ENSEIGNER LA GEOMETRIE, POURQUOI ?

Rudolph BKOUCHE
Irem de Lille

Je me rabattis sur le grec. Mais mon éditeur qui pense à tout, me fit observer qu'en ce temps où tout le monde apprend le grec, personne ne le sait, pas même les professeurs qui l'enseignent et qu'ainsi, moi qui le sais jusqu'à l'accentuation inclusivement, j'aurais l'air de vouloir étaler ma puissante érudition.

Jean RICHEPIN
La chanson des Gueux (Préface)

Si l'école est lieu de transmission de savoir (et donc lieu de savoir) de quel savoir s'agit-il ? Question cruciale à l'époque où se constitue de plus en plus un savoir purement scolaire, autonome en ce sens qu'il ne se construit que par rapport à l'école, savoir dont la seule finalité est d'être enseigné et appris, l'apprentissage n'ayant d'autre but que l'apprentissage.

Ceci explique la prégnance de la pédagogie, une pédagogie qui n'a plus pour objet qu'elle-même, et de sa théorisation sous la forme de la didactique, didactique des disciplines certes, mais les disciplines ne sont plus que prétexte à didactique. Ainsi se développe une nouvelle scolastique, culture originale (comme on se complaît à le dire dans un bulletin récent de l'I.N.R.P. [1]) mais dont la seule originalité est d'être originale, c'est-à-dire coupée de toute culture.

Les *mathématiques modernes*, cette pure invention pédagogique, nous avait déjà donné l'exemple (et d'une certaine façon, montré la voie) de cette fabrication d'un savoir qui a pour seule finalité d'être enseigné et appris, savoir sans sujet (qui sait ?) et savoir sans objet (que sait-on ?), savoir de la *post-modernité* comme le raconte Jean-François LYOTARD [2], savoir dont la signification première réside dans sa *valeur marchande*, reconnaissance sociale qui s'adresse plus à la forme supposée de l'acquisition du savoir qu'au savoir lui-même (savoir qui peut-être n'existe pas). Ainsi, la *voie royale* que constituent la terminale C et le baccalauréat du même nom dont le titulaire est supposé avoir acquis les bases d'un savoir scientifique ; qu'importe que ce savoir soit réel ou supposé, l'important réside dans le titre, et la sélection par les mathématiques se construit essentiellement sur un mythe, savoir, la place des mathématiques dans la connaissance (et par cela même, la place des mathématiques dans l'enseignement) ; l'impérialisme (vrai ou supposé) des mathématiques est ainsi l'expression de ce mythe, mais c'est le mythe qui assure la réalité de la sélection par les mathématiques (et, pourrait-on ajouter, aux dépens de l'enseignement des mathématiques !).

Mais tout cela importe peu, dans la mesure où le savoir n'existe pas, où le savoir scolaire n'est que la longue litanie d'un discours enseigné par les uns et appris par les autres ; qu'importe alors que ce discours soit porteur ou non d'un savoir dans la mesure où le savoir scolaire se réduit au seul discours et que la signification d'icelui échappe autant à celui qui enseigne qu'à celui qui apprend.

Voilà pour le constat d'un enseignement qui a, en fait, bien peu à dire et dont la pédagogie sert essentiellement à masquer le vide.

Ceci dit, et peut-être par une espèce d'obstination humaniste à contre-courant d'une modernité qui privilégie l'absence de pensée et l'absence de savoir, peut-on encore penser l'école comme lieu de transmission de savoir, c'est-à-dire lieu de construction d'un savoir, non dans une autonomie imaginaire (et je renvoie ici à l'article cité du bulletin *Etapes de la Recherche* de l'I.N.R.P.) mais en prise avec les divers modes de savoirs sociaux y compris avec le savoir scientifique. Position d'autant à contre-courant que le savoir (et particulièrement le savoir scientifique) apparaît aujourd'hui comme un ensemble de quelques procédures techniques (ce qu'on appelle prétentieusement un savoir-faire), savoir sans pensée, savoir sans savoir, savoir dont le savoir scolaire est en quelque sorte une représentation, y compris dans sa volonté d'autonomie, le *spectacle de la Science* comme je l'ai appelé dans un article antérieur [3].

