

## LES GEOMETRIES NON EUCLIDIENNES

Jean-Luc CHABERT  
Université de Picardie

*Rassemblant mes souvenirs scolaires, je traçai la figure géométrique qui illustre le théorème de Pythagore. Ce n'est pas au hasard que je choisis cette proposition. Je me rappelais avoir lu dans ma jeunesse un livre d'anticipation, où un tel procédé était employé par un vieux savant pour entrer en contact avec les intelligences d'un autre monde. J'en avais même discuté, au cours du voyage, avec le professeur Antelle, qui approuvait cette méthode. Il avait même ajouté, je m'en souvenais fort bien, que les règles d'Euclide, étant complètement fausses, devaient, à cause de cela, être universelles.*

Pierre BOULE, *La planète des singes*, 1963

Pour mieux comprendre l'avènement des géométries non euclidiennes au XIX<sup>ème</sup> siècle, il n'est pas inutile de considérer d'abord les périodes antérieures, remonter au III<sup>ème</sup> siècle avant J.C. nous suffira cependant.

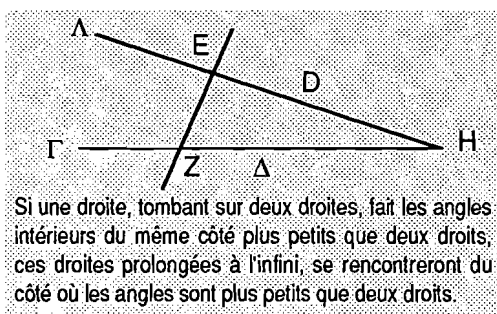
### I - La Préhistoire des Géométries non euclidiennes

Cette préhistoire commence véritablement avec Euclide, car il est non seulement géomètre euclidien, mais aussi, et peut-être à cause de cela, le premier géomètre non euclidien.

#### Euclide

Le Premier Livre des *Eléments* d'Euclide débute par une liste de définitions, de postulats et d'axiomes [10]. Ce sont les pos-

tulats, demandes spécifiques de la géométrie, qui nous intéressent ici, le cinquième tout particulièrement, celui sur lequel nous allons revenir constamment :



Viennent ensuite 48 propositions suivies de leur démonstration selon un rituel souvent évoqué. Ces propositions se succèdent dans un enchaînement remarquable et les démonstrations observent les règles de la déduction d'une façon quasi-rigoureuse. Faire précéder ce déroulement d'un ensemble d'hypothèses et particulièrement de postulats géométriques semble une véri-

LES GEOMETRIES  
NON EUCLIDIENNES

table nouveauté à l'époque. C'est sans doute cette apparition vers 300 ans avec J.-C. d'un corpus géométrique développé selon un mode axiomatique-déductif, cette création d'une théorie quasi-parfaitement constituée qui a permis d'imaginer une vingtaine de siècles plus tard une théorie autre. C'est parce que la géométrie euclidienne existait, du moins était mise en forme, que les géométries non euclidiennes ont pu voir le jour.

Il subsiste en fait des controverses au sujet des postulats et des axiomes qu'Euclide aurait effectivement formulés, car nous ne disposons pas du texte original d'Euclide, nous ne le connaissons que par des copies, manuscrits grecs, latins ou arabes redécouverts à la Renaissance et les multiples éditions des *Eléments* élaborées à partir de ces textes diffèrent entre elles. Certains axiomes et postulats ont pu être rajoutés, en particulier ceux correspondant à certaines demandes formulées dans le cours du texte. Il est alors possible d'imaginer ... que le cinquième postulat n'ait pas été énoncé par Euclide lui-même. Tannery [25] le suggère. Cela ne remet cependant pas en cause nos idées sur les *Eléments* car, même si ce postulat n'avait pas été effectivement formulé, il figurerait quand même de façon implicite dans tout ce Premier Livre. En effet, l'enchaînement des propositions y est tel que les 28 premières n'utilisent pas le Postulat dans leur démonstration, alors qu'au contraire toutes celles qui suivent et ce jusqu'à la fin du Livre, la 31<sup>ème</sup> exceptée, nécessitent le Postulat soit directement, soit par l'intermédiaire d'une proposition l'employant elle-même.

Et c'est bien pourquoi l'on peut dire qu'Euclide est aussi le premier géomètre non euclidien, puisque l'ensemble de ses 28 premières propositions est vrai indépendamment du fait que le cinquième postulat le

soit ou non. Ceci sera d'ailleurs constamment utilisé par tous ceux qui tenteront de prouver le cinquième postulat et aussi par ceux qui au contraire essayeront de construire une géométrie sans ce cinquième postulat.

Avant de quitter Euclide, relevons dans le Premier Livre des *Eléments* les propositions logiquement équivalentes au Postulat, compte-tenu des autres axiomes explicitement ou implicitement formulés, bien qu'Euclide n'y ait jamais évoqué la possibilité d'une telle équivalence. La *proposition XXIX*, pour la démonstration de laquelle le Postulat semble avoir été énoncé, s'en déduit automatiquement par l'absurde :

*Une droite tombant sur deux droites parallèles fait les angles alternes égaux entre eux ... et les angles intérieurs placés du même côté égaux à deux droits.*

La *proposition XXX* :

*Les droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles*

peut s'énoncer aussi (formulation appelée *axiome de Playfair*) :

*Par un point extérieur à une droite passe au plus une parallèle à cette droite*

ou encore, compte tenu de l'existence des parallèles prouvée par la *proposition XXXI* :

*Par un point extérieur à une droite passe une parallèle et une seule à cette droite.*

Dorénavant toutes les assertions que nous soulignerons seront des énoncés "équivalents" au cinquième postulat.

Poursuivons notre étude de la préhistoire avec ceux que l'on appelle :

**Les commentateurs d'Euclide**

Ils sont grecs jusqu'au VI<sup>ème</sup> siècle après

J.-C., arabes du IX<sup>ème</sup> au XIII<sup>ème</sup> siècles essentiellement, puis européens à partir de la Renaissance. Ils ont plus particulièrement discuté et interprété deux points : la théorie des parallèles du Livre I et la théorie des proportions du Livre V. C'est le premier point bien sûr qui nous intéresse ici et le cinquième postulat y occupe une place de choix dans la mesure où tous les commentateurs ont exprimé le désir de le rayer de la liste des postulats. D'une certaine manière ils y sont tous parvenus, mais de façons diverses. Deux méthodes s'offraient à eux : ou bien démontrer le Postulat éventuellement en le remplaçant par un autre jugé plus naturel ou plus facilement acceptable, ou bien changer la définition des parallèles. A ce propos rappelons celle d'Euclide :

*Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.*

Voici quelques-unes des principales tentatives.

### Les commentateurs grecs

L'essentiel de ce que nous savons d'eux nous le tenons de Proclus, chef au V<sup>ème</sup> siècle de l'Ecole néo-platonicienne d'Athènes, auteur entre autres d'un énorme *Commentaire sur le Premier Livre des Éléments d'Euclide* [22].

**Posidonius** (I<sup>er</sup> siècle avant J.-C.) aurait défini les droites parallèles comme des droites coplanaires équidistantes c'est-à-dire des droites situées dans un même plan telles que toutes les perpendiculaires amenées de points de l'une à l'autre soient égales. Deux droites parallèles selon Posidonius le sont aussi selon Euclide, mais la réciproque est-elle vraie ? Euclide montre

bien – en fait montre presque – dans sa *proposition XXXIV* que deux parallèles sont équidistantes, mais il utilise pour cela le cinquième postulat. A vrai dire, les deux définitions coïncident :

*Deux droites parallèles sont équidistantes*

si et seulement si le Postulat est vrai.

Posidonius considère donc une notion de droites parallèles correspondant à une propriété "plus forte" que celle choisie par Euclide et qui semble *a priori* mieux adaptée à la théorie puisqu'elle évite le recours au Postulat. Mais une question se pose : pour sa part, Euclide a bien prouvé l'existence, dans sa théorie, de droites parallèles sans cinquième postulat ; comment peut-on savoir par contre s'il existe effectivement des parallèles au sens de Posidonius sans faire appel à un "principe d'existence" c'est-à-dire à un postulat ? Celle-ci serait assurée si l'on savait que :

*Le lieu des points équidistants d'une droite et situé d'un même côté de cette droite est une droite,*

mais une telle assertion équivaut là encore au Postulat.

**Géminus** (I<sup>er</sup> siècle avant J.-C.) aurait insisté, toujours selon Proclus, sur la distinction entre ces deux notions de parallèles. En effet, certaines lignes courbes situées dans un même plan peuvent se rapprocher perpétuellement sans jamais se couper, comme l'hyperbole et son asymptote. Pourquoi un tel phénomène ne pourrait-il avoir lieu pour deux droites : être asymptotes, se rapprocher indéfiniment et ne pas se couper ? La pertinence de cette question nous apparaît bien aujourd'hui.

**Proclus** (V<sup>ème</sup> siècle après J.-C.) propose lui-même une démonstration (cf. [7]) en prouvant l'énoncé suivant, clairement

**LES GEOMETRIES  
NON EUCLIDIENNES**

équivalent au Postulat :

*Lorsqu'une droite coupe l'une des parallèles, elle coupe l'autre aussi,*

mais pour cela il admet implicitement que :

*La distance entre deux parallèles est bornée,*

ce qui justement, on le verra, revient à supposer le Postulat.

