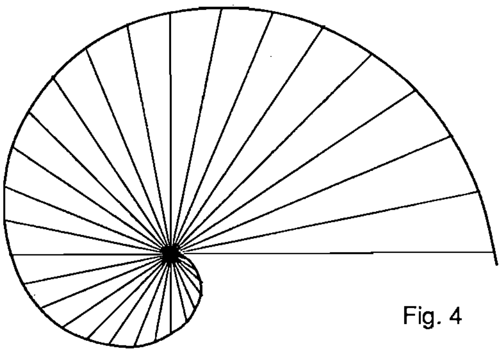


Fig. 4

La spirale est décrite comme composée de 2 mouvements : l'un d'une demi-droite autour de son origine dans un mouvement uniforme de rotation, l'autre d'un point sur la demi-droite à partir de l'origine dans un mouvement uniforme.

C'est une première chose étonnante que cette définition cinématique d'une courbe dans l'Antiquité !

La proposition la plus importante ensuite est la suivante :

Proposition 2 : *Si une ligne est tangente à l'extrémité d'une spirale décrite en première révolution, et, si du point d'origine de la spirale, on élève une perpendiculaire sur la droite initiale de révolution, cette perpendiculaire rencontrera la tangente, tandis que la droite située entre la tangente et l'origine de la spirale, sera égale à la circonférence du premier cercle.*

Une remarque préliminaire concerne le sens du mot : *droite*. Pour un Grec, c'est ce que nous appelons *segment*, et s'il a besoin dans certains cas – assez rares – du sens que nous donnons à : *droite*, il parle de : *droite prolongée.*

C'est certainement cette proposition qui a incité Archimède à inventer sa spirale : trouver une construction d'un segment de la longueur d'un cercle ; et justement *la sous-tangente de la spirale en fin de première révolution a exactement la longueur du cercle de fin de première révolution* ! (Fig. 5)

C'est manifestement le problème millénaire de la quadrature du cercle qui est sous-jacent : problème d'aire à priori puisqu'il s'agit de construire à la règle et au compas un carré de même aire qu'un

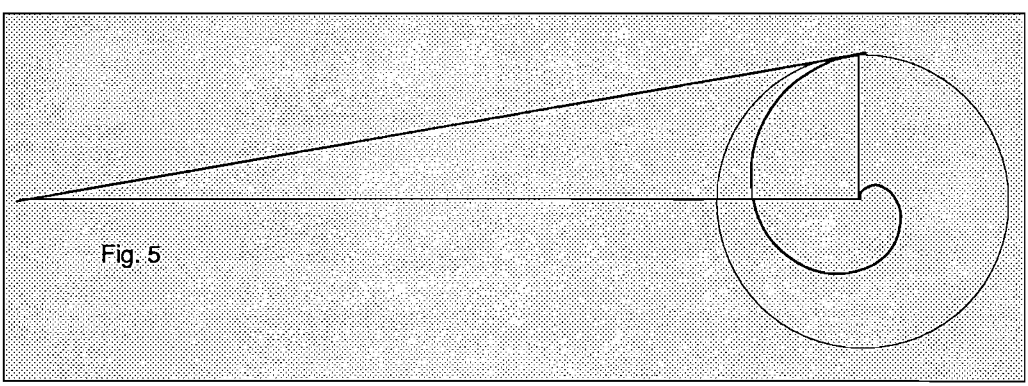


Fig. 5

disque donné. Mais on trouve dans un autre livre (*De la mesure du cercle*), cette proposition :

Proposition 3 : *Tout cercle équivaut au triangle rectangle de hauteur le rayon du cercle et de base le périmètre du cercle .*

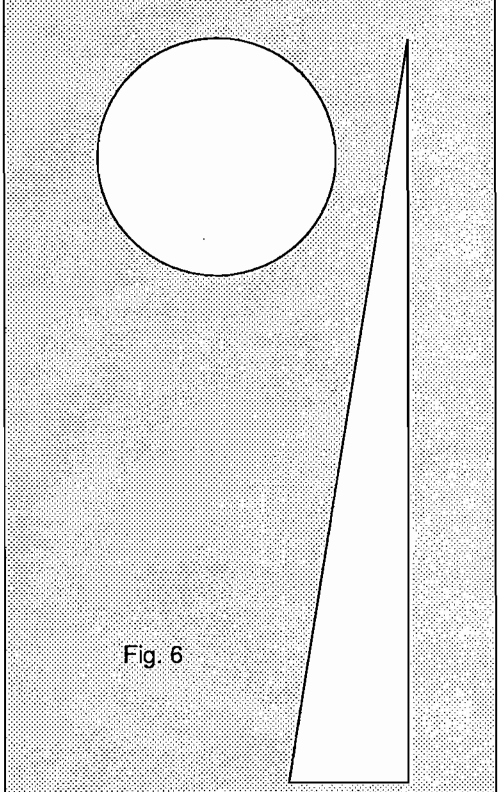


Fig. 6

Très joli transfert du problème puisque maintenant le problème d'aire est équivalent au problème de longueur : construire un segment de la longueur de la circonférence d'un cercle donné.

Et la *proposition 2* donne un second transfert : pour construire ce segment, il suffirait de pouvoir construire la tangente en fin de première révolution à la spirale inscrite.

Une remarque sur l'emploi du vocabulaire que j'ai respecté : si Archimède parle en termes d'*égalité* d'une figure plane, il parle de son *aire* sans jamais lui donner un nom différent de celui de la figure ; s'il parle de la même façon d'un *solide*, ce sera soit l'*objet*, soit son *volume* qui sera désigné suivant le contexte. Par contre, une mesure de longueur dans une surface ou d'aire dans un solide seront explicitement désignées : le *périmètre du cercle*, l'*aire de la sphère* ... qui était ce que nous appelons boule.

Dans tout celà, on n'a aucun recours à la *proposition 1*. A quoi sert-elle ?

La fin du livre définit les aires des révolutions de spirale et nous donne la réponse.