Cette volonté (anachronique !) de repenser l'école comme lieu de savoir, nous essayerons ici de l'expliciter à travers l'enseignement de la géométrie, enseignement qui, après avoir disparu lors de la réforme des *mathématiques modernes*, reprend peu à peu sa place sans que l'on sache encore de quelle place il s'agit, entre un retour à une tradition qu'on ne veut plus ou qu'on ne sait plus comprendre (comme le montrent ces programmes confus nés de la dernière en date des réformes) et une modernité non maîtrisée (voire non maîtrisable).

Mais au-delà du point de vue purement scolaire de la fabrication des programmes, qu'en est-il de cette disparition et de cette réapparition ? Le savoir scolaire, aussi fermé sur lui-même soit-il, subit l'influence du monde. Et l'effacement du géométrique au profit du numérique qui participe du mythe de l'algébrisation universelle (cette voie royale de l'enseignement des mathématiques [4] à l'image d'une certaine conception de l'histoire des mathématiques [5]) ne peut aujourd'hui que se renforcer face à ce qu'on pourrait appeler la numérisation de la société automatisée que nous vivons aujourd'hui ; à titre d'exemple, on pourrait citer la lecture numérique du temps via les cadrans à cristaux liquides qui se substitue à la lecture géométrique de la position des aiguilles sur le cadran d'une montre, on pourrait citer aussi la pesée dans un super-marché, laquelle consiste à poser une marchandise sur un plateau, ce qui détermine l'apparition d'un nombre sur un cadran, savoir, le prix, pesée numérique qui remplace la pesée géométrique de la balance romaine ou de la balance de Roberval. Il ne s'agit point de porter un jugement mais de constater ce recul d'une certaine géométrie du quotidien.

En contrepoint, la géométrie réapparaît sous une forme plus sophistiquée, d'une part dans le savoir savant, pour reprendre une terminologie chère à Yves CHEVALLARD [6], avec cette géométrisation universelle que l'on retrouve dans divers domaines de la science d'aujourd'hui : mathématiques, sciences physiques, voire biologie, sans omettre les statistiques et l'analyse des données (cf. ci-dessous), d'autre part via les images de synthèse des nouvelles technologies ce qui pose sous une nouvelle forme le problème de la représentation géométrique. Savoir savant et savoir technologique se rejoignent pour marquer l'actualité de ce vieux domaine de la connaissance qu'est la géométrie.

Et un certain discours scolaire de s'empresser de justifier le retour à l'enseignement de la géométrie via le recours à la Science et à la Technologie, comme s'il était besoin de cet appel au monde (et à la mode !) pour introduire (ou réintroduire) un contenu d'enseignement, contenu que la transposition didactique [6] (ce concept qui se veut explication de la séparation du savoir enseigné et du savoir savant mais qui n'en est que la justification, concept fantasmatique qui a au moins le mérite de la pertinence sociologique) transformera en savoir scolaire lui ôtant toute signification qui ne relève pas de l'enseignement ou de l'apprentissage, la pédagogie fera le reste.

C'est donc hors du domaine du savoir scolaire, serait-il pédagogiquement fondé, et hors des mythologies de la modernité (tels ces discours justificateurs de la réforme des mathématiques modernes) que nous poserons la question de l'enseignement de la géométrie, c'est-à-dire de sa place dans la pratique scientifique, si, contrairement à certains discours à la mode, on considère qu'un contenu d'enseignement s'appuie sur un contenu de savoir qui ne se réduise pas à la seule finalité d'être enseigné et d'être appris. Il ne s'agit point d'aller chercher des justifications volontaristes tel le recours à la modernité qui réduit les contenus d'enseignement à leur valeur marchande (au sens que nous avons dit plus haut) et qui conduit ainsi à la *professionnalisation* de l'enseignement (l'enseignement comme préparation à la profession, préparation réelle ou préparation supposée, peu importe), ni, si l'on se place dans une perspective humaniste, d'en appeler, en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, à la formation de l'esprit rationnel, comme s'il y avait un esprit rationnel *en soi* indépendamment des modes de fonctionnement de la rationalité et des problématiques où s'exerce la pensée rationnelle, les mathématiques, le modèle de la rationalité depuis les Grecs, étant le moyen privilégié de développer cet esprit.