**Aganis** (VI<sup>ème</sup> siècle) utilise une définition semblable à celle de Posidonius et prouve le Postulat, mais en présupposant l'existence de parallèles selon sa terminologie, autrement dit en admettant que :

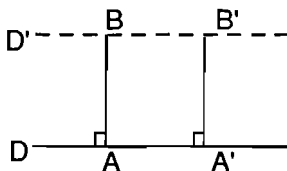
*Par un point extérieur à une droite, il passe toujours une droite équidistante de la première.*

**Les commentateurs arabes**

Les premières traductions des *Eléments* datent du IX<sup>ème</sup> siècle. Parmi les commentateurs ayant apporté une contribution à la théorie des parallèles citons al-Gauhari (IX<sup>ème</sup> siècle), Tabit ibn Qurra (X<sup>ème</sup> siècle), Ibn al-Haytam (X-XI<sup>ème</sup> siècles), al-Hayyam [Omar Khayyam] (XI-XII<sup>ème</sup> siècles) et Nasir ad-Din at-Tusi (XIII<sup>ème</sup> siècle).

Les auteurs cités ici sont tous des mathématiciens écrivant leurs ouvrages scientifiques dans la langue arabe (cf. [14]). Regardons en particulier la façon dont Ibn al-Haytam et Omar Khayyam abordent la question car certaines de leurs idées originales seront reprises en Occident.

**Ibn al Haytam** utilise le mouvement dans son raisonnement. Considérant un segment se déplaçant perpendi-

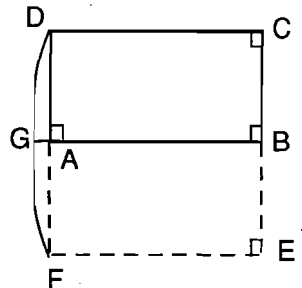


culairement à une droite donnée, il affirme que lorsqu'une des extrémités du segment décrit la droite, l'autre extrémité décrit une autre droite parallèle et même équidistante de la première.

Ayant obtenu ainsi l'existence de parallèles au sens fort, celui de Posidonius ou d'Aganis, il peut démontrer le Postulat. Il considère à cet effet le quadrilatère dont se servira Lambert au XVIII<sup>ème</sup> siècle, un quadrilatère ABCD ayant trois angles droits et pour lequel il s'agit de montrer que le quatrième, l'angle en D, est droit lui aussi.

Ibn al Haytam montre tout d'abord que  $CD = AB$ . En effet, soit E et F les symétriques de C et D relativement à AB ; lorsque le segment EF se meut en restant perpendiculaire à EC, le point E restant sur EC, le segment EF vient sur CD lorsque E est en C et sur BG lorsque E est en B.

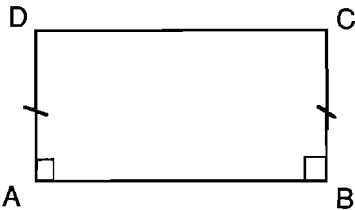
D'après ce qui a été supposé, dans ce mouvement le point F décrit une droite, les points F, G, D sont alignés, mais les points F, A, D aussi ; donc G coïncide avec A et par suite  $CD = AB$ .



Pour montrer que l'angle en D est droit, Ibn al-Haytam raisonne alors par l'absurde en envisageant les deux autres cas : l'angle en D est aigu, l'angle en D est obtus. Cette énumération des cas sera souvent reprise ensuite. La conclusion en résulte assez facilement.

**Omar Khayyam** se propose lui aussi de prouver le Postulat en insérant huit nou-

velles propositions dans les *Eléments*, juste après la *proposition XXVIII*. Utilisant donc les 28 premiers énoncés d'Euclide, récusant par contre l'emploi du mouvement en géométrie tel qu'Ibn al-Haytam le pratique, il introduit pour sa part le quadrilatère dont Saccheri se servira au XVIII<sup>ème</sup> siècle, un quadrilatère ABCD ayant deux angles droits en A et B et les côtés AD et BC égaux.



Les angles en C et D sont égaux, il s'agit de montrer qu'ils sont droits. Raisonant lui aussi par l'absurde afin d'écartier les cas où ces angles seraient aigus ou obtus, il considère un axiome auxiliaire – de type philosophique, dit-il – selon lequel :  
*Deux droites non sécantes ne peuvent pas s'écarter des deux côtés à la fois.*

Malgré un cercle vicieux apparaissant dans le déroulement déductif, la contribution d'Omar Khayyam est remarquable par les idées nouvelles qu'elle apporte.

Nasir ad-Din at-Tusi reprendra et critiquera les travaux de ses prédécesseurs avant de formuler un certain nombre de propositions intéressantes elles aussi. Au XVII<sup>ème</sup> siècle, Wallis exposera une démonstration du Postulat alors attribuée à at-Tusi, vraisemblablement le seul travail arabe connu à cette époque. Retenons de ces commentateurs arabes, d'une par la mise en évidence du lien entre le Postulat et la somme des angles d'un quadrilatère, d'autre part la méthode de démonstration fondée sur une contradiction devant résulter de l'hypothèse

selon laquelle cette somme ne serait pas égale à quatre angles droits.

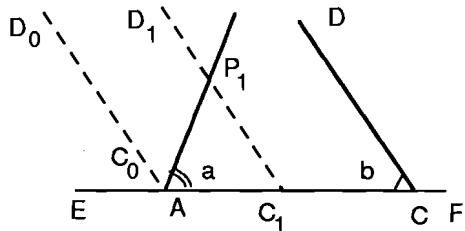
### Les commentateurs européens

Les *Eléments* d'Euclide sont imprimés pour la première fois en latin à Venise en 1482 et les Commentaires de Proclus sont édités à Bâle en 1533. Mais qu'ils aient connu ou non les travaux de leurs prédécesseurs grecs ou arabes, les commentateurs européens n'apportent rien de vraiment nouveau. Relevons une idée originale cependant, celle de Wallis.

**John Wallis (1616 - 1703)** demande d'admettre le principe fondamental suivant :

*Pour une figure quelconque, il en existe toujours une autre de grandeur quelconque qui lui soit semblable.*

Voici l'idée de la démonstration (cf. [8]) :



Les demi-droites AB et CD faisant avec AC des angles a et b tels que  $a + b < 2$  droits, il s'agit de montrer qu'elles sont sécantes. Déplaçons la demi-droite CD de façon que l'angle qu'elle forme avec AC soit constamment égal à b. Lorsque C arrive en A, CD occupe la position  $C_0D_0$  dans l'angle EAB ; il existe donc une position intermédiaire  $C_1D_1$  où la demi-droite coupe AB en un point  $P_1$ . Le postulat de similitude assure l'existence d'un triangle ACP semblable à  $AC_1P_1$  et le point P est alors à la fois sur AB et CD.

## LES GEOMETRIES NON EUCLIDIENNES

Cette idée sera reprise à la fin du XVIII<sup>ème</sup> siècle par Lazare Carnot dans sa *Géométrie de position* : "La théorie des parallèles tient à une notion première à peu près du même ordre de clarté que celle de l'égalité parfaite ou de la superposition, la notion de similitude", reprise aussi par Laplace dans son *Exposition du Système du Monde* : "la proportionnalité est un postulat bien plus naturel que celui d'Euclide", car elle se retrouve dans les lois de l'attraction tout comme dans celles des forces électriques et magnétiques, d'ailleurs "la simplicité des lois de la nature ne nous permet d'observer et de connaître que des rapports".

Saccheri notera qu'en fait Wallis utilise seulement une formulation réduite du principe de similitude :

*Pour tout triangle, il en existe toujours un autre de grandeur arbitraire ayant les mêmes angles,*

et il montrera même que le Postulat résulte de la simple supposition :

*Il existe deux triangles inégaux ayant les mêmes angles.*

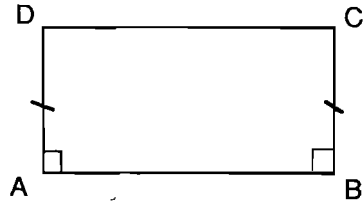
Mais avec Saccheri nous abordons le XVIII<sup>ème</sup> siècle, une période intermédiaire entre la préhistoire et l'histoire des géométries non euclidiennes.

### Les précurseurs

Il s'agit de Saccheri et Lambert, les premiers à avoir formulé des énoncés de géométrie non euclidienne, sans pour autant admettre celle-ci.

**Girolamo Saccheri (1677-1733)** publie l'année de sa mort son chef d'œuvre, *Euclide lavé de toute tache* [24], où il est essentiellement question du Postulat, mais aussi

des rapports et de la difficile définition de leur égalité. Saccheri croit à la vérité du Postulat et il désire le démontrer. A cet effet, il suppose connues et établies les 28 premières propositions d'Euclide et introduit la figure à la base de tout son édifice, le quadrilatère d'Omar Khayyam, quadrilatère ABCD dont les angles en A et B sont droits et les côtés AD et BC sont égaux.



Ses trois premiers énoncés rappellent étonnamment ceux d'Omar Khayyam, mais à la question de la valeur des angles en C et D, il ne répond pas qu'ils sont droits, il introduit explicitement, sous forme de définitions, l'*hypothèse de l'angle droit*, l'*hypothèse de l'angle obtus* et l'*hypothèse de l'angle aigu*, selon que ces angles égaux sont droits, obtus ou aigus.

Saccheri montre alors :

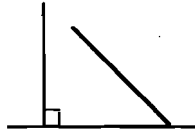
*dès que l'une de ces hypothèses est vraie pour un quadrilatère, elle est vraie pour tous les quadrilatères.*

Bien plus,

*la somme des angles d'un quadrilatère quelconque est égale, supérieure ou inférieure à quatre angles droits, la somme des angles d'un triangle quelconque est égale, supérieure ou inférieure à deux angles droits, un angle inscrit dans un demi-cercle est droit, obtus ou aigu, selon que l'on est dans l'hypothèse de l'angle droit, obtus ou aigu.*

Mais en montrant que :

Une perpendiculaire et une oblique se coupent,

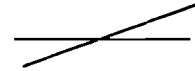


aussi bien dans l'hypothèse de l'angle droit que dans celle de l'angle obtus, Saccheri peut conclure : "l'hypothèse de l'angle obtus est absolument fausse, car elle se détruit elle-même".