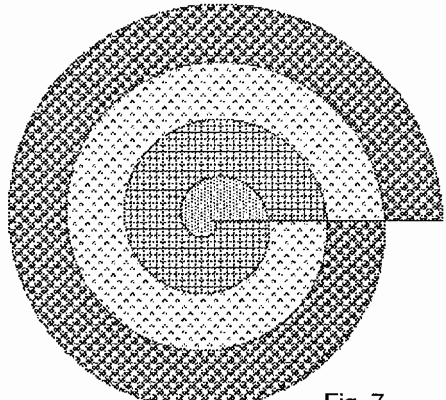


Fig. 7

Les démonstrations concernant l'approche d'aires non polygonales sont certainement parmi ce qu'Archimède nous a laissé de plus remarquable.

Voici comment il trouve l'aire de la première révolution :

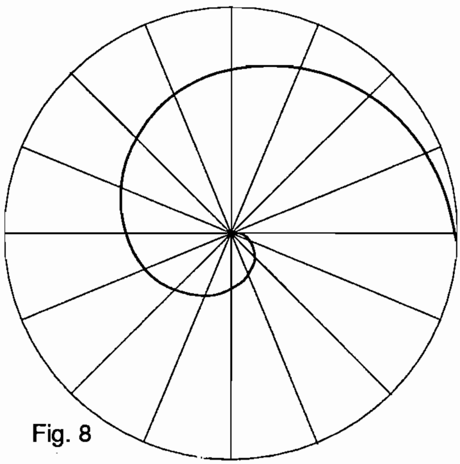


Fig. 8

Elle est inscrite dans le cercle de fin de première révolution, et tous deux sont découpés en n secteurs. La spirale est encadrée par des secteurs circulaires :

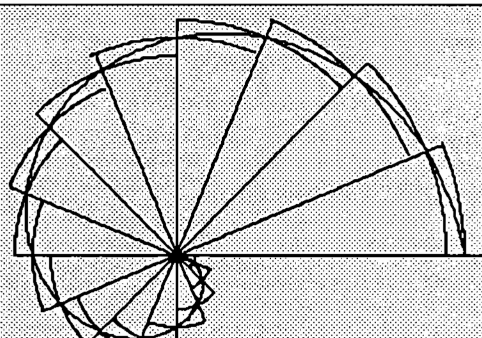
Ces secteurs forment deux figures dentées dont la différence est exactement *un secteur du grand disque*, comme on le voit en tournant la figure circonscrite de $\frac{1}{n}$ tour (voir Fig. 9).

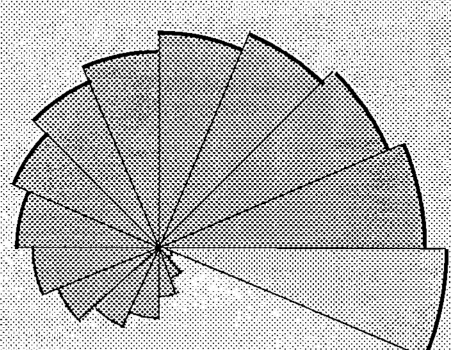
En choisissant bien le nombre n, il pourra rendre ces deux figures dentées plus proches l'une de l'autre que toute aire (*non nulle !*) donnée à l'avance.

Mais il reste un problème : peut-on connaître les aires de ces figures dentées plus facilement que celle de la spirale ?

Et voilà que va rentrer en service la *proposition 1*, car Archimède va associer chaque secteur des figures dentées avec le carré de son rayon (voir Fig. 10) et par la connaissance du calcul des proportions, il sait que la somme des secteurs (donc chaque figure dentée) est associée à la somme des carrés correspondants, dans le même rapport.

Fig. 9





(si on fait tourner de un huitième de tour dans le sens des aiguilles d'une montre la partie de la figure qui est circonscrite à la spirale, tous les secteurs, excepté le dernier, viennnent recouvrir les secteurs inscrits dans la spirale)

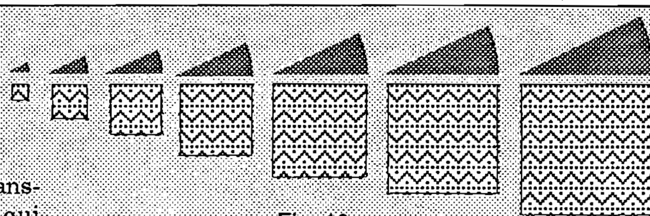
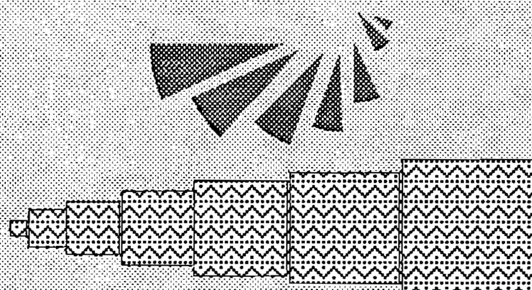


Fig. 10

Du coup, la *proposition 1* se transforme par proportionnalité (qui conserve l'ordre) en :

Proposition 4 : *La figure inscrite est inférieure au tiers du grand disque, lui-même inférieur à la figure circonscrite.*