L'enseignement d'un contenu de savoir a pour premier objet ce contenu de savoir, l'enseignement des mathématiques a pour premier objet la connaissance des mathématiques, c'est ainsi qu'il peut amener les élèves à construire leur propre rapport à ce domaine de connaissance. C'est parce que les mathématiques s'appuient sur la pensée rationnelle que leur enseignement constitue aussi un apprentissage de la rationalité mais, d'une part, l'enseignement des mathématiques ne se réduit pas à cet apprentissage de la rationalité (et ce, parce que le savoir mathématique ne se réduit pas à sa seule rationalité), d'autre part, il y a d'autres formes de rationalité que la rationalité mathématique.

Ceci nous conduit à expliciter la place de la géométrie parmi les sciences et à partir d'icelle, compte tenu des finalités de l'enseignement, finalités qui ne se réduisent pas à la seule transmission des connaissances (comment définir quelles sont les connaissances à transmettre ?) mais participent du contexte sociologique dans lequel s'inscrit l'institution enseignante, déterminer quelle est la place de l'enseignement de la géométrie ; c'est alors seulement que se pose le problème pédagogique, moins comme méthode du bon usage de la classe et des élèves par le maître, que comme l'ensemble des moyens permettant aux élèves d'atteindre les connaissances qu'il s'agit de transmettre et de construire ainsi leur propre rapport au savoir, rapport sans lequel il n'est pas de savoir réel.

Je reviendrai ici sur les trois aspects de la géométrie cités dans un texte précédent [7], savoir, la géométrie comme science autonome : la science des situations spatiales, la géométrie dans ses rapports avec les autres domaines de la connaissance et enfin la géométrie comme langage et comme représentation (ce qu'on pourrait appeler l'aspect métaphorique de la géométrie, qui constitue le fondement de la géométrisation).

La géométrie comme domaine autonome de la connaissance du monde s'est constituée autour de deux grandes problématiques, d'abord la *mesure des grandeurs géométriques* (c'est-à-dire celles qui sont associées aux situations spatiales : longueurs, angles, aires, volumes) essentiellement fondée sur le principe de l'égalité par superposition tel qu'il est énoncé dans les Éléments d'Euclide (que nous citons ici dans la traduction de HOÜEL [8]).

Les grandeurs que l'on peut faire coïncider l'une avec l'autre sont égales entre elles.

Ensuite la *représentation plane des situations spatiales* qui s'est développée avec les constructions perspectivistes à partir du Quattrocento italien et qui a conduit à l'élaboration de la géométrie projective [9].

Ce sont les problèmes posés à l'intérieur de ces deux grands thèmes qui ont conduit à mettre en place les diverses méthodes de la géométrie que sont le dessin, la démonstration *à la grecque*, la méthode des coordonnées, le calcul vectoriel et les méthodes de l'algèbre linéaire. Ces deux grandes problématiques, par certains des problèmes qu'elles étudient et par les méthodes mises en jeu, sont étroitement liées, cependant l'unification ne s'est faite qu'en 1872, avec le *Programme d'Erlangen* de Félix KLEIN [10] dans lequel l'auteur explicite les relations entre géométrie, groupes de transformations et théorie des invariants. Cette synthèse, comme toute grande synthèse, est évidemment *a posteriori* non seulement sur le plan historique (ce qui est un truisme) mais aussi (et c'est ce qui nous intéresse quant à l'enseignement) sur le plan de la compréhension, ce qu'au nom de la modernité on a tendance à oublier. La synthèse de Klein, en éliminant les situations spatiales en tant que telles du discours géométrique, a permis de mettre en évidence la structure sous-jacente de la construction géométrique ouvrant la voie à la conception structurale qui sous-tend les mathématiques d'aujourd'hui [11] ; encore faut-il préciser, pour éviter un structuralisme platonisant, que lorsqu'on parle de la structure sous-jacente à la géométrie, cette structure n'est devenue sous-jacente qu'après avoir été définie ; le structuralisme mathématique, puisque structuralisme il y a, est un structuralisme construit.