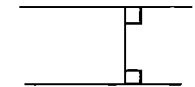
En effet, elle implique le Postulat qui lui-même impose l'angle droit. Ce rejet de l'hypothèse de l'angle obtus (celle de la géométrie sphérique) s'explique par l'usage que fait Saccheri de la proposition XVI d'Euclide, selon laquelle un angle extérieur d'un triangle est plus grand qu'un angle intérieur opposé, car celle-ci se sert du caractère infini des droites (cf. [7]).

La moitié du chemin est donc parcourue, il ne reste qu'à obtenir une autre contradiction, dans l'hypothèse de l'angle aigu cette fois. Saccheri se place désormais dans celle-ci (il existe une perpendiculaire et une oblique qui ne se coupent pas) et les choses deviennent alors très intéressantes. Il établit tout un enchaînement de propositions nouvelles et prouve en particulier que pour deux droites quelconques, il existe trois possibilités :

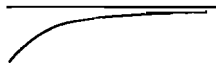
1) elles sont sécantes



2) elles ont une perpendiculaire commune



3) elles sont asymptotes.



Chez Euclide, seuls les deux premiers cas peuvent se réaliser ; ici, un nouveau

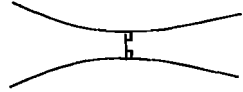
type de non-sécantes apparaît, celui suggéré par Géminus.

Pire, lorsque deux droites ont une perpendiculaire commune, elles divergent des deux côtés à partir de cette perpendiculaire :

l'intuition ne peut plus se fonder sur la figure :



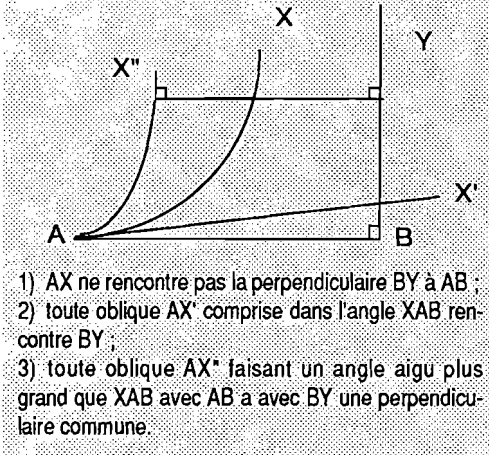
mais sur celle-ci :



et le postulat d'Omar Khayyam tombe.

Ou encore :

Etant donné un segment AB, il existe un angle XAB tel que :



- 1) AX ne rencontre pas la perpendiculaire BY à AB ;
- 2) toute oblique AX' comprise dans l'angle XAB rencontre BY ;
- 3) toute oblique AX'' faisant un angle aigu plus grand que XAB avec AB a avec BY une perpendiculaire commune.

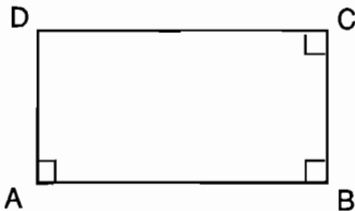
C'est une classification que Lobatchevsky retrouvera un siècle plus tard. Nous avons là de véritables énoncés de géométrie non euclidienne et pourtant dès la proposition suivante, Saccheri affirme : "L'hypothèse de l'angle aigu est absolument fausse car cela répugne à la nature de la ligne droite". Selon lui, les asymptotes AX

LES GEOMETRIES  
NON EUCLIDIENNES

et BY auraient en leur point commun à l'infini une perpendiculaire commune, ce qui ne se peut.

Ainsi, mû par sa conviction, il détruit d'un seul coup tout l'édifice patiemment construit grâce à ses remarquables qualités de logicien, lui permettant de manier aisément la preuve par l'absurde ou le raisonnement sur des figures impossibles.

**Johann Heinrich Lambert (1728-1777)** philosophe et mathématicien, connu pour sa preuve de l'irrationalité de  $\pi$ , fournit une contribution importante à la géométrie avec sa *Théorie der Parallellinien* (écrite à partir de 1766 mais publiée en 1786) [17].



La figure fondamentale y est le quadrilatère à trois angles droits utilisé par Ibn al-Haytam. Il formule lui aussi trois hypothèses selon la valeur du quatrième angle et il obtient assez rapidement une contradiction dans l'hypothèse de l'angle obtus.

Quant à l'hypothèse de l'angle aigu, non seulement la somme  $A + B + C$  des angles d'un triangle ABC y est inférieure à  $180^\circ$ , mais de plus le déficit ou le défaut du triangle :  $180^\circ - (A + B + C)$  est proportionnel à l'aire du triangle.

Lambert note alors la ressemblance de la géométrie plane avec la géométrie sphérique dans l'hypothèse de l'angle obtus et avec la géométrie d'une sphère imaginaire

dans celle de l'angle aigu. Car l'aire d'un triangle tracé sur une sphère de rayon  $r$  est de la forme  $r^2(A + B + C - 180^\circ)$ ; par suite, sur une sphère de *rayon imaginaire*  $ir$ , cette aire prend la forme  $r^2(180 - A - B - C)$ .

Une conséquence chagrine Lambert cependant : si l'hypothèse de l'angle aigu était vraie, il existerait une mesure absolue des longueurs, tout comme il existe une mesure absolue des angles. En effet, on peut toujours associer à un segment un triangle équilatéral ayant ce segment pour côté et par suite faire correspondre au segment la valeur commune des angles de ce triangle équilatéral, valeur mesurée de façon absolue. La formule relative au défaut du triangle montre que lorsque la longueur du segment croît de 0 à l'infini, l'angle correspondant décroît de  $60^\circ$  à  $0^\circ$ .

Cependant Lambert ne prend pas prétexte de cette existence d'une unité de longueur absolue pour écarter l'hypothèse de l'angle aigu. Finalement, il ne conclut pas, bien qu'ayant avancé assez loin dans la théorie. C'est que pour lui et ses contemporains, les axiomes de la géométrie ne sont que le reflet des propriétés de l'espace. La question n'est pas de savoir si le cinquième postulat est vrai ; selon la conception kantienne de l'espace, la conviction existe indépendamment de toute démonstration. La question est plutôt celle de la possibilité de prouver mathématiquement le Postulat, ce que d'Alembert formule ainsi dans l'*Encyclopédie* : "la définition et les propriétés de la ligne droite, ainsi que des lignes parallèles sont l'écueil et pour ainsi dire le scandale des éléments de géométrie".

De nombreux mathématiciens s'essayeront encore à la recherche d'une démonstration à la fin du XVIII<sup>ème</sup> siècle et au début du XIX<sup>ème</sup> siècle, comme Farkas Bolyai, le père de



Janos, Friedrich Wachter, Ferdinand Schweikart, Franz Taurinus et surtout Legendre.

**Adrien Marie Legendre (1752-1833)** a multiplié les tentatives de démonstration dans les différentes éditions de ses *Eléments de Géométrie* de 1794 à 1823 [18], la plupart tournant autour de la valeur de la somme des angles d'un triangle. A chaque fois, il introduit une idée nouvelle et assez ingénieuse, mais fondée sur une hypothèse équivalente au Postulat, comme par exemple :

*Par tout point pris à l'intérieur d'un angle, il passe toujours une droite coupant les deux côtés de l'angle.*

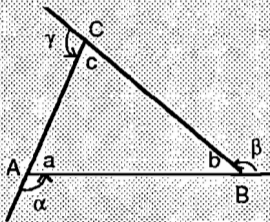
Avant d'aborder l'histoire proprement dite des géométries non euclidiennes, voici à titre d'anecdote la méthode utilisée avec la Tortue de LOGO pour bien faire comprendre aux enfants que la somme des angles d'un triangle vaut  $180^\circ$  [1]. Il s'agit en fait de la démonstration donnée en 1809 par Bernhard Thibaut.

Il est simplement demandé à la Tortue de parcourir les trois côtés du triangle ABC : placée en A et orientée vers B, elle décrit AB, arrivée en B, elle tourne d'un angle  $\beta$ , puis décrit BC, tourne alors d'un angle  $\gamma$ , décrit ensuite CA et tourne enfin d'un angle  $\alpha$  de façon à reprendre sa position initiale.

Au bout du compte, elle a effectué un tour complet sur elle-même, soit  $360^\circ$ , ainsi :

$$\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$$

$$\text{et } a + b + c = 180^\circ.$$



Ce faisant le lecteur mathématicien a bien sûr noté que cette démonstration n'est correcte que si les translations et les rotations considérées sont des opérations indépendantes, c'est-à-dire qu'elles commutent entre elles (en tant qu'opérations effectuées par notre Tortue) !

## II - L'histoire des géométries non euclidiennes

Au cours de la première moitié du XIXème siècle, trois mathématiciens développent à peu près en même temps, mais de façon indépendante, une nouvelle géométrie ou le cinquième postulat est nié.

### La Géométrie non euclidienne de Gauss, Bolyai et Lobatchevsky

Evoquons les travaux de Lobatchevsky car sa théorie se présente à la fois de la façon la plus complète et la plus facile à aborder.