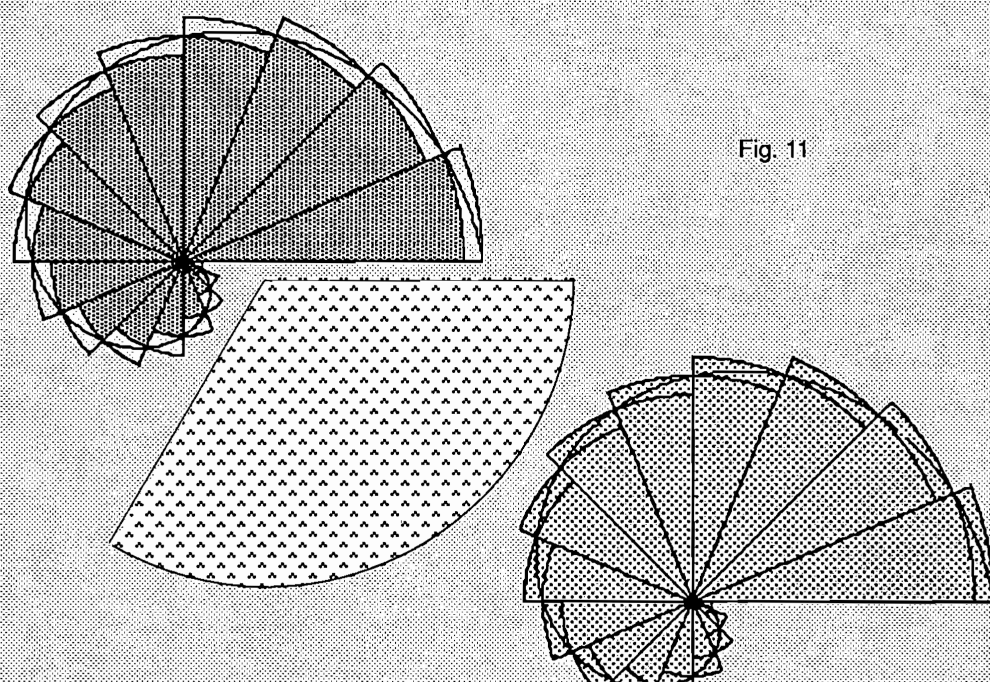


Fig. 11

Arrive alors la démonstration finale sur le refrain de « l'exhaustion »(1), air commun à toutes les démonstrations d'Archimède, qui nous montre que le concept de limite n'étant pas présent dans sa tête, une grandeur-limite ne peut être égale à une autre que parce qu'*elle ne peut en être différente* :

Proposition 5 : *L'aire de la première révolution de spirale est égale au tiers de celle du disque de fin de première révolution.*

Démonstration : Sinon elle serait différente et la différence existerait (c'est-à-dire ne serait pas nulle).

Et alors il pourrait construire deux figures dentées plus proches l'une de l'autre que cette différence ; et c'est la contradiction car les aires de ces figures dentées doivent encadrer simultanément la spirale et le tiers du disque en étant plus proches l'une de l'autre que ces deux aires !

Donc la différence *n'existe pas* – et non : *la différence est nulle*, car « rien » n'est pas un nombre et aucune mesure ne peut être ce « rien ».

Cet exposé détaillé montre comment s'expose une découverte chez Archimède et qu'il faudrait presque lire les livres à contresens pour comprendre comment s'est construite la démarche, par quel projet son esprit inventif a été dirigé et quels outils il a dû forger, en avance de 2000 ans sur toute théorie générale de limite et d'intégration.

(1) Démonstration géométrique par double réduction à l'absurde : il s'agit de démontrer par des arguments géométriques que deux figures sont égales en montrant que chacune ne peut dépasser l'autre.

EXEMPLE 2 : Le théorème du levier ou des postulats aux théorèmes

Un autre aspect de la présentation faite par Archimède est l'adaptation et la proximité des postulats et des propositions. Hilbert nous a habitués à des ensembles d'axiomes généraux définissant les types de géométrie dans lesquels on se place volontairement. Les Anciens formulaient des postulats qui tombaient sous l'évidence de la perception, ils étaient tels que la vérité qu'ils affirmaient ne pouvait être mise en doute par personne. Chez Archimède, presque chaque livre a ses postulats adaptés. Voici un exemple très intéressant : l'équilibre d'une balance, tiré du livre « *De l'équilibre des plans* ». Observez la simplicité des postulats et l'utilisation qu'il en fait pour démontrer le fameux théorème des leviers.

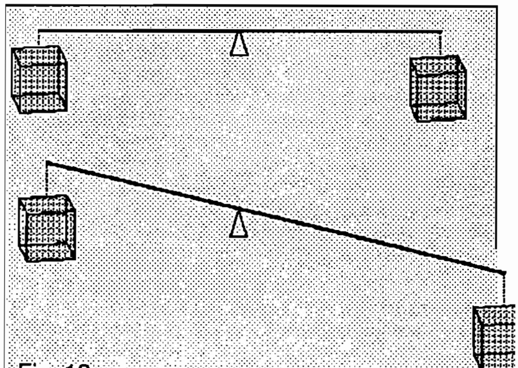


Fig. 12

Postulat 1 : *Des poids égaux s'équilibrent à des distances égales du point d'appui. Et si des poids égaux sont disposés à des distances inégales du point d'appui, il y a inclinaison du côté du plus grand bras.*

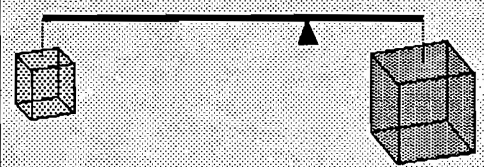


Fig. 13

Postulat 2 : *Si deux poids sont en équilibre autour d'un point, et qu'on enlève de la matière à l'un d'eux, il y a inclinaison du côté de l'autre poids.*
Si on ajoute de la matière à l'un d'eux, il y a inclinaison de son côté.

Le *postulat 2* est retourné par Archimède de la façon suivante :

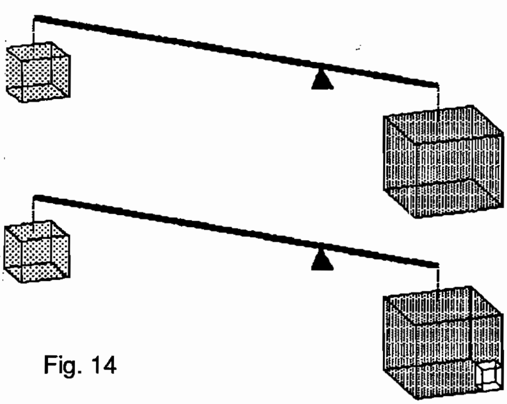


Fig. 14

Si deux poids sont en déséquilibre, on peut ôter de la matière à celui qui est en position basse sans modifier le déséquilibre. Et de même, on peut en ajouter à celui qui est en position haute sans modifier le déséquilibre.

En effet il y a toujours pour Archimède un poids capable d'équilibrer un autre à des distances données. S'il y a déséquilibre, c'est que celui qui est en position basse dépasse le poids d'équilibrage et que la différence entre ces deux poids existe. Si on ôte à ce poids un poids moindre que cette différence, le déséquilibre est maintenu. Et de même on pourra en ajouter un à celui qui est en position haute.