Ceci implique qu'un enseignement de la géométrie doit s'appuyer sur l'étude des situations spatiales, que ce soit du point de vue de la mesure ou du point de vue du dessin ; c'est sur ces objets du donné empirique (que constituent les situations spatiales) que se construit la rationalité géométrique à travers les problématiques citées ci-dessus, et c'est à partir de cette rationalisation première que l'on peut atteindre, si cela est nécessaire, les grands principes du structuralisme moderne. A défaut d'une telle démarche, les grandes structures n'ont pas de sens et l'on revient au savoir scolaire cité plus haut, la réduction du savoir au discours ; ce fut, il est vrai, le caractère essentiel de la réforme des mathématiques modernes et il n'est pas certain que cela ait disparu. Il faut ici prendre en compte le refus (la peur !), caractéristique d'une certaine pensée française contemporaine, de considérer le caractère empirique des premiers objets de la géométrie, refus qui, au nom de la défense d'une rationalité qui serait *a priori*, constitue un blocage, l'incapacité d'amener l'apprenant à s'initier à la rationalité géométrique. Celle-ci, réduite au discours rationnel, perd toute signification, c'est ce qui donne un certain caractère irrationnel à l'enseignement mathématique d'aujourd'hui.

La géométrie, parce qu'elle est science des situations spatiales, se relie aux autres domaines du savoir où interviennent ces situations spatiales, domaines qui à leur tour interviennent dans le développement de la connaissance géométrique, la mise en place des concepts géométriques et des méthodes. Nous ne pouvons ici donner une liste exhaustive de tous les domaines où le géométrique intervient, nous nous contenterons de citer ceux d'entre eux qui nous semblent les plus significatifs.

Je citerai d'abord la géographie et l'astronomie parce que les situations spatiales y jouent un rôle essentiel et que la géométrie se constitue en relation avec ces domaines : mesure de la terre (pour revenir à l'étymologie du mot géométrie) et représentation de la terre qui renvoie tout autant à la géométrie, à la géodésie et à la cartographie, étude géométrique des phénomènes célestes qui relie l'astronomie à la problématique de la mesure des grandeurs.

Je citerai aussi les sciences physiques dont on peut dire que la géométrie est une partie [12], non seulement via la distinction aujourd'hui classique entre la géométrie mathématique (de type axiomatique) et la géométrie pratique comme l'explique EINSTEIN [13], mais parce que la géométrie représente le premier exemple d'une physique mathématique (au sens moderne du terme) comme construction rationnelle à partir d'un donné empirique, et l'on peut rappeler le rôle de modèle qu'ont joué les *Éléments* d'EUCLIDE dans la mise en place de la pensée physico-mathématique comme le montre la mécanique newtonienne des *Principia* (Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle), voire la théorie électromagnétique de Maxwell ou même la théorie de la Relativité d'Einstein, vieux rêve métaphysique d'une connaissance purement déductive du monde à partir de quelques principes premiers, idéal proclamé par ARISTOTE [14] et toujours actuel (qu'il ne faut pas confondre avec la construction axiomatique *à la HILBERT* qui bien que s'appuyant sur des principes différents, de l'ordre du langage, en constitue une représentation).

De façon plus précise cette imbrication de la géométrie dans la physique apparaît par exemple dans le développement conjoint de la mécanique et de la géométrie différentielle depuis le XVIIème siècle, le lien bien connu entre vitesse et dérivée [12] et la double définition d'une courbe (qui apparaît déjà chez les Grecs), objet statique défini par une propriété énonçant la condition pour qu'un point appartienne à la courbe (propriété que l'on sait, depuis DESCARTES et FERMAT, représenter par une équation) et objet cinématique défini comme trajectoire, double définition à laquelle renvoie le terme *lieu géométrique* bien plus riche de contenu que la définition ensembliste de la mathématique formelle. (Les définitions ensemblistes ont leur intérêt propre qui se situe à un autre niveau, le concept mathématique d'ensemble ne relève pas, quoi qu'on en ait dit, des mathématiques élémentaires (au sens pédagogique du terme) ; quant au terme d'ensemble, pris dans son acception naïve, il n'a pas besoin d'être théorisé pour être employé [15]).