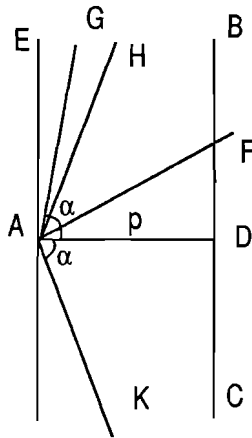
**Nicolas Ivanovitch Lobatchevsky (1793 - 1856)**, professeur à l'Université de Kazan, exprime, dans un essai sur les fondements de la géométrie de 1828-29, l'idée d'une géométrie dans laquelle par un point extérieur à une droite passerait deux parallèles à cette droite. Celle-ci est développée de 1835 à 1838 dans ses *Nouveaux principes de Géométrie*, texte relativement facile à lire mais assez indigeste. Il reprend ce travail de façon plus agréable et concise dans une brochure parue en 1840 à Berlin intitulée *Etudes géométriques sur la Théorie des Parallèles* [19].

Après avoir énoncé quelques propositions élémentaires assez semblables à celles du Premier Livre des Eléments, il y formule son fameux partage des droites passant par un point en deux classes : "toutes les droites tracées par un même point dans un plan peuvent se

LES GEOMETRIES  
NON EUCLIDIENNES

*distribuer par rapport à une droite donnée dans ce plan, en deux classes, savoir : en droites qui coupent la droite donnée, et en droites qui ne la coupent pas. La droite qui forme la limite commune de ces deux classes est dite parallèle à la droite donnée".*

Parmi les droites passant par A, la perpendiculaire AD à BC coupe BC, alors que la perpendiculaire AE à AD ne coupe pas BC. Soit AH la droite limite des deux classes, elle ne coupe pas BC, toute droite AG dans l'angle EAH ne coupe pas BC et toute droite AF dans l'angle HAD coupe BC.



L'angle  $\alpha = \widehat{HAD}$  est appelé *angle de parallélisme*. Lobatchevsky pose  $\alpha = \pi(p)$  pour exprimer la dépendance de l'angle  $\alpha$  relativement à la distance  $p = AD$ . Ce qui du même coup présuppose une certaine homogénéité de l'espace, celle-là même utilisée par Euclide pour effectuer les transports de figures nécessaires afin d'établir les cas d'égalité des triangles.

Ainsi Lobatchevsky commence par ce par quoi Saccheri achève. La situation décrite ici est posée a priori par Lobatchevsky alors qu'il s'agit en fait de celle à laquelle Saccheri a abouti à la suite de longs développements théoriques sous l'hypothèse de l'angle aigu. En effet, la non-sécante limite AH, dite parallèle à BC, n'est autre que le troisième cas évoqué par

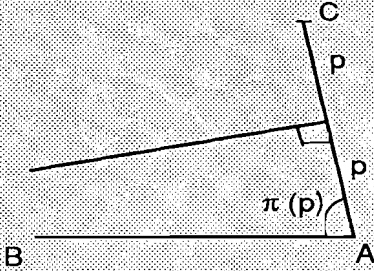
Saccheri, celui de deux droites asymptotes, tandis que les autres non-sécantes telles que AG correspondent au deuxième cas, celui de deux droites admettant une perpendiculaire commune.

La droite AK symétrique de AH par rapport à AD est aussi une non-sécante limite, donc une parallèle à BC. Ainsi, il passe par le point A deux parallèles à BC, chacune relative à un sens, sauf si  $\alpha = \pi(p) = \pi/2$  (cas de la géométrie euclidienne). Cette nouvelle notion de parallèles vérifie encore de bonnes propriétés dont la preuve n'est cependant pas immédiate : "une ligne droite conserve le caractère de parallélisme en tous ses points" ; "deux droites sont toujours réciproquement parallèles" ; "deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles".

Se plaçant désormais dans l'hypothèse :  $\pi(p) < \pi/2$ , Lobatchevsky montre que, étant donné un angle quelconque  $\alpha$ , on peut toujours trouver une distance  $p$  telle que l'on ait  $\pi(p) = \alpha$ . De plus, lorsque  $p$  croît de 0 à l'infini,  $\pi(p)$  décroît de  $\pi/2$  à 0 (ce qui n'est pas sans rappeler la mesure absolue des longueurs de Lambert).

Lobatchevsky introduit alors une notion relativement nouvelle, celle d'horocycle ou courbe-limite. A cet effet, remarquons tout d'abord qu'en géométrie euclidienne les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes, alors que, sans cinquième postulat, les trois médiatrices sont soit concourantes, soit non-sécantes deux à deux et, si deux d'entre elles sont parallèles, elles le sont toutes trois. Un horocycle sera par définition une ligne courbe située dans un plan telle que toutes les médiatrices de ses cordes soient parallèles entre elles.

Pour convaincre ceux qui penseraient qu'une telle courbe n'existe pas, voici un procédé de construction :

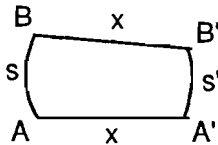


la droite AB étant fixe, si sur la droite AC faisant avec AB l'angle  $\angle CAB = \pi(p)$ , on place le point C de façon que  $AC = 2p$ , alors la médiatrice du segment AC est parallèle à AB par construction. Par suite, lorsque l'angle  $\angle CAB$  varie, les points C ainsi obtenus décrivent un horocycle, puisque les médiatrices des cordes sont toutes parallèles à AB ; on les appelle axes de l'horocycle. Un horocycle peut d'ailleurs être considéré comme un cercle de rayon infiniment grand.

A ce propos indiquons qu'il existe trois types de mouvements dans un plan de Lobatchevsky : la rotation autour d'un point à distance finie 0, la rotation autour d'un point à l'infini dans une direction d et la translation le long d'une droite D ; les courbes invariantes sont respectivement : les cercles de centre O, les horocycles de direction d'axe d et les courbes équidistantes de D.

Une curieuse formule :

Soient AB et A'B' deux arcs d'horocycles de même direction d'axes, limités justement par deux axes AA' et BB'. Posons :



$$AA' = BB' = x,$$

$$\text{alors : } \widehat{A'B'} = \widehat{AB} = e^{-x/k},$$

où k est une constante positive.

Cette formule montre en particulier que les droites parallèles AA' et BB' sont asymptotes.

Lobatchevsky introduit ensuite les horosphères ou surfaces limites obtenues dans la rotation d'un horocycle autour d'un de ses axes. Disons simplement que, si on fait jouer aux horocycles le rôle de droites, très curieusement, ces horosphères vont être de véritables modèles de plans euclidiens, la trigonométrie des triangles sur ces surfaces n'étant autre que la trigonométrie ordinaire. Mais ajoutons surtout qu'à la suite de calculs délicats, utilisant à la fois horosphères et trigonométrie sphérique, Lobatchevsky établit le système des relations entre les angles A, B, C et les côtés a, b, c d'un triangle rectiligne quelconque :

$$\sin A \operatorname{tg} \pi(a) = \sin B \operatorname{tg} \pi(b)$$

$$\cos A \cos \pi(b) \cos \pi(c) + \frac{\sin \pi(b) \sin \pi(c)}{\sin \pi(a)} = 1$$

$$\operatorname{cotg} A \sin C \sin \pi(b) + \cos C = \frac{\cos \pi(b)}{\cos \pi(a)}$$

$$\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \pi(a)}$$

ainsi que les relations qui s'en déduisent par permutations et la formule fondamentale :  $\operatorname{tg} \frac{\pi(x)}{2} = e^{-x/k}$ .

On remarquera que "la géométrie imaginaire se change en la géométrie ordinaire lorsqu'on suppose les côtés d'un triangle rectiligne très petit". En effet, en première

$$\text{approximation : } \sin \pi(x) = 1 - \frac{1}{2} (x/k)^2,$$

$$\cos \pi(x) = x/k \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \pi(x) = \frac{x}{k},$$

d'où les formules usuelles :

$$A + B + C = \pi,$$

$$b \sin A = a \sin B \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Pour Lobatchevsky, les équations précédentes "constituent par elles-mêmes une

LES GEOMETRIES  
NON EUCLIDIENNES

raison suffisante pour considérer comme possible l'hypothèse de la géométrie imaginaire". A ce propos, parallèlement à ses publications à Kazan de 1835 à 1838, il fait paraître dans le journal de Crelle en 1837 un article en français intitulé *Géométrie Imaginaire* dans lequel il part a priori de ces formules trigonométriques : "c'est en rebroussant pour ainsi dire chemin et en partant des équations fondamentales que je tâcherai d'introduire leur adoption dans la géométrie et de mettre hors de doute qu'ils puissent jamais mener à une absurdité, sous quelque rapport que ce soit." A cet effet, il ramène par des transformations ces équations à celles de la trigonométrie sphérique dont il a montré par ailleurs qu'elle "est indépendante de l'une ou l'autre hypothèse sur la somme des angles dans un triangle rectiligne".

En 1885 encore, peut avant sa mort, déjà aveugle mais toujours soucieux de faire comprendre et accepter ses théories, il dicte un exposé complet de son système écrit en russe et en français sous le titre *Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie rigoureuse et générale des parallèles*.

Il nous faut évoquer maintenant les travaux de Bolyai et de Gauss, plus succinctement car ceux de Bolyai sont tout à fait analogues à ceux de Lobatchevsky et ceux de Gauss n'ont pas été rédigés en un texte suivi et complet.

**Janos Bolyai (1802 - 1860).** Son père Farakas Bolyai, géomètre hongrois, ami de Gauss a longtemps cherché à démontrer le cinquième postulat. Indiquons pour mémoire qu'il l'a ramené à l'énoncé suivant :

*Par trois points non alignés passe toujours un cercle*

(autrement dit les médiatrices d'un triangle sont toujours concourantes).

Janos Bolyai, officier hongrois de l'armée autrichienne, mis à la retraite à 31 ans, eu pour occupation favorite la théorie des parallèles malgré les efforts de son père pour l'en dissuader : "Tu ne devrais pas t'engager sur ce chemin pour mettre à l'épreuve les parallèles ; je connais ce chemin jusqu'au bout moi aussi, j'ai mesuré cette nuit sans fond et elle a éteint toute lumière et toute joie dans ma vie".