Archimède met ainsi en évidence le caractère instable de l'équilibre dans le *postulat 2* et le caractère stable du déséquilibre, puisque toute modification même infime de l'un des corps détruit l'équilibre, alors qu'une légère modification ne change pas le déséquilibre (Fig. 14).

Postulat 3 : *Si des grandeurs s'équilibrent à certaines distances, des grandeurs équivalentes aux premières s'équilibrent aux mêmes distances.*

La notion d'équivalence envisagée n'est pas définie dans le texte, mais on peut entendre que des solides ou surfaces de même poids sont équivalents donc échangeables, mais aussi que des groupes de solides ou surfaces - qui ont chacune un centre de gravité - peuvent être échangés contre une grandeur composée unique avec centre de gravité unique et attaché symboliquement (même s'il se trouve hors des composantes) ; et que dans ces échanges partiels, le centre de gravité de l'ensemble est invariant. Ce postulat affirme donc surtout l'associativité des centres de gravité.

Archimède construit une série de propositions où sa parfaite maîtrise de l'implication est évidente.

Proposition 1 : *Les poids qui s'équilibrent à des distances égales sont nécessairement égaux.*

S'ils étaient inégaux, on pourrait enlever au plus lourd son excédent sur l'autre et il n'y aurait plus équilibre d'après le *postulat 2*. Et pourtant ils s'équilibreraient d'après le *postulat 1*.

Proposition 2 : *Des poids inégaux s'équilibrent à des distances inégales, et le plus lourd sera situé à la plus petite distance du point d'équilibre.*

Sinon, soit les distances seraient égales, soit le plus lourd serait le plus loin du point d'équilibre. Si le plus lourd s'appelle A et le plus léger B, on peut ôter à A son excédent sur B ce qui entraine un déséquilibre d'après le *postulat 2*, A étant en position haute.

— Si les distances sont égales, on est en contradiction avec le *postulat 1* qui affirme que l'équilibre est réalisé,

— Si B est plus proche du point d'équilibre, le *postulat 1* dit encore que B est en position haute.

Dans les deux cas, il y aurait contradiction avec le premier postulat.

Proposition 3 : *Si deux grandeurs égales n'ont pas même centre de gravité, le centre de gravité de la grandeur composée des deux sera le milieu de la droite des centres.*

Archimède a montré dans un texte perdu que le centre de gravité d'un groupe de deux poids était toujours sur le segment reliant les centres des deux poids. Si ce n'était le milieu de ce segment, ce serait un autre point qui ne serait pas à égale distance des deux centres ; ce qui est en contradiction avec le *postulat 1*.

Le corollaire principal de cette proposition est que d'après le *postulat 3* :

On peut remplacer dans un équilibre un poids par deux poids moitiés disposés symétriquement, sans changer l'équilibre. Et réciproquement, on peut remplacer deux poids égaux par un poids double placé au milieu.

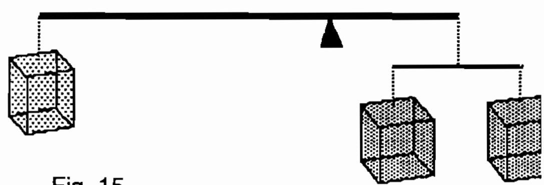
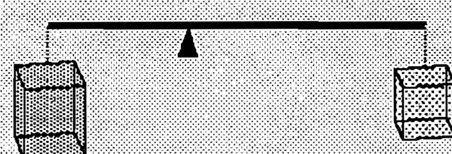


Fig. 15

Une autre conclusion est qu'*un nombre pair de poids égaux placés deux à deux symétriquement par rapport à un point ont ce point comme centre de gravité.*

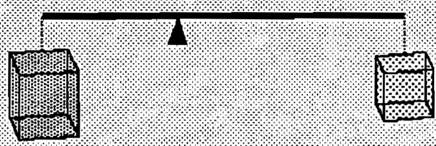
La liberté fondamentale qu'il se permet avec les équilibres est l'*équivalence par symétrie* qui engendre la démarche par dichotomie. Et c'est cette démarche qui va donner une véritable *démonstration* au *théorème des leviers*.



Théorème : *Le point d'équilibre de deux masses en équilibre est le point qui partage la barre dans le rapport inverse des masses.*

Démonstration du théorème des leviers :

Premier cas : Le rapport des masses est rationnel



q.m p.m

Fig. 16

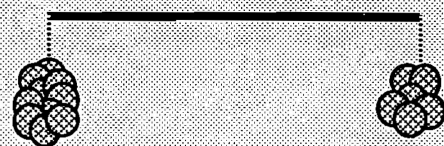


Fig. 17

Il existe une masse **m** qui mesure les deux masses (cf. Fig. 16). Grâce au *postulat 3*, Archimède est sûr de ne pas changer le point d'équilibre de l'ensemble en remplaçant en un premier temps la masse q.**m** par 2q masses $\frac{\mathbf{m}}{2}$ placées au même point, et la masse p.**m** par 2p masses $\frac{\mathbf{m}}{2}$ placées au même point (cf. Fig. 17).

Puis il peut, grâce à la *proposition 3*, disposer deux par deux, symétriquement, ses masses autour des deux points de départ pour les répartir uniformément, en étant toujours sûr que le point d'équilibre n'a pas changé.

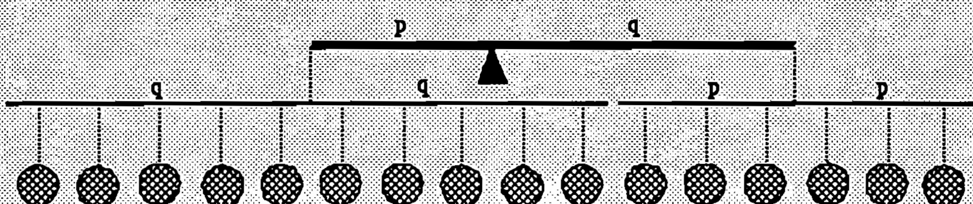


Fig. 18

Pour cela, la barre est divisée en (p+q) segments égaux de longueur **u**. Un « mobile » est constitué en suspendant une barre de longueur 2q.**u** à une extrémité, 2p.**u** à l'autre extrémité, et en suspendant une masse $\frac{\mathbf{m}}{2}$ au milieu de chacune des 2.q parties et des 2.p parties de longueur **u** de ces 2 barres (Fig. 18).
L'ensemble est formé de (2q + 2p) masses, et si on suspend la barre supérieure au point qui la partage en deux parties dans le rapport $\frac{p}{q}$, il y a symétrie des masses, donc équilibre.
Et ce centre des équilibres est celui de l'équilibre de départ.