On pourrait citer aussi les interventions de la mécanique dans le raisonnement géométrique, ainsi les arguments relevant de la statique dans la quadrature de la parabole chez Archimède, ou l'utilisation du centre instantané de rotation dans la détermination des tangentes à une courbe. Ainsi la mécanique intervient autant dans le développement de la géométrie que la géométrie intervient dans le développement de la mécanique, je me permets de renvoyer ici à un article en préparation qui développe le point de vue de mon exposé à Kassel déjà cité [12], ainsi qu'aux articles de OUSPENSKI, LIOUBITCH et CHOR sur les applications de la mécanique aux mathématiques [16], ouvrage qui nous rappelle certains aspects oubliés de l'enseignement scientifique, et peut-être encore plus en France, aspects pourtant bien présents dans l'enseignement il y a quelque trente ans puisque c'est sur les bancs du lycée que je les ai connus. Ce qui renvoie au rapport entre le savoir scolaire et le savoir, ce dont je parlais au début de cet article, à ce qu'on pourrait appeler la perte de savoir (voire le blocage de savoir) que constitue la transposition didactique.

Ceci nous renvoie à l'explicitation des liens entre la géométrie (et plus généralement les mathématiques) et les divers domaines de la connaissance dans l'enseignement scientifique, problème nouveau dans la mesure où il a été oublié (renforcement de la séparation entre les disciplines, extrême spécialisation de la formation des maîtres, particulièrement en mathématiques) et ce n'est pas la brumeuse phraséologie à la mode sur le plurisdisciplinaire qui peut aider à retrouver ces liens.

Ceci implique que les divers domaines du savoir où interviennent les mathématiques soient abordés à l'intérieur du cours de mathématiques, non comme simples applications (comme on a trop souvent l'habitude de le faire) mais comme partie intégrante de l'enseignement des mathématiques. Ceci implique aussi que les mathématiques apparaissent dans l'enseignement des disciplines où elles interviennent, non comme une simple liste de procédures techniques à utiliser en cas de besoin mais comme partie intégrante de ces disciplines. La question, quelquefois posée, de savoir qui doit enseigner les mathématiques nécessaires à l'étude d'une discipline, le professeur de mathématiques ou le spécialiste de la discipline concernée, devient alors secondaire. Mais cela implique d'une part une nouvelle attitude face à la diversité des disciplines, fondée à la fois sur l'autonomie relative (et nécessaire) des divers domaines du savoir et sur les relations entre ces domaines, d'autre part une approche renouvelée des liens entre connaissance empirique et connaissance rationnelle, et je renvoie ici à GONSETH [17].

Nous abordons maintenant ce troisième aspect de la géométrie que j'ai appelé l'aspect métaphorique, savoir, la *géométrisation* considérée comme *mode de représentation* de phénomènes qui *a priori* ne relève pas de la géométrie (au sens où celle-ci est l'étude des structures spatiales) ou comme *mode d'expression langagière* de ces mêmes phénomènes ; qu'elle renvoie à des images ou qu'elle renvoie à un langage, la géométrisation permet une nouvelle approche et par conséquent une compréhension nouvelle des phénomènes étudiés, à la fois sur le plan de la rationalité (c'est-à-dire des modes de raisonnement) et sur le plan de l'intuition (un enrichissement de l'intuition, et c'est là le point le plus intéressant de la géométrisation) mais cette nouvelle approche ne prend sens (aussi bien pour ceux qui la construisent que pour ceux qui sont amenés à l'étudier) que parce qu'elle renvoie à cette connaissance première qu'est la géométrie élémentaire, géométrie de la mesure et du dessin dont nous avons parlé plus haut ; sans cette connaissance première, les métaphores de la géométrisation perdent leur sens et l'on est renvoyé à la simple utilisation formelle de langages et de représentations pour laquelle la seule prise est le respect des règles et des procédures.