Jusque vers 1820 environ, il essaie de prouver le Postulat. Puis il se met à construire une "théorie absolue de l'espace" selon la méthode déductive sans décider a priori si le cinquième postulat est vrai ou non. Dès 1823 il est en possession de la formule fondamentale  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \pi(x) = e^{-x/k}$ . Bien que sa théorie ne soit pas encore selon lui tout à fait au point, il peut dire à son père : "J'ai découvert des choses si belles que j'en ai été ébloui ... j'ai tiré du néant un nouvel univers."

Son manuscrit est achevé en 1829, intitulé *Sur la science absolue de l'espace* [3], il est publié en 1832 en appendice d'un gros ouvrage paternel. Après une définition des parallèles assez semblable à celle de Lobatchevsky, il introduit les horocycles et les horosphères - avec une autre terminologie bien sûr - et il obtient les formules de trigonométrie et de géométrie non euclidienne.

[Voici un exemple de résultat remarquable et assez simple en "géométrie absolue" : les sinus des angles d'un triangle sont proportionnels à la circonférence des cercles dont les rayons sont égaux aux côtés opposés ; la circonférence d'un cercle de rayon  $r$  étant de la forme  $2 \pi k \operatorname{sh}(r/k)$ . Lorsque  $k$  tend vers l'infini, on trouve à la

limite la longueur usuelle  $2\pi r$ . Ajoutons enfin que Bolyai résout la quadrature du cercle dans le cas où le cinquième postulat est nié.]

**Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855).** Ce sont essentiellement sa correspondance avec Farkas Bolyai, Olbers, Schumacher, Gerling, Taurinus et Bessel et quelques notes trouvées dans ses papiers qui permettent de reconstituer les directions de recherche de Gauss sur les parallèles [11]. Il aurait réfléchi au sujet dès 1792, à l'âge de 15 ans, et bien sûr aurait tout d'abord essayé de prouver le Postulat. Ainsi, dans une lettre à Bolyai, il écrit en 1799 : "Si on pouvait montrer qu'il existe un triangle d'aire aussi grande que l'on veut alors je pourrais prouver la géométrie toute entière de façon absolument rigoureuse".

Vers 1813, il commence à obtenir les théorèmes fondamentaux d'une nouvelle géométrie "anti-euclidienne" selon Wachter, "astrale" selon Schweikart ou encore "non euclidienne". Bien que convaincu de ce que cette géométrie n'a pas en elle-même de contradictions, alors que "certains résultats ont l'apparence de paradoxes", Gauss ne diffuse pas ses travaux par crainte des "cris de béotiens", il y fait simplement allusion en écrivant à ses amis.

Dans deux courts exposés trouvés dans ses papiers, Gauss donne une définition des parallèles semblables à celle de Bolyai ou de Lobatchevsky, il montre qu'elles ont les mêmes bonnes propriétés, puis il introduit la notion de points correspondants sur deux parallèles, permettant ainsi de retrouver celle d'horocycle comme lieu des points correspondants sur un faisceau de parallèles. Il fournit lui aussi la longueur du cercle dans une lettre à Schumacher de 1831.

Citons aussi les travaux de Franz Adolph

Taurinus qui en 1826 construit un système de géométrie analytique selon l'hypothèse de l'angle aigu : en partant des formules de trigonométrie sphérique, il remplace le rayon  $r$  par un rayon  $ir$  imaginaire et obtient les formules de ce qu'il appelle la géométrie logarithmo-sphérique. Mais pour Taurinus l'intérêt de ses formules reste théorique et il ne pense pas à leur application dans le plan.

### Les géomètres non euclidiens et la nature de l'espace

Dans une lettre à Olbers, Gauss écrit en 1817 :

*"Je suis de plus en plus convaincu que l'on ne peut démontrer par le seul raisonnement la nécessité de la géométrie euclidienne. Il est possible que dans l'avenir nous puissions avoir des idées sur la nature de l'espace qui aujourd'hui nous sont inaccessibles. Ainsi, la géométrie ne peut être mise à côté de l'arithmétique, qui est de nature a priori, mais plutôt à côté de la mécanique."*

Une telle affirmation est clairement en contradiction avec les idées kantienues, selon lesquelles "le concept d'espace n'est en aucun sens d'origine empirique, mais est une nécessité inévitable de la pensée". Gauss n'aurait cependant jamais eu pour objectif de tester la géométrie euclidienne au cours de ses nombreuses mesures de géodésie, contrairement à un mythe largement répandu [5].

Le point de vue de Lobatchevsky est proche de celui de Gauss. L'échec des tentatives de démonstration le conduit assez tôt à penser que ce que l'on veut prouver n'est pas dans les données et qu'il est nécessaire d'avoir recours à l'expérimentation. Voici

LES GEOMETRIES  
NON EUCLIDIENNES

d'ailleurs celle qu'il propose (cf. [4]) pour avoir une idée de la valeur de la constante  $k$  intervenant dans la formule :  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \pi(x) = e^{-x/k}$  (la géométrie euclidienne correspondant à  $\pi(x) = \frac{\pi}{2}$  c'est-à-dire  $k$  infini).

On considère un triangle ABC donc le côté BC = a est égal au diamètre de l'orbite terrestre et dont le sommet A est une étoile fixe de direction perpendiculaire à BC. Soit  $2p$  la parallaxe maximale de l'étoile A.

Alors

$$\pi(a) > \widehat{BCA} = \frac{\pi}{2} - 2p$$

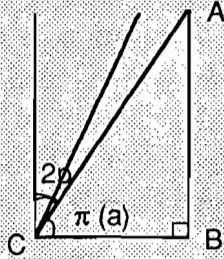
soit

$$\operatorname{tg} \frac{\pi(a)}{2} > \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - p \right)$$

c'est-à-dire

$$e^{-a/k} > \frac{1 - \operatorname{tg} p}{1 + \operatorname{tg} p}$$

$$\text{d'où } \frac{a}{k} < \operatorname{tg} 2p.$$



De la parallaxe de Sirius égale à  $1''24$ , Lobatchevsky déduit que  $a/k < 0,000\ 006$ . Ainsi, on ne connaît pas  $k$ , mais on sait qu'il est très grand relativement au diamètre de l'orbite terrestre. On pourrait recommencer avec des étoiles de parallaxe inférieure. D'ailleurs, si la géométrie euclidienne est vraie,  $k$  est infiniment grand et il doit exister des étoiles dont la parallaxe est infiniment petite.

**Le cheminement des idées**

On peut s'étonner que, à peu près en même temps et de façon indépendante, trois hommes découvrent cette nouvelle géométrie que personne n'avait eu l'idée d'imaginer au cours de plus de vingt siècles de tentatives infructueuses. Bien sûr la multiplication des échecs a pu conduire à cette nécessité et Sac-

cheri et Lambert, quoique convaincus de la vérité du Postulat, avaient déjà largement ouvert la voie de l'hypothèse de l'angle aigu. D'ailleurs, la question des parallèles fut, à la charnière des XVIII<sup>ème</sup> et XIX<sup>ème</sup> siècles, l'objet de publications nombreuses. Gauss enfin se situe au centre d'un foyer scientifique dont, dans une certaine mesure, Bolyai et Lobatchevsky ont subi l'influence.

Certes les travaux de Saccheri et Lambert furent méconnus, mais Klügel, qui analyse en 1763 à Göttingen les essais de démonstration antérieurs, a certainement contribué à la diffusion des idées de nos deux précurseurs. En outre les diverses preuves de Legendre, dont nous avons peu parlé, remarquables par l'originalité des méthodes et la clarté de l'exposition, ont joué un rôle non négligeable, surtout pour Lobatchevsky, qui les avait étudiées de près. Ajoutons enfin que Bartel, le professeur de Lobatchevsky à Kazan, et Farkas Bolyai, le père de Janos, furent tous deux des amis de Gauss.

Les travaux de Bolyai et Lobatchevsky n'ont pas reçu de leurs contemporains l'attention qu'ils méritaient. Est-ce dû aux idées dominantes de l'époque, aux conceptions kantienne ? La ville de Kazan et la Hongrie étaient-elles trop éloignées des grands centres scientifiques ? Des questions de langage ont-elles joué ? Lobatchevsky a pourtant pris soin de publier aussi en allemand et en français. En tout cas, en 1833 encore, paraît l'ensemble des démonstrations du Postulat dues à Legendre [18].

C'est à partir des années 1860 que les théories de Bolyai et de Lobatchevsky ont commencé à être largement diffusées. En France, Jules Houël traduit les *Etudes géométriques sur la théorie des parallèles* avec en appendice des extraits de la correspon-

dance de Gauss et Schumacher [19], apportant ainsi la caution de Gauss aux travaux de Lobatchevsky, puis il traduit la *Science absolue de l'Espace* de Janos Bolyai. En Italie, c'est Battaglini qui introduit la géométrie non euclidienne.

Mais cette nouvelle géométrie va connaître des développements bien plus considérables encore. Celle-ci sera en effet resituée dans des cadres très généraux, qu'on ne pouvait imaginer alors, à la suite d'une part de la conception riemannienne de l'espace, d'autre part de la classification kleinienne des géométries.