Deuxième cas : le rapport est irrationnel

Il suspend néanmoins la balance au point qui partage la barre dans le rapport inverse de celui des masses.

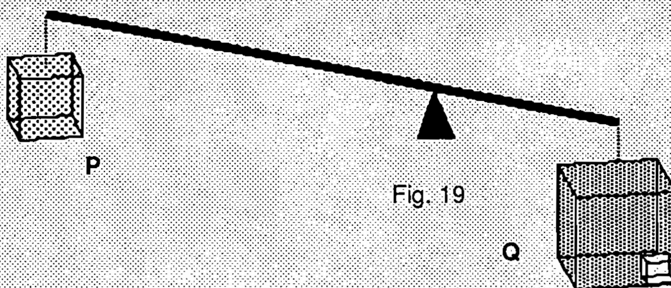


Fig. 19

Supposons qu'il n'y ait pas équilibre, et que la balance penche du côté de Q :
Puisqu'on pourrait ôter une masse **M** à Q, suffisamment faible pour ne pas changer le déséquilibre (*postulat 2*), on peut aussi partager la masse P en p parties égales **U** plus petites que **M**.
Q est compris entre deux multiples successifs de **U** : $q \cdot \mathbf{U} < Q < (q+1) \cdot \mathbf{U}$.

Archimède remplace Q par (q.**U**) et le déséquilibre est toujours dans le même sens, mais le rapport des masses suspendues est *rationnel*.
Mais alors, le point d'équilibre (celui qui partage la barre dans le rapport des bras de leviers : $\frac{q}{p}$) devrait être plus proche de la masse P car $\frac{q}{p} < \frac{Q}{P}$ et cependant la barre penche du côté de (q.**U**), ce qui veut dire que le point d'équilibre est plus proche de (q.**U**).
C'est contradictoire !
Dans tous les cas, la proposition est démontrée.

On notera sur cet exemple la difficulté qu'avaient les Grecs avec les rapports non rationnels de mesures. Ils appelaient grandeurs non commensurables deux grandeurs qui n'ont pas de sous-multiple commun. La découverte d'une telle « aberration » fut faite par Pythagore ou ses disciples lorsqu'ils découvrirent que la diagonale d'un carré ne pouvait être mesurée exactement par une fraction quelconque du côté. Ce qui fut gardé secret, car la doctrine quasi-religieuse des Pythagoriciens où les nombres étaient les intermédiaires entre les hommes et les dieux, et ne pouvaient avoir de défaut, fut gravement discutée et remise en question à l'arrivée de cet intrus de $\sqrt{2}$.

Néanmoins, Archimède avait conscience de la densité des rationnels puisqu'il peut utiliser le fait que dans tout voisinage d'une mesure donnée il existe des mesures commensurables avec une autre donnée.

EXEMPLE 3 : La méthode mécanique ou l'intuition retrouvée

Curieux destin que celui de cet ouvrage extraordinaire ! Alors que les savants de la Renaissance avaient reproché au Maître de n'avoir pas laissé la démarche par laquelle il avait découvert tant de résultats, et avaient pensé que cette démarche intuitive devait forcément être de l'ordre des « Indivisibles »(2) avec lesquels ils se forgeaient un puissant outil, voici qu'au début du XXème siècle (1906) on retrouve dans un monastère de Jérusalem un manuscrit authentique d'Archimède, précisément celui qui présente sa méthode de découverte, qu'il appelle « *La méthode relative aux théorèmes mécaniques* ». Pour Archimède, c'est réellement un moyen de découvrir et non d'exposer, puisqu'il dit à la suite de la première proposition :

« Ce que nous venons de dire ne démontre sans doute pas ce qui précède, mais donne jusqu'à un certain point l'idée que la conclusion est juste. C'est pourquoi, reconnaissant nous-même que la conclusion n'est pas démontrée, mais ayant dans l'idée qu'elle est exacte, nous donnerons en son lieu la démonstration géométrique que nous avons trouvée et déjà publiée ».

Il fallait que la même personne fût en même temps un grand géomètre et un grand physicien pour qu'une telle méthode prît naissance dans sa tête. Voici un exemple typique de l'utilisation de cette méthode : le *volume de la boule*.

Au départ : un cercle superposé à deux carrés adjacents dont une diagonale est marquée, et le segment $A\Gamma$ prolongé d'une même longueur jusqu'en Θ. La ligne verticale EN est variable.

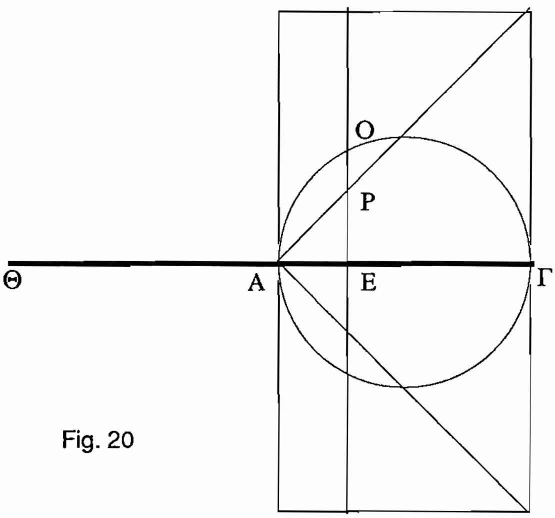


Fig. 20

Il est facile d'obtenir par le fait que $AO\Gamma$ est rectangle ($AO^2 = AE.A\Gamma$) et que AEO aussi est rectangle

$$(AO^2 = AE^2 + EO^2 = EP^2 + EO^2),$$

la relation fondamentale suivante :

$$\mathbf{R_1} : EP^2 + EO^2 = AE.A\Gamma$$

Si on divise cette relation par le carré du diamètre ($EN^2 = A\Gamma^2$) on en déduit la relation :

$$\mathbf{R_2} : \frac{EP^2 + EO^2}{EN^2} = \frac{AE}{A\Gamma}$$

Pour Archimède, ce rapport est intimement lié au théorème des leviers et s'interprète comme suit :

(2) Voir l'article d'E. Barbin, p.125 dans : *Fragments d'histoire des mathématiques II*, Brochure A.P.M.E.P. n° 65.