La géométrisation apparaît déjà dans la géométrie grecque avec la représentation des grandeurs par des longueurs (cf. les livres arithmétiques des *Éléments* d'EUCLIDE et les travaux d'ARCHIMEDE), on pourrait citer aussi parce qu'ils relèvent de la même problématique les travaux d'AL-KHWARIZMI (IXème siècle) et d'Omar AL-KHAYYAM (XIème siècle) concernant la résolution géométrique des équations du second et du troisième degré. Il faudrait aussi citer les travaux d'ORESME (XIVème siècle) sur la représentation de la variation d'une grandeur dépendant d'une autre grandeur (la représentation graphique des fonctions). Mais c'est la méthode des coordonnées, c'est-à-dire l'utilisation du calcul algébrique de VIETE pour la résolution des problèmes de géométrie qui conduira en retour à l'étude géométrique des équations avec DESCARTES et FERMAT. Ainsi se met en place ce qu'on appelle, non sans quelqu'ambiguïté, l'unification des mathématiques, à travers ces deux courants inséparables que sont l'algébrisation de la géométrie et la géométrisation de l'algèbre.

Depuis, algébrisation et géométrisation se sont développées mais ce n'est pas le lieu d'en faire ici l'histoire. En ce qui concerne la géométrisation, nous nous contenterons de citer deux textes fondamentaux, l'un de RIEMANN, l'autre de Félix KLEIN.

D'abord le texte de RIEMANN *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie* [18], conférence prononcée en

1854 et publiée en 1867, l'un des textes les plus profonds de l'histoire de la géométrie ; ce texte, à la fois intuitif et abstrait, avec l'introduction de ce qu'on appelle communément les *espaces abstraits* et par l'élargissement de l'intuition géométrique usuelle qu'il propose, est à la source de la géométrisation de la physique contemporaine. Il nous faut ici préciser, à l'encontre de certains discours simplificateurs, que lorsqu'on parle des espaces abstraits, il ne s'agit pas de constructions arbitraires nées, on ne sait trop ni comment ni pourquoi, de l'imagination de quelques mathématiciens, où les physiciens iront chercher, quelques années plus tard, des représentations convenables pour les phénomènes qu'ils étudient (ainsi a-t-on dit des espaces inventés par le mathématicien RIEMANN que le physicien EINSTEIN utilisera quelques soixante dix ans plus tard) ; la physique est présente dans le texte de RIEMANN, c'est en rapport avec le problème de la détermination de la géométrie de l'espace physique (problème posé par la découverte des géométries non-euclidiennes) que RIEMANN explicite ses constructions et qu'il peut ainsi proposer cet élargissement de l'intuition géométrique dont on a parlé ci-dessus.

Ensuite le *Programme d'Erlangen* de Félix KLEIN déjà cité, texte qui, en mettant l'accent sur ce qu'on appelle aujourd'hui les équivalences de structures, introduit le point de vue structural en géométrie ; si la notion d'équivalence de structures permet d'éliminer l'aspect intuitif de la géométrie, les propriétés d'icelle et les méthodes de démonstration se rapportant à la structure sous-jacente via la théorie des groupes, cette même notion, dans la mesure où elle permet de transporter le raisonnement d'un domaine à un autre, permet en retour de transporter l'intuition, prolongeant ainsi le point de vue de RIEMANN.

La géométrisation sous son double aspect, méthode de construction rationnelle de la connaissance d'une part et d'autre part lieu d'élaboration de nouvelles formes d'intuition, s'est développée aujourd'hui dans divers domaines, nous citerons la théorie des équations avec la géométrie algébrique et la géométrie différentielle, la théorie des fonctions avec l'analyse fonctionnelle (l'étude des espaces de fonctions, et je soulignerai ici la puissance métaphorique du mot espace), la physique contemporaine dont nous avons déjà souligné les liens étroits avec la géométrie qui se sont tissés avec RIEMANN et EINSTEIN ; et nous pouvons rappeler l'importance des représentations géométriques dans les statistiques et l'analyse des données.