### La Conception Riemannienne de l'espace

**Bernhard Riemann (1826 - 1866)** effectue un saut conceptuel considérable, un saut dans l'abstraction permettant une prise de distance par rapport aux intuitions a priori de l'espace. Dans son mémoire d'admission à la faculté de philosophie de Göttingen, *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*, présenté en 1854, publié en 1867 [23], il considère d'emblée des "grandeurs de dimension multiple" c'est-à-dire des variétés de dimension  $n$  quelconque, dont les points dépendent continûment de  $n$  paramètres ( $x_1, \dots, x_n$ ). Il se propose d'étudier les rapports métriques dans une telle variété. En géométrie euclidienne il faut pour mesurer, avoir un moyen de transporter la grandeur unité. Ici, Riemann considère les choses localement, il fait appel à la géométrie différentielle et définit la métrique en introduisant en chaque point de la variété un élément linéaire  $ds$  de la forme :

$$ds^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_{ij} dx_i dx_j$$

où les  $g_{ij}$  sont des fonctions des coordonnées  $x_1, \dots, x_n$  ; le cas de l'espace euclidien correspondant à  $ds^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} dx_i^2$ .

Afin de pouvoir nous représenter ces objets abstraits, limitons-nous aux variétés de dimension 2, c'est-à-dire aux surfaces, sujet que Gauss avait justement exploré en 1827 dans ses *Recherches générales sur les Surfaces courbes* [12]. C'est d'ailleurs ce travail qui a très certainement inspiré Riemann. En effet Gauss y étudie la géométrie intrinsèque des surfaces, autrement dit la géométrie qui fait abstraction des propriétés de l'espace dans lequel la surface est plongée. Intuitivement il s'agit de la géométrie que pourrait connaître un être à deux dimensions vivant sur la surface et n'ayant aucune idée de ce qui se passe ailleurs.

Les points de la surface dépendant des deux paramètres  $p$  et  $q$ , le carré de l'élément linéaire  $ds$  au point correspondant à  $p$  et  $q$  est de la forme :

$$ds^2 = E dp^2 + 2 F dp dq + G dq^2$$

où  $E$ ,  $F$  et  $G$  désignent des fonctions de  $p$  et de  $q$ . Gauss montre que la seule connaissance de  $ds$  c'est-à-dire des fonctions  $E$ ,  $F$ ,  $G$  suffit pour retrouver les propriétés métriques de la surface, les longueurs, les angles, la courbure. Ainsi, la courbure d'une surface en un point que l'on définit a priori à partir de son plongement dans l'espace et de ses sections par des plans est en fait une propriété intrinsèque. On peut donc inversement se donner a priori des fonctions  $E$ ,  $F$ ,  $G$  et définir une géométrie sur la surface indépendamment de l'existence d'un plongement.

C'est ce à quoi Riemann procède dans un cadre très général avec ses variétés. Il s'intéresse en particulier aux variétés dans lesquelles "les figures peuvent se mouvoir sans

LES GEOMETRIES  
NON EUCLIDIENNES

subir d'extension", ce sont les variétés de courbure constante, l'élément linéaire y a la forme

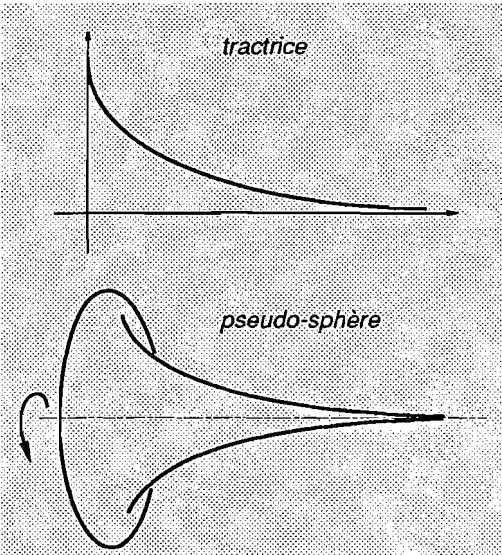
$$ds = \frac{\sqrt{\sum dx_i^2}}{1 + \frac{K}{4} \sum x_i^2}$$

Mais restons au niveau des surfaces plus aisément visualisables. Les surfaces de courbure nulle ou surfaces développables peuvent être appliquées sur un plan - du moins localement - dans une déformation sans extension, sans changement des longueurs tout comme on peut déformer une feuille de papier flexible mais non extensible. Les surfaces de courbure K constante et positive peuvent être appliquées sur une sphère de rayon  $1/\sqrt{K}$ . Le cas des surfaces de courbure K constante et négative est plus délicat. Beltrami montre en 1868 [2] que de telles surfaces peuvent être appliquées sur une pseudosphère. Il s'agit de la surface de révolution engendrée par une tractrice dans une rotation autour de son asymptote. (Une tractrice est une courbe telle que la portion de tangente comprise entre le point de

contact et l'asymptote soit constante).

Ainsi, sphères et pseudosphères, surfaces de l'espace euclidien, sont des exemples de plans ou plutôt de morceaux de plans où la géométrie de l'angle obtus (pour la sphère) et celle de l'angle aigu (pour la pseudosphère) sont réalisées du moins de façon locale et à condition d'effectuer les bonnes traductions terminologiques, en particulier de remplacer "ligne droite" par "courbe géodésique".

Mais sphères et pseudosphères ne sont, nous l'avons dit, que des modèles locaux. La pseudosphère possède toute une ligne de points singuliers. Hilbert montrera d'ailleurs en 1901 qu'il n'existe pas de surface analytique régulière sur laquelle la géométrie de Lobatchevsky soit réalisée. Quant à la sphère, deux droites, c'est-à-dire deux grands cercles s'y rencontrent toujours en deux points ; pour éviter cette situation il faut identifier les points antipodaux, la surface alors obtenue n'a qu'une face tout comme la bande de Moëbius.



Rappelons la formule suivante établie par Gauss :

$$\iint_{ABC} K ds = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi$$

où K désigne la courbure en chaque point (éventuellement variable) de la surface et où l'intégrale double est calculée dans le triangle ABC, le rôle des droites étant joué par les géodésiques (lignes de plus courtes distances entre chacun de leurs points).

Ainsi, lorsque K est constant :

$$K \times \text{aire de ABC} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi$$

$$\text{d'où } \begin{cases} K = 0 & : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \\ K = \frac{1}{r^2} & : \text{aire ABC} = r^2 (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi) \\ K = -\frac{1}{r^2} & : \text{aire ABC} = r^2 (\pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C}) \end{cases}$$

(cf. [20])



A propos de la géométrie et de l'espace, citons Riemann lorsqu'il demande de "faire la distinction entre l'illimité et l'infini", car la "propriété de l'espace d'être illimité possède une plus grande certitude empirique qu'aucune autre donnée externe de l'expérience. Mais l'infinité de l'espace n'en est en aucune manière la conséquence ; au contraire, si l'on suppose les corps indépendants du lieu et qu'ainsi l'on attribue à l'espace une mesure de courbure constante, l'espace serait nécessairement fini, dès que cette mesure de courbure aurait une valeur positive si petite qu'elle fût". La notion d'illimité est dite aujourd'hui de nature topologique, celle d'infini étant de nature métrique.

Ainsi, en n'imposant plus aux droites d'être infinies, mais seulement illimitées, la proposition XVI d'Euclide n'est plus valable et l'hypothèse de l'angle obtus n'a plus à être rejetée. Les espaces envisagés par Riemann, susceptibles d'une diversité infinie, apparaissent comme extrêmement généraux. Dans le cas très particulier d'une courbure constante – le cas des géométries d'Euclide et de Lobatchevsky puisqu'on y déplace les figures – trois possibilités subsistent encore (cf. tableau ci-dessous).

Nous venons d'envisager le versant diffé-

rentiel des extensions, dans lequel est adopté un point de vue local. Revenons à un abord global avec des méthodes algébriques.

## La Classification Kleinienne des Géométries

De façon contemporaine à la géométrie non euclidienne, une autre géométrie prend son essor : la géométrie projective.

### La géométrie projective

Issue de l'étude de la perspective par les peintres et les architectes de la Renaissance, inventée par Desargues au XVII<sup>ème</sup> siècle, éclipsée par l'efficacité de la Géométrie Analytique de Descartes et le Calcul Infinitésimal de Newton et Leibniz, la Géométrie Projective connaît ses heures de gloire au XIX<sup>ème</sup> siècle après la mise au point de la Géométrie Descriptive par Monge et surtout le *Traité des Propriétés Projectives des Figures* de Poncelet en 1822.

Bien que peu mystérieuse, elle ne posait pas les mêmes problèmes métaphysiques que la géométrie de Lobatchevsky, dans la mesure où son objet n'était pas la description de l'espace lui-même mais une

courbure	géométrie	hypothèse	exemple	nb. de parallèles
nulle	d'Euclide	angle droit	plan euclidien	1
négative	de Lobatchevsky	angle aigu	sphère	(selon terminologie) 2 ou une infinité
positive	dite de Riemann (par habitude)	angle obtus	pseudosphère	0

**LES GEOMETRIES  
NON EUCLIDIENNES**

représentation conventionnelle de celui-ci. L'étonnant en elle résidait plutôt dans la puissance de ses méthodes permettant d'obtenir sans peine des énoncés de géométrie classique dès lors que ceux-ci exprimaient des propriétés de nature projective c'est-à-dire conservées par projection ou encore invariantes par toute transformation conservant l'alignement des points.

Une propriété à la fois remarquable et fondamentale des transformations projectives, celles qui préservent l'alignement des points, est la conservation du birapport de quatre points alignés ainsi que celle du birapport de quatre droites concourantes. Elles modifient par contre les distances et les angles. En 1859 cependant Arthur Cayley parvient à introduire de façon relativement naturelle des métriques dans les espaces projectifs (cf. cadre ci-dessous).