Traduction de $\mathbf{R_2}$ *en termes de leviers :*

$\mathbf{R_2}$: si je pends le carré de EO et celui de EP en Θ à une barre imaginaire ΘΓ suspendue en A, et le carré de EN en E, tous trois supposés homogènes et de même épaisseur minime, j'obtiens un équilibre.

Les disques étant *proportionnels aux carrés des rayons*, la même proportion existe en remplaçant chaque carré par le disque correspondant et l'équilibre R_2 est réalisé avec les disques comme avec les carrés.

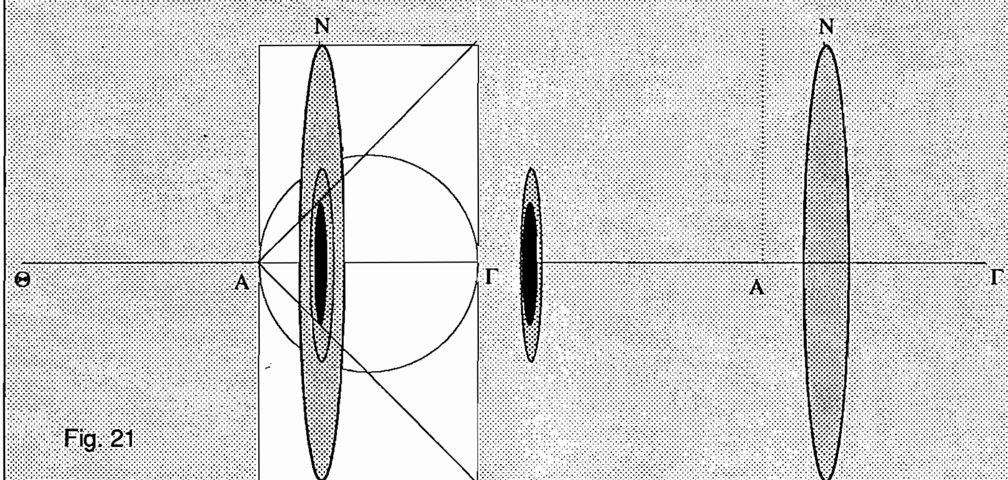


Fig. 21

Puisque cet équilibre existe pour toute position de E sur AΓ, Archimède fait tourner sa figure autour de ΘΓ, et engendre ainsi : une boule avec le disque ; un cylindre avec les deux carrés ; un cône avec les diagonales.

R_2 devient : *le disque-coupe de la boule et le disque-coupe du cône pendus en Θ équilibrent le disque-coupe du cylindre laissé en* E *(Fig. 21).*

Ceci pour toutes les coupes, donc la boule et le cône entiers pendus en Θ équilibrent le cylindre laissé en place. Et c'est précisément là que les Indivisibles sont nés la première fois!

Cette relation est puissante et le principe d'équilibre d'Archimède lui permet de ne tomber dans aucun des pièges que Torricelli a tendus à Cavalieri. On sent très vite cette puissance car Archimède la fait évoluer : en effet le cône qui était inscrit dans le cylindre en est le tiers en volume comme Euclide l'a montré et le cylindre ayant un centre de symétrie, celui-ci est son centre de gravité. Comme il connaît tous les centres de gravité et le rapport de volume de deux des trois corps en équilibre, il peut déduire le rapport des volumes de la boule au cylindre par l'équilibre R_2.

Mais si, au lieu de balayer de A jusqu'à Γ, il s'arrête dans sa course, il engendre un autre cylindre, un autre cône et un segment sphérique, dont il peut mesurer le volume de la même manière (Fig. 22).

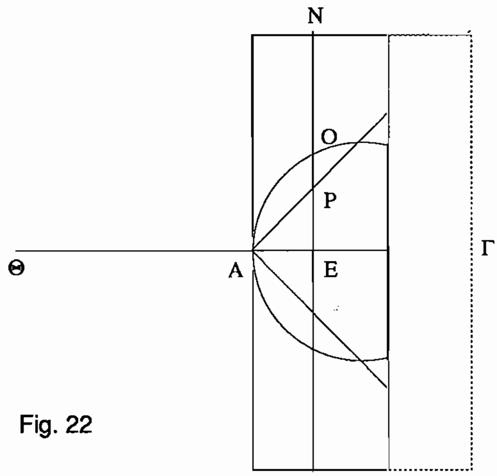


Fig. 22

Et si on écrase la figure de base dans un certain rapport r, le cylindre devient un

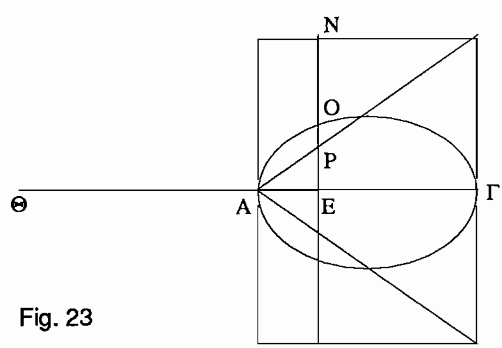


Fig. 23

autre cylindre, le cône un autre cône et la boule un ellipsoïde de révolution (Fig. 23).

Mais la relation R_2 ne change pas car son premier membre est un rapport de carrés de segments verticaux, donc tous modifiés dans le rapport r^2 et le second membre est un rapport de segments horizontaux qui sont invariants. Donc R_2 tient toujours, et lui permet de mesurer le volume des ellipsoïdes de révolution (ou des segments d'ellipsoïdes).

La suite des variations de cette relation n'est pas finie et lui permet encore de trouver le centre de gravité d'un cône et celui de n'importe quel segment de boule.