Notons qu'il s'agit moins de pluridisciplinarité, terme à la mode qui renvoie au paradis perdu du temps où la connaissance était une (du moins le croyait-on !), que de construction de la connaissance à partir des problématiques qui la fondent. La prise en compte de la géométrisation dans l'enseignement implique qu'on en parle à la fois dans l'enseignement des mathématiques et dans l'enseignement des disciplines où la géométrisation apparaît pertinente, et je renvoie à ce que j'ai écrit ci-dessus sur le lien entre les mathématiques et les autres domaines du savoir.

Les trois aspects de la géométrie définis ci-dessus ayant été explicités, la question reste posée : pourquoi enseigner la géométrie ? Des arguments contre l'enseignement de la géométrie existent qui ne peuvent être ignorés.

D'abord l'enseignement de la géométrie est difficile, d'autant plus difficile que la géométrie participe de la connaissance rationnelle et de la connaissance sensible et que sa compréhension se situe au carrefour du sensible et de l'intelligible. Mais c'est peut-être cette distinction entre le sensible et l'intelligible qui est à reconsidérer, cette distinction n'est pas un donné, elle se constitue dans le travail de l'esprit humain pour appréhender le monde et se transforme avec le développement de la connaissance ; si on peut considérer que l'intelligible se construit à partir du sensible (conception empiriste), l'intelligible agit à son tour sur le sensible. La géométrie est l'un des lieux où cette distinction entre le sensible et l'intelligible s'élabore, distinction à la fois nécessaire et ambiguë, et d'une certaine façon c'est la prise en compte de cette nécessité et de cette ambiguïté qui constitue l'un des points essentiels de la pensée rationnelle. On est bien loin de ce *discours rationnel* que prétend être le discours enseignant, discours du *prêt-à-savoir* et du *prêt-à-penser*.

Cette difficulté de la liaison du sensible et du rationnel se résout trop souvent dans une dualité entre deux formes d'enseignement que j'ai appelées ailleurs l'*illusion langagière* et l'*activisme pédagogique* [19].

L'illusion langagière repose sur l'idée que la compréhension est affaire de bon langage. La pédagogie consiste alors à fabriquer ce bon langage, celui par qui la connaissance arrive, et ce furent les délires langagiers des mathématiques modernes dont il n'est pas sûr qu'ils aient disparu de l'enseignement. A l'encontre de cet enseignement pompeusement appelé *théorique* et *abstrait*, on a opposé, au nom d'un retour à la *pratique* et au *concret*, un activisme pédagogique qui réduit l'enseignement à une accumulation d'activités de tous ordres avec le vague espoir que le théorique (puisqu'il en faut) naîtra d'un tel fatras. Ainsi l'enseignement français oscille entre deux pôles : celui d'un discours in-signifiant (le théorique, l'abstrait) et celui d'un bricolage inconsistant (la pratique, le concret) ; où est la connaissance dans ce fatras ? mieux vaut n'en point parler.

Mais si l'enseignement de la géométrie oscille entre ces deux pôles de non-savoir, pourquoi ne prendrait-on pas la décision d'éliminer un tel enseignement. Inutile puisqu'incompréhensible et inefficace, il pourrait se réduire pour la grande majorité des élèves à une vague *culture* (!) géométrique sans prétention, correspondant à cette dégéométrisation du quotidien dont je parlais au début de cet article. Quant à la partie dure de cet enseignement, essentiellement lié à la géométrisation et aux images de synthèse, elle concernerait alors seulement ceux qui auront besoin de cette partie du savoir, et dans ce cas, elle pourrait se réduire, pour les besoins de la formation (comme on dit aujourd'hui) à cet aspect procédurier qui permettrait à ceux qui l'ont étudié une insertion professionnelle convenable (puisqu'il appert aujourd'hui que l'enseignement tend à se confondre avec la seule formation professionnelle).

Enfin ceci aurait l'avantage de débarrasser le système éducatif de tout ce fatras archaïque que constitue la réflexion sur la signification de ce qui est enseigné.

Si l'on se place dans le cadre utilitariste (professionnaliste pourrait-on dire) de l'enseignement d'aujourd'hui, je ne vois aucun argument en faveur d'un enseignement inutile dans sa version archaïque et réservé à une petite élite dans sa version moderniste.