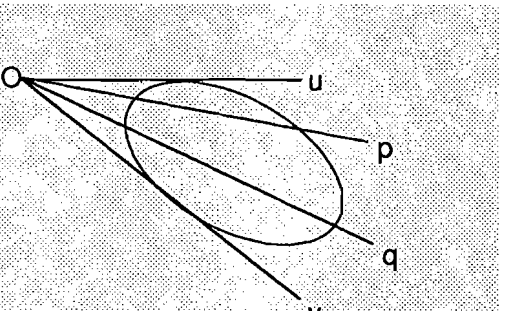
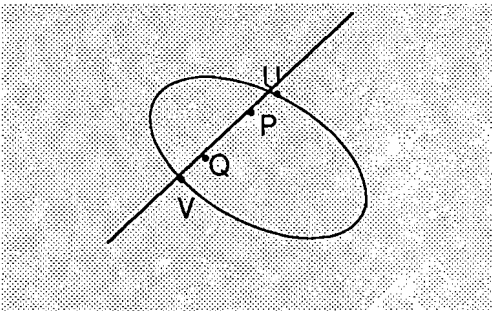
**Géométrie projective et géométrie non euclidienne**

Cette géométrie projective n'est pas sans lien avec la question des parallèles, puisque des droites parallèles n'y sont autres que des droites concourantes à l'infini. Mais aucun rapport n'était alors mis en évidence entre géométries projective et non euclidienne.

En 1871, Félix Klein [15] découvre une telle relation lorsque ces espaces projectifs sont munis d'une métrique de Cayley. Dans le plan projectif, il n'existe que deux types de coniques non dégénérées, les coniques réelles et les coniques imaginaires dont les équations "homogènes" peuvent être ramenées respectivement aux formes :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

Quand l'absolu est une conique réelle, l'en-



Limitons-nous pour simplifier au plan projectif. Considérons dans ce plan une conique non dégénérée et, à tout couple de points P et Q, associons le nombre :

$$PQ = k \left| \ln (P, Q, U, V) \right|,$$

où U et V sont les points d'intersection réels ou imaginaires de la droite PQ avec la conique, où (P, Q, U, V) désigne le birapport des quatre points et où k est une constante.

La quantité ainsi définie possède les propriétés d'une distance et les transformations projectives du plan

qui conserve cette métrique ne sont autres que celles laissant la conique invariante, cette dernière est appelée l'absolu du plan. Quant à l'angle en O de deux droites p et q, il peut être défini par :

$$k \left| \ln (p, q, u, v) \right|,$$

où u et v sont les tangentes à la conique issues du point O, où (p, q, u, v) désigne le birapport des quatre droites et où k est une constante.

Pour traiter le cas de l'espace, il suffit de remplacer la conique par une quadrique.

semble des points situés à l'intérieur de la conique possède les propriétés géométriques du plan de Lobatchevsky, que Klein appelle géométrie *hyperbolique*. Quand l'absolu est imaginaire les points du plan projectif vérifient la géométrie "de Riemann" ou *elliptique*. Enfin quand l'absolu de réel devient imaginaire en passant par un état dégénéré ( $x^2 + y^2 = 0$ ), on retrouve la géométrie euclidienne ou *parabolique*.

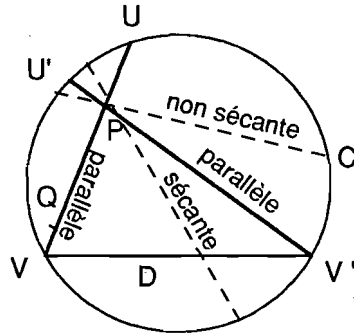
Ainsi, les géométries euclidiennes ou non ne sont que des cas particuliers de la géométrie projective. De façon plus générale, Klein poursuit cette comparaison entre les diverses géométries possibles et dans son fameux Programme d'Erlangen de 1872 [16] il montre comment chaque géométrie est caractérisée par un groupe, le groupe des transformations qui conservent certaines propriétés caractéristiques de la géométrie et comment à l'emboîtement éventuel des groupes les uns dans les autres correspond une hiérarchie des géométries. Dans le cas présent, le groupe projectif, groupe des transformations du plan projectif, contient trois types de sous-groupes formés des transformations conservant trois types de coniques, auxquels correspondent nos trois types de géométries.

Ce faisant, Klein met en évidence un véritable modèle du plan de Lobatchevsky. C'est avec la description de ce modèle que la géométrie hyperbolique obtiendra pleinement droit de cité et assurance de non contradiction aux yeux de la communauté. Reprenons ce modèle avec un cercle C pour absolu.

### Le modèle de Klein-Beltrami du plan hyperbolique

Les points du plan hyperbolique sont les points situés à l'intérieur du cercle C et

les droites sont les cordes de C (extrémités non comprises). Il existe une infinité de non sécantes à D passant par P et les cordes limites UV et U'V' sont les deux *parallèles* à D passant par P (*attention, les points U, V, U', V' sur C n'appartiennent pas au plan hyperbolique*).



Dans ce plan, la *distance* entre les points P et Q de la corde UV est définie par le logarithme du birapport des 4 points P, Q, U, V :

$$\ln \left\{ \frac{PU}{PV} : \frac{QU}{QV} \right\}.$$

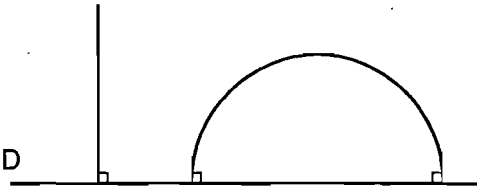
Plus on se rapproche du bord du cercle C, plus les longueurs sont "dilatées", les points du cercle C sont "à l'infini".

Ce modèle du plan hyperbolique est remarquable en ce qu'il utilise pour sa description le plan euclidien et ses seules propriétés. Ainsi, si la géométrie euclidienne est exempte de contradiction, il en est automatiquement de même de la géométrie de Lobatchevsky. Inversement nous savons déjà que les horosphères jouent dans l'espace de Lobatchevsky le rôle de modèles de plans euclidiens et par suite si la géométrie hyperbolique est exempte de contradiction, il en est assurément de même de la géométrie euclidienne.

**LÈS GEOMETRIES  
NON EUCLIDIENNES**

Ajoutons à propos de cette dernière que, dans ses *Fondements de la Géométrie* [13] de 1899, Hilbert met clairement et précisément en évidence les différents axiomes utilisés de façon à pouvoir en formaliser la théorie. Et la question de la non-contradiction se ramène alors aisément grâce à la représentation cartésienne de l'espace à celle de la non-contradiction des seuls axiomes portant sur les nombres réels.

**Le modèle de Poincaré**



Poincaré propose un autre modèle de plan hyperbolique [21]. Les "points" de ce modèle sont les points d'un demi-plan

ouvert limité par une droite D et les "droites" sont les demi-droites et les demi-cercles de ce demi-plan orthogonaux à D. [Le demi-plan généralement considéré est  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ , les "droites" sont alors les demi-droites perpendiculaires à l'axe des x et les demi-cercles centrés sur cet axe].

Les transformations isométriques sont les inversions par rapport à un cercle centré sur D et les composées de ces inversions [ dans  $\mathbb{C}$  il s'agit des transformations homographiques  $z \rightarrow (az + b)/(cz + d)$  où a, b, c, d sont des nombres réels tels que  $ad - bc \neq 0$  ].

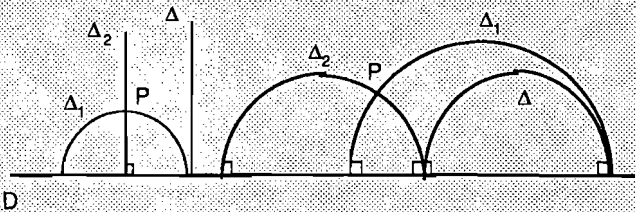
Ainsi, deux "segments" sont égaux si on peut passer de l'un à l'autre par une telle transformation. L'angle de deux "droites" est l'angle usuel (l'inversion conserve les angles).

La distance entre deux points P et Q est donnée par l'expression :

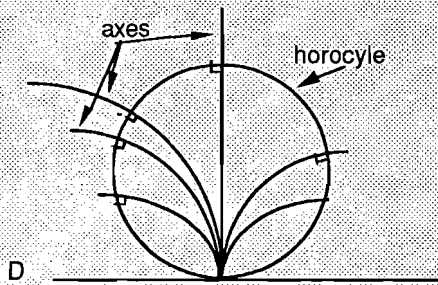
$$PQ = k \left| \ln \left( \frac{P, Q, U, V}{P, Q, V, U} \right) \right|$$

où U et V désignent les points d'intersection

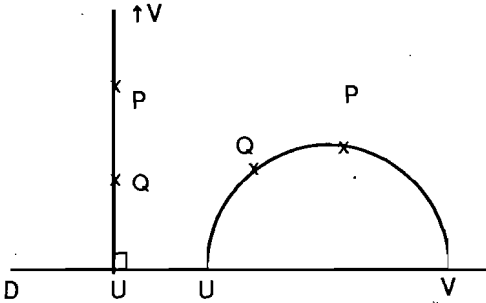
Par un point P extérieur à une "droite" Δ passent deux parallèles à Δ : les demi-cercles Δ<sub>1</sub> et Δ<sub>2</sub> centrés sur D, passant par P et tangents à Δ (Les points de D n'appartiennent pas au modèle).



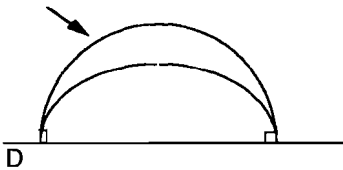
Dans ce modèle un "cercle" est un cercle ne coupant pas D, une courbe équidistante de la "droite" Δ est l'arc d'un cercle non centré sur D mais coupant D aux mêmes points que Δ et un horocycle est un cercle tangent à D, ses axes étant les "droites" coupant D au point de contact.



avec D de la "droite" passant par P et Q.



courbe équidistante de  $\Delta$



Un grand avantage de ce modèle est que l'on y dispose de formules simples pour décrire les isométries et on peut y retrouver la relation  $\pi(x) = 2 \text{ Arc tg } e^{-x/k}$  ainsi que les formules trigonométriques.