Mais dans son esprit, bien qu'il n'aît jamais douté de ses résultats, la méthode ne le dispense pas de la *démonstration*, c'est-à-dire de l'exhaustion ou encadrement, dans la forme proposée pour l'aire de la spirale.

EXEMPLE 4 : La quadrature de la parabole ou la synthèse réussie

Je ne peux finir ce panorama sans mentionner le seul cas où Archimède a réussi à faire le pont entre ses deux démarches : l'*intuitive*, celle de la Méthode, qui lui a procuré ses résultats, et la *rigoureuse*, celle de l'exhaustion qui lui a permis de les présenter à la postérité. « *La quadrature de la parabole* » présente deux démonstrations très différentes du même résultat. L'une est géométrique et, bien que comme toutes les autres, elle soit ingénieuse, elle ne nous étonne pas dans son déroulement : c'est une application de l'approche par exhaustion. L'autre est mécanique, et c'est elle qui réalise cette synthèse étonnante que seul Archimède pouvait réussir.

En voici les grandes lignes :

Le segment de parabole à mesurer est inscrit dans un triangle qui a même base que lui, et dont un côté est une tangente à la parabole et l'autre une parallèle à l'axe. Ce triangle est supposé pendu à une barre imaginaire de façon que son côté parallèle à l'axe soit vertical et à l'aplomb du milieu de la barre, et le sommet opposé à une extrémité de la barre. Un contrepoids permet l'équilibre du triangle à l'autre extrémité.

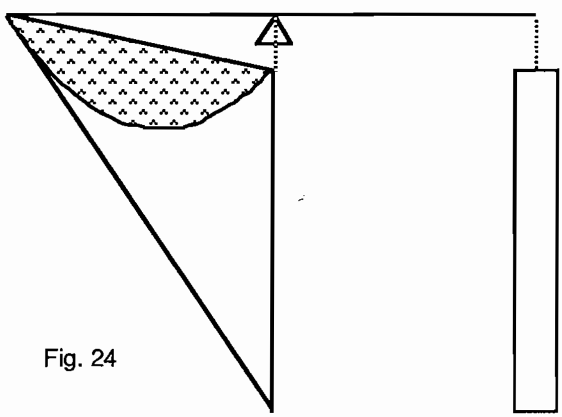


Fig. 24

Une fois encore, c'est le recours à un équilibre qui est le moteur de la démonstration. Mais ce qui est étonnant, c'est que dans ce cas, l'équilibre n'est pas seulement le moyen de découverte, mais il va permettre d'encadrer simultanément le segment de parabole et le contrepoids.

L'homogénéité des matériaux composant ces figures suspendues est, comme dans le cas de l'exemple précédent, implicite. Ce qui va permettre à Archimède de considérer des surfaces pesantes.

Ce triangle est découpé en n bandes verticales d'égale largeur, et le contrepoids sera découpé en parties équilibrant chacune l'une de ces bandes :

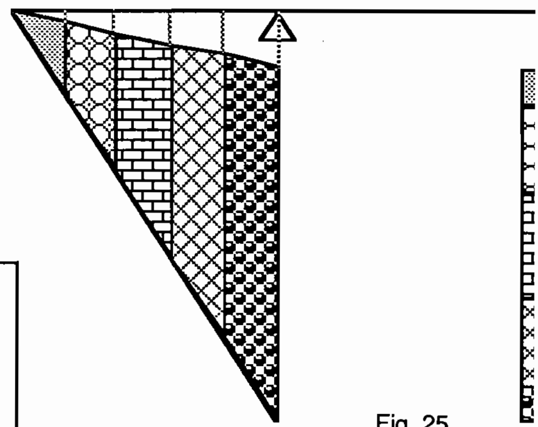


Fig. 25

Archimède montre que le contrepoids correspondant à une bande a toujours une aire comprise entre celles des deux trapèzes entourant la portion de parabole qui est sous la bande (voir encadré ci-contre, Fig. 26) :

Plus précisément, si la bande de rang **i** était pendue seulement au fil droit dans le dessin, le contrepoids serait le trapèze intérieur, et si elle était suspendue au fil gauche, ce serait le trapèze extérieur (voir encadré ci-contre, Fig. 27).

En réalité, elle est suspendue *par les deux fils*, en position intermédiaire, et le contrepoids est donc compris entre les deux trapèzes précédents.