Ce n'est donc point le caractère utilitaire de l'enseignement que l'on peut prendre en compte pour défendre (si défense il faut) l'enseignement de la géométrie, la question se pose à travers ce que l'on pense être les finalités de l'enseignement, et ce sont ces finalités qui sont à définir ou à redéfinir. Problème essentiellement d'ordre éthique, l'enseignement pour quoi faire ? C'est seulement par rapport à ces finalité qu'on peut définir parmi les divers domaines du savoir quels sont ceux qui participent d'une connaissance générale (tel le *lire, écrire, compter* de l'école de la Troisième République) et quels sont ceux qui relèvent de connaissances plus spécialisées. L'analyse épistémologique esquissée ci-dessus de la place de la géométrie dans la connaissance ne peut intervenir qu'en fonction de ces finalités, son rôle est moins de déterminer ce qui participe de la connaissance générale et ce qui relève de connaissances plus spécialisées, que de permettre de répondre à l'un des problèmes les plus urgents de l'enseignement d'aujourd'hui, la réintroduction du sens du savoir enseigné.

Mais ceci suppose une éthique de l'enseignement qui est bien loin de cet enseignement procédurier qui se développe aujourd'hui. Et c'est là que se situe la question : enseigner la géométrie, pourquoi ?

Lille, décembre 1988

Bibliographie

[1] *L'école enseigne-t-elle directement les savoirs ?* Etapes de la Recherche. Bulletin de l'INRP, n° 22, septembre 1988.

[2] Jean-François LYOTARD, *La Condition Post-Moderne*. Les Editions de Minuit, Paris, 1979.

[3] Rudolf BKOUCHE, *Mathématiques modernes et spectacle de la Science*. Bulletin Inter-IREM, n° 13, 1976.

[4] Jean DIEUDONNÉ, *Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire*. Hermann, Paris, 1961.

[5] Jean PIAGET, Roland GARCIA, *Psychogenèse et Histoire des Sciences*. Flammarion, Paris, 1983.

[6] Yves CHEVALLARD, *La Transposition didactique*. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1985.

[7] Rudolf BKOUCHE, *Enseigner la Géométrie*. Bulletin APMEP, n° 355, septembre 1985.

[8] Jules HOÜEL, *Essai critique sur les Principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire*. Gauthier-Villars, Paris, 1867.

[9] Rudolf BKOUCHE, *Appendice historique* in Daniel LEHMANN, Rudolf BKOUCHE, *Initiation à la géométrie*. PUF, Paris, 1988.

[10] Félix KLEIN, *Le programme d'Erlangen* (1872) (traduction française Padé). Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[11] Nicolas BOURBAKI, *L'Architecture des Mathématiques* in *Les grands courants de la Pensée Mathématique*. Blanchard, Paris, 1962.

[12] Rudolf BKOUCHE, *Mathematics and physics, where is the difference ?* ICTMA, Kassel, septembre 1987.

[13] Albert EINSTEIN, *La Géométrie et l'Expérience* (1921) in *Réflexions sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité*. Gauthier-Villars, Paris, 1972.

[14] ARISTOTE, *Les Seconds Analytiques*. (traduction Tricot). Vrin, Paris, 1979.

[15] Rudolf BKOUCHE, Michel SOUFFLET, *Axiomatique, formalisme, théorie*. Bulletin Inter-IREM, n° 23, 1982.

[16] V. OUSPENSKI, *Quelques applications de la mécanique aux mathématiques* in *Quelques applications des Mathématiques* (traduction française). Editions de Moscou, 1975. J. LIOUBITCH, L. CHOR, *Méthode cinématique dans les problèmes de géométrie*. ibid.

[17] Ferdinand GONSETH, *Les fondements des mathématiques*. Blanchard, Paris, 1926/1974.

[18] Bernhard RIEMANN, *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie* (traduction française J. Hoüel) in *Œuvres*. Blanchard, Paris, 1968.

[19] Rudolf BKOUCHE, *Pour une critique de la raison mathématique*. ICME 6, Budapest, 1988 et IREM de Lille ; à paraître dans : BKOUCHE, CHARLOT, ROUCHE, *Faire des mathématiques ; le plaisir du sens*.