Situé dans un plan euclidien et utilisant les droites et les cercles euclidiens, il n'est pas cependant plongé dans un tel plan car sa métrique n'est pas induite par la métrique euclidienne comme dans les études gaussiennes sur les surfaces, mais par l'expression de l'élément linéaire  $ds$  [ $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ ] selon le point de vue riemannien. S'il n'est pas plongé, par contre ce modèle est global, c'est la description d'un plan de Lobatchevsky dans sa totalité.

### Epilogue : à propos de la géométrie de notre espace

A la question de savoir qu'elle est de toutes ces géométries rencontrées celle qui permet le mieux de décrire le monde physique, la simple logique mathématique, nous l'avons vu, ne permet pas de choisir, la réponse dépend d'abord du problème étudié, la géométrie euclidienne restant souvent performante. Indiquons cependant comment la géométrie riemannienne, la plus générale de toutes *a priori*, s'introduit

L'application au demi-plan

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(s) > 0\}$$

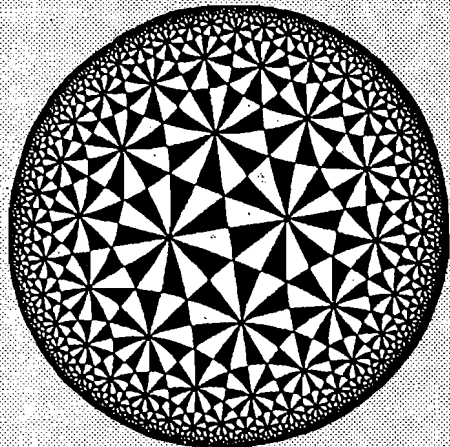
de la transformation

$$z \rightarrow (z - i) / (z + i)$$

fournit un nouveau modèle dont les "points" sont les points situés à l'intérieur du cercle unité et les "droites" sont les arcs de cercles orthogonaux au cercle unité ainsi que les diamètres de ce dernier.

Les pavages hyperboliques de ce disque sont souvent utilisés à des fins esthétiques.

ci-contre : pavage hyperbolique



naturellement dans la physique d'Einstein, celle de la relativité générale, ce que Riemann lui-même pressent dans une certaine mesure lorsqu'il écrit dans ses hypothèses : "Si cette indépendance entre les corps et le lieu n'existe pas..."

Puisque dans le vide tous les corps tombent de la même façon, il y a équivalence entre masse inerte et masse pesante, équivalence entre forces d'inertie et forces de gravitation, "dans un champ de gravitation, les processus physiques s'effectuent exactement comme dans un référentiel accéléré". C'est à partir de ce principe d'équivalence qu'Einstein élabore sa théorie de la gravitation.

Or, les forces de gravitation peuvent être absorbées localement par la donnée d'un univers non euclidien, un corps pesant courbant l'univers dans son voisinage. Car compte tenu de l'équivalence précédente, si on écrit la loi du mouvement d'un corps de façon qu'elle soit indépendante du choix des variables de lieu et de temps, une grandeur invariante apparaît :  $ds^2 = \sum g_{ij} dx_i dx_j$ , où les  $g_{ij}$ , fonctions de  $x_1, \dots, x_4$  servent à la représentation du champ de gravitation [9]. On reconnaît là le  $ds^2$  de la géométrie riemannienne. Dans cet univers courbe, un corps n'est soumis à aucune force, il décrit simplement les lignes les plus droites de cet univers, à savoir les géodésiques.

Cette théorie ne pouvait avoir une réelle portée que si des conclusions non newtonniennes vérifiées par l'expérience en étaient déduites. Ainsi, Einstein montre en 1915 comment elle explique l'avance séculaire du périhélie de Mercure, et les résultats théoriques coïncident assez bien avec les données de l'observation. Plus intéressante est la déviation des rayons lumineux dans un champ de gravitation, car il s'agit là d'un effet nouveau prédit par la théorie et non connu à l'époque. Or les déviations, observées par Eddington au voisinage du Soleil au cours de l'éclipse de 1919, permettant de voir des étoiles en principes cachées par le Soleil, ne sont pas en contradiction avec les calculs théoriques.

Concluons par une question d'actualité, celle de la valeur de la densité de l'univers. Si cette densité  $\rho$  est inférieure à une densité critique  $\rho_c$ , la courbure de l'univers est négative, sa géométrie est "de type lobatchevskien" (c'est l'espace-temps à quatre dimensions qui est courbe), il n'y aura pas de re-contraction dans la théorie cosmologique du Big-Bang ; si  $\rho = \rho_c$ , la géométrie est "de type euclidien", il n'y aura toujours pas de re-contraction, la vitesse d'éloignement des galaxies tend asymptotiquement vers zéro ; enfin, si  $\rho > \rho_c$ , la courbure est positive, l'univers est fini, il y aura re-contraction, ce sera le *Big Crunch* ... Notre histoire s'arrête là.

## Bibliographie

- [1] H. Abelson et A. di Sessa, *Turtle Geometry*, MIT Press, 1980.  
 [2] E. Beltrami, *Essai d'interprétation de la géométrie non euclidienne*, 1868 ; trad. fr. J. Houël, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. t. 6, 1869. 251-288.  
 [3] J. Bolyai, *Sur la science absolue de l'espace*, 1832, trad. fr. J. Houël, Mém. de la

- Soc. des Sciences Phys. et Nat. de Bordeaux, t. 5, 1867, 189-248.  
 [4] R. Bonola, *La geometrica non euclidea*, Bologne 1906 ; trad. anglaise 1912, rééd. Dover, New York, 1955.  
 [5] E. Breitengerger, *Gauss's Geodesy and the Axioms of Parallels*, Archives for History of Exact Sciences, t. 31, n° 3, 1984, 273-289.

- [6] J.-L. Chabert, *La préhistoire des géométries non euclidiennes*, IREM de Picardie, 1986, 129 pp.
- [7] J.-L. Chabert, *Compte rendu d'un atelier sur la théorie des parallèles*, Groupe Histoire et Epistémologie des Mathématiques, Bulletin de liaison n° 4, 1987.
- [8] J.-L. Chabert et J. Neuberg, *Wallis, le cinquième postulat et la similitude*, IREM de Picardie, 1986, 35pp.
- [9] A. Einstein, *Sur le problème de la relativité*, Scientia, 1914 ; trad. fr. Scientia, t. 114, 1979.
- [10] Euclide, *Les œuvres d'Euclide* traduites littéralement par F. Peyrard, 1819 ; rééd. Blanchard, 1966.
- [11] C.-F. Gauss, *Werke*, t. 8., Göttingen, 1900.
- [12] C.-F. Gauss, *Recherches générales sur les surfaces courbes*, 1827 ; trad. fr., rééd. Blanchard, 1966.
- [13] D. Hilbert, *Les fondements de la géométrie*, 1899; trad. fr., Dunod, 1971.
- [14] K. Jaouiche, *La théorie des parallèles en pays d'Islam*, Vrin, Paris, 1986.
- [15] F. Klein, *Sur la géométrie dite non euclidienne*, Bulletin des Sciences Mathématiques, t. 2, 1871, 341-351.
- [16] F. Klein, *Le Programme d'Erlangen*, 1872 ; trad. fr., Gauthier-Villars, 1974.
- [17] J.-H. Lambert, *Theorie der Parallellinien*, dans F. Engel et P. Stäckel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, Teubner, Leipzig, 1895.
- [18] A.-M. Legendre, *Réflexions sur les différentes manières de démontrer la théorie des parallèles*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France, vol. XII, 1833, 367-410.
- [19] N.-I. Lobatchevsky, *Etudes géométriques sur la théorie des parallèles*, Berlin, 1840 ; trad. fr. J. Houël, 1866 ; rééd. Monom, 1980.
- [20] J.-P. Petit, *Le Géométricon*, collection les aventures d'Anselme Lanturlu, Belin, Paris, 1982.
- [21] H. Poincaré, *Théorie des groupes fuchsien*, Acta mathematica, t. 1, 1-62.
- [22] Proclus de Lycie, *Les Commentaires sur le Premier Livre des Éléments d'Euclide*, trad. Paul Ver Eecke, Desclée de Brouwer et cie, Bruges, 1948 ; rééd. Blanchard, 1959.
- [23] B. Riemann, *Sur les Hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie*, 1854 ; trad. fr. J. Houël, 1870 ; rééd. dans les œuvres mathématiques de Riemann, Blanchard, 1968.
- [24] G. Saccheri, *Euclides ab omni naevo vindicatus*, Milan, 1733 ; rééd. et tr. anglaise Halsted, Chicago, 1920 ; rééd. American Mathematical Society, 1986.
- [25] P. Tannery, *Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide*, Bulletin des Sciences Mathématiques (2), t. 8, 1884, 162-175.

Pour en savoir plus :

— Sur les preuves mathématiques :

N. EFIMOV, *Géométrie supérieure*, 1978 ; trad. fr. éd. Mir, Moscou, 1981.

— Sur les détails de la préhistoire des géométries non euclidiennes :

J.-C. Pont, *L'aventure des parallèles*, éd. Lang, Berne, 1986.

— Sur l'histoire des idées et les prolongements scientifiques relatifs aux géométries non euclidiennes :

J. Gray, *Ideas of space euclidean, non-euclidean, and relativistic*. Clarendon Press, Oxford, 1979.

M.-J. Greenberg, *Euclidean and non euclidean geometries. Development and history*, Freeman, San Francisco, 1980.

B.A. Rosenfeld. *A history of non-euclidean geometry, Evolution of the concept of geometric space*, Springer ; New-York, 1988.