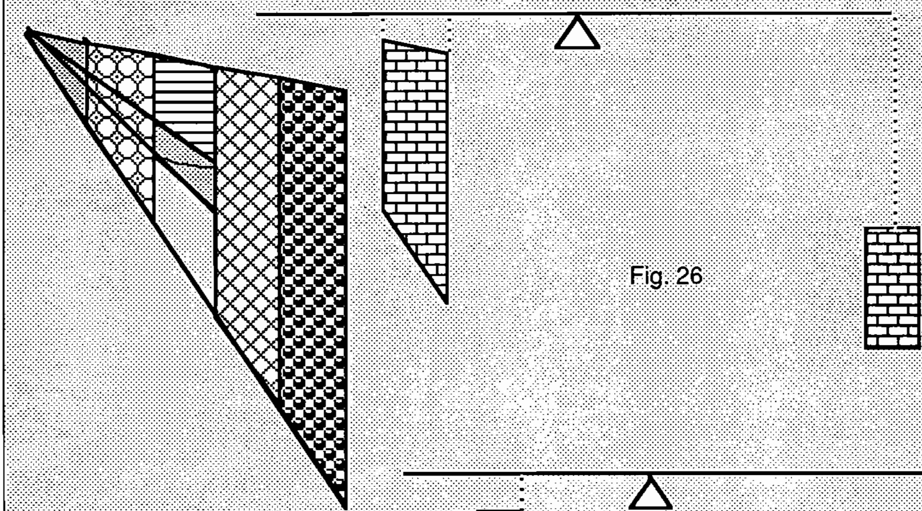


Fig. 26

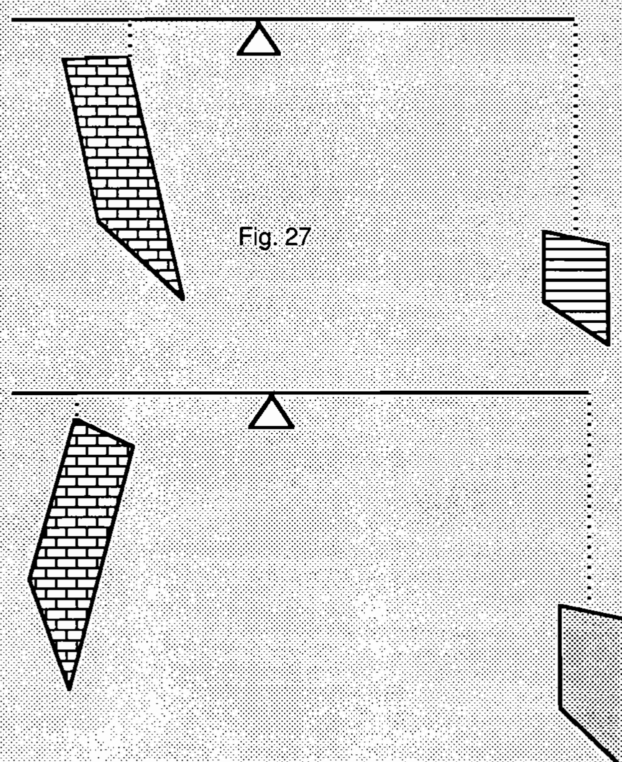


Fig. 27

— Le triangle contenant la parabole est découpé en **n** bandes verticales d'égale largeur. Le contrepoids est découpé en parties équilibrant chacune de ces bandes (Fig. 26).

— si la bande de rang *i* était pendue seulement au fil droit dans le dessin (Fig. 27 haute), le contrepoids serait le trapèze intérieur. Si elle était suspendue au fil gauche (Fig. 27 basse), ce serait le trapèze extérieur (3).

— En réalité, elle est suspendue *par les deux fils* – en position intermédiaire –, et le contrepoids est donc compris *entre les deux trapèzes précédents.*

(3) Pour une démonstration détaillée, voir « *Le Trésor d'Archimède* », par B. Bettinelli. Irem de Besançon.

Et donc *le contrepoids total a une aire comprise entre celles des deux figures dentées inscrite et circonscrite* au segment de parabole (Fig. 28).

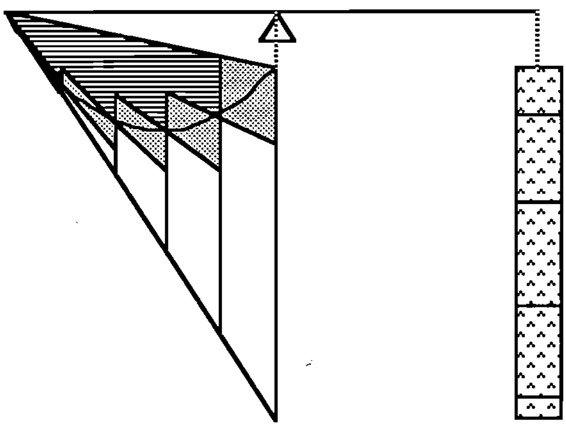


Fig. 28

A partir de ce point, il est clair que le refrain de l'exhaustion est prêt à être entonné, et qu'en choisissant un nombre assez grand de bandes, le contrepoids est égal au segment de parabole, parce qu'il n'est ni plus grand ni plus petit.

(S'il était plus grand, la différence existerait et on pourrait choisir 2 figures dentées plus proches l'une de l'autre que cette différence. Mais alors les 2 figures dentées encadrent le segment de parabole, ce qui se voit, mais aussi le contrepoids, ce que nous venons de montrer ..., et pourtant ils seraient plus près l'un de l'autre que les poids encadrés !)

En revoyant la figure 24 et en sachant que le centre de gravité de tout triangle est situé au tiers de ses médianes — un autre résultat dû à Archimède — il est sûr que l'**aire du segment de parabole est le tiers de celle du triangle suspendu.**

Conclusion

Ce tour d'horizon avait pour but de montrer un homme capable de s'attaquer à des difficultés extraordinaires avec les outils très simples de la géométrie élémentaire. Si ce texte, par son ampleur ne peut restituer dans le détail chacun des résultats annoncés, Archimède a étudié chacun d'eux minutieusement et le lecteur pourra soit avoir le courage de lire la traduction fidèle du texte ancien, soit se reporter à l'ouvrage « *Le trésor d'Archimède* » pour des réponses complètes.

Les deux grands législateurs de la géométrie, selon le terme de Itard, que furent Euclide et Archimède, n'ont pas travaillé de la même manière. Si Euclide fut le premier grand encyclopédiste, rassemblant dans une parfaite progression logique l'ensemble des connaissances grecques de son époque, Archimède fut homme d'avenir et de préscience, et tous les résultats qu'il démontre sont ses propres inventions. (S'il a besoin d'un lemme connu, il l'énonce en disant : Comme mes prédécesseurs l'ont démontré ...)

Le travail entamé à la Renaissance

par Cavalieri, Torricelli, puis Pascal, Roberval et enfin Leibnitz et Newton, a permis de construire des outils beaucoup plus généraux que les méthodes d'Archimède propres à chaque découverte.

Néanmoins, et surtout pour des classes non techniciennes du lycée, il m'a semblé important de traduire en images compréhensibles les textes d'Archimède car ils sont beaucoup plus proches de l'intuition et des perceptions que le puissant outil intégral, qu'ils justifient l'introduction de notions comme les limites de suites, les fonctions ou les sommes de Riemann parce qu'ils les utilisent implicitement, sans qu'elles aient réellement pris naissance. De plus, l'étude de textes importants, accessibles, et propres à provoquer l'admiration, est une part de l'enseignement mathématique qu'il me semble important de développer.

BIBLIOGRAPHIE

Les œuvres complètes d'Archimède par P. Ver Eecke.
Librairie scientifique A. Blanchard
9, rue de Médicis
75006 PARIS

Le trésor d'Archimède par B. Bettinelli.
IREM de Besançon
Faculté des Sciences
Route de Gray - La Bouloie
25030 BESANÇON cedex