
RESOLUTION DE PROBLEMES EN SECOND CYCLE

R. NOIRFALISE et J. PORTE
Irem de Clermont-Ferrand

Dans la démarche de résolution de problèmes, une première difficulté rencontrée par les élèves en second cycle, se trouve souvent d'emblée dès la lecture de l'énoncé :

« Comment démarrer ?

Quelles connaissances peut-on utiliser ? »

sont souvent des questions posées par les élèves. Cette difficulté est certes légitime s'il s'agit d'un problème que l'on peut qualifier d'ouvert : en revanche, il est toute une gamme d'exercices d'application, de problèmes courants que l'on retrouve dans les épreuves du baccalauréat, et qui ont un statut dans le contexte scolaire tel qu'il conviendrait que les élèves puissent mobiliser rapidement une procédure de résolution.

Peut-on apprendre aux élèves à « initialiser une procédure de résolution d'un problème ? ». Telle est la question à laquelle nous allons tenter d'apporter quelques fragments de réponse :

— en nous référant à des éléments théoriques sur les processus d'initialisation d'un problème, empruntés à la psychologie cognitive, que nous avons appliqués au champ mathématique.

— en donnant quelques exemples de pratiques pédagogiques effectivement réalisées avec les élèves d'une classe de Terminale C.

I. Une référence théorique

1. Des savoirs déclaratifs aux savoirs procéduraux

Les connaissances n'ont pas toutes le même statut : il est classique aujourd'hui, en psychologie cognitive, de distinguer savoirs déclaratifs et savoirs procéduraux. Cette distinction s'opère selon les fonctions de ces connaissances :

— les premières, les déclaratives, servent à énoncer des propriétés ou des états d'objets, de concepts ou de relation entre concepts ; elles ont essentiellement une fonction de description. Nous trouvons dans cette catégorie, en mathématiques, les définitions, les théorèmes, les propriétés, c'est-à-dire la plupart des énoncés mis en relief par la typographie dans les manuels.

— les secondes, les procédurales, correspondent à des règles d'utilisation et nous le verrons, sont à ce titre primordiales en résolution de problèmes : elles sont beaucoup moins formulées explicitement que les premières et ainsi font partie souvent d'un registre de connaissances plus implicites. Nous allons tenter d'éclairer et de justifier ces propos à l'aide d'un exemple simple relatif au théorème de Pythagore.

2. Savoir procédural lié au théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore est une connaissance déclarative : il énonce une propriété commune à tous les triangles rectangles :

« Si un triangle ABC est rectangle en A , alors on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ».

La fonction de cet énoncé est de déclarer une propriété propre aux triangles rectangles, c'est cette fonction qui justifie l'appellation « connaissance ou savoir déclaratif ».

On peut demander aux élèves d'appliquer cette connaissance dans un exercice comme le suivant :

Exercice n° 1 :

« EFG est un triangle rectangle en E ;
 $EF = 6$ et $EG = 8$. Calculer FG »

Il s'agit là « d'instancier » le théorème, c'est-à-dire de particulariser les éléments variables apparaissant dans l'énoncé, ici l'appellation des sommets et les valeurs numériques des côtés. On voit que dans cet exercice, l'appel au théorème de Pythagore est très direct car dans le texte, on nous dit que l'on a affaire à un triangle rectangle et qu'il convient de calculer la longueur d'un côté. En revanche, nous allons le voir, cet appel peut-être moins immédiat dans d'autres formes d'exercices, pour un élève novice relativement à l'utilisation du théorème de Pythagore.

Considérons l'exercice d'application suivant qui est tout à fait classique :

Exercice n° 2 :

Calculer la longueur
de la diagonale d'un
carré de côté a .



On peut alors se demander quels sont les indices dans le texte de l'énoncé qui conduisent à penser au théorème de Pythagore. Ce ne sont pas les prémisses du théorème « Si ABC est un triangle rectangle », ce n'est pas non plus la référence à un triangle rectangle puisque ceux-ci n'apparaissent pas dans le texte. Or l'expert, ici le professeur de mathématiques par exemple, va penser tout de suite au théorème ; il va voir quasi-instantanément un triangle rectangle adéquat dans la figure. Cette vision et cette association entre l'énoncé et le théorème sont automatisées et ainsi souvent inconscientes et très rapides (quasi-simultanées avec la lecture du texte). Cet automatisme de l'expert cache un type de savoir que l'on peut qualifier de procédural : il correspond à une fonction d'utilisation du théorème de Pythagore qui pourrait, en première approximation se formuler ainsi :

Si on doit calculer la longueur d'un segment (but à atteindre) et si de plus (ensemble de conditions) celui-ci peut être considéré comme le côté d'un triangle rectangle dont on connaît les mesures des deux autres côtés, alors on peut appliquer le théorème de Pythagore.

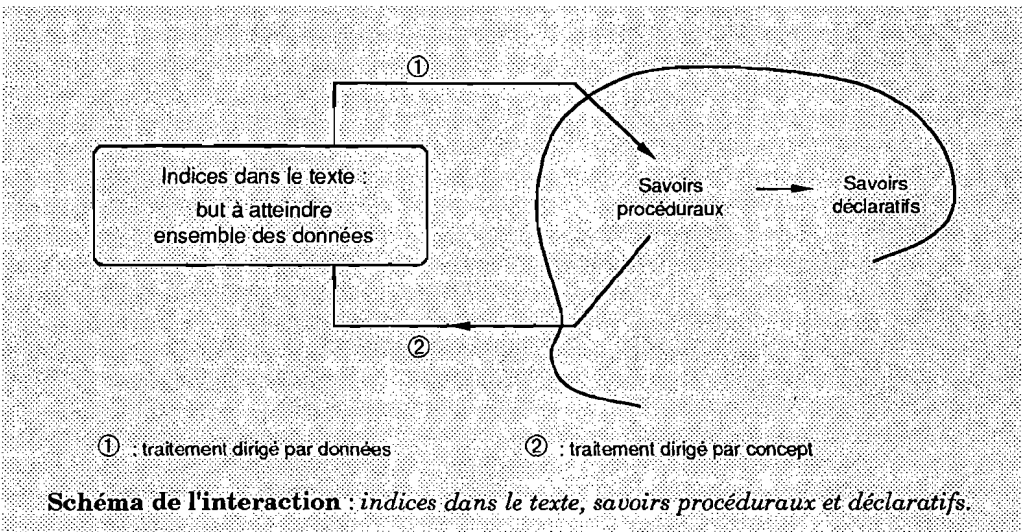
Ce type de savoir présente deux caractéristiques que n'a pas un savoir déclaratif :

- il énonce une règle d'action (qui peut-être mentale),
- il décrit une action POSSIBLE et non pas quelque chose de certain comme les énoncés déclaratifs.

Pour nous, c'est donc ce type de savoir qui serait mobilisé au moment de la lecture faite par l'expert. Il y aurait ainsi une interaction entre la perception d'un ensemble d'indices contenus dans le texte (but à atteindre et ensemble de données) et la mobilisation de savoirs procéduraux stockés en mémoire. Certains indices mobi-

lisent des savoirs procéduraux et la mobilisation de ces derniers conduit alors à rechercher la présence d'autres indices. Ainsi c'est peut-être l'indice « avoir à calculer une longueur » et la présence d'indices numériques dans un texte qui peut faire penser à Pythagore et conduire à rechercher la présence d'un triangle rectangle adéquat. Il est certes difficile d'avoir accès précisément aux mécanismes de cette interaction car elle correspond à un processus mental ultra-rapide, non accessible en conscience, et peut-être peut-elle revêtir des aspects combinatoires très divers.

On peut schématiser ce processus interactif comme suit (cf. fig. ci-dessous) : il y aurait une *démarche ascendante* ① (traitement dirigé par données), partant d'indices dans le texte et mobilisant des savoirs procéduraux et une *démarche descendante* ② (traitement dirigé par concept) partant de savoirs procéduraux et guidant la recherche de la présence d'autres indices dans le texte.



Ce schéma fait apparaître ainsi que les savoirs procéduraux seraient un intermédiaire entre la présence d'indices dans le texte et la mobilisation du théorème (connaissance déclarative).

On doit bien sûr, pour représenter plus précisément ce qui peut se passer relativement à l'utilisation du théorème de Pythagore, complexifier le savoir procédural décrit ci-dessus. En particulier, dans d'autres problèmes, le sujet peut abandonner (à tort ou à raison) l'idée d'utilisation du théorème de Pythagore. C'est ainsi que pour formaliser cette possibilité d'abandon et généraliser le savoir procédural décrit ci-dessus on peut donner la forme du schéma représenté ci-dessous.

Si les savoirs procéduraux apparaissent comme important dans les processus d'initialisation, on est alors amené à s'interroger sur les conditions d'apprentissage de tels savoirs.

3. Apprentissage des savoirs procéduraux

Le schéma théorique décrit ci-dessus implique plusieurs propositions :

- un élève peut savoir son cours, c'est-à-dire les énoncés déclaratifs et ne pas savoir démarrer un problème s'il n'a pas acquis aussi des savoirs procéduraux.
- pour démarrer un problème, il n'y a pas de « méthode générale » indépendante de savoirs spécifiques.
- L'aide méthodologique véritable que peut apporter un enseignant, pour apprendre aux élèves à démarrer un problème, ne se situe pas au moment de la lecture de l'énoncé mais doit se situer en amont, puisqu'il importe que l'élève ait acquis des savoirs procéduraux.

En d'autres termes, le schéma théorique décrit ci-dessus, s'il est valide, conduit à se demander, comment on peut aider les

SI (but à atteindre) : « Calcul de la longueur d'un segment »

ALORS SI (*conditions*) : ce segment peut être considéré comme un côté d'un triangle rectangle (hypoténuse ou côté de l'angle droit)

SINON aller à une autre procédure

ALORS SI (*conditions*) : on connaît les mesures des deux autres côtés du triangle

ALORS appliquer Pythagore

SINON « peut-on trouver une procédure permettant de calculer les données manquantes ... »

SI OUI appliquer Pythagore

SI NON abandon de la procédure

Savoir procédural lié au théorème de Pythagore n° 2

élèves à apprendre des savoirs procéduraux.

Nous ne pensons pas qu'il faille ajouter à la liste des connaissances déclaratives une liste de savoirs procéduraux qui se voudrait exhaustive : cette dernière serait sûrement d'une longueur affolante, indigeste et par là-même inutilisable.

Voici quelques pistes reprises plus concrètement plus loin et qui nous semblent permettre un travail d'apprentissage de savoirs procéduraux.

- *passage d'un savoir déclaratif à un savoir procédural* : on peut, avec la résolution d'exercices d'application, attirer l'attention de l'élève sur l'usage, l'utilité d'un théorème. C'est ainsi que, dès la première application du théorème de Pythagore (Exercice n° 1), on peut déjà se demander « à quoi sert ce théorème ? » et on peut ainsi faire apparaître qu'il peut être utile pour calculer des longueurs.

- *classification d'exercices d'application* : on peut inviter l'élève, ou un groupe d'élèves, à classer « par ressemblance mathématique » divers exercices d'application. Il s'agit là de faire que les élèves associent une classe d'exercices à une procédure de résolution. Dans le même esprit, partant d'un seul exercice, on peut demander aux élèves ce qui est à retenir de cet exercice et qui pourrait être utile pour un exercice « identique » qui serait donné le lendemain par le professeur dans une interrogation.

C'est ainsi qu'en examinant les premiers exercices d'application sur le barycentre de deux points proposés dans un manuel Hachette de classe de Seconde, on voit par comparaison apparaître surtout le

savoir procédural suivant :

« Si l'on a une combinaison vectorielle :

$$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB},$$

alors, si de plus $\alpha + \beta \neq 0$ on peut penser au barycentre et utiliser la formule de Leibniz :

$$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} = (\alpha + \beta) \vec{MG} ».$$

Cette dernière apparaît alors comme un outil puissant pour certains types de problèmes impliquant des simplifications vectorielles (exemple : recherche d'un ensemble de points satisfaisant une relation vectorielle).

On peut remarquer, en revanche, que ce savoir procédural n'apparaît pas ou presque pas dans d'autres manuels : ainsi les objectifs d'utilisation d'un même objet mathématique ne sont pas nécessairement les mêmes d'un auteur à l'autre.

Les savoirs procéduraux, en conclusion, apparaissent comme des savoirs sur les conditions d'utilisation de connaissances déclaratives. On peut comprendre ainsi en quoi ils sont utiles dans le processus d'initialisation d'une résolution de problèmes. Présentons maintenant quelques exemples concrets de pratiques développées dans une classe de Terminale C.

II - Quelques travaux faits en terminale C à propos des savoirs déclaratifs et procéduraux

Depuis plusieurs années, l'un d'entre nous s'est intéressé dans sa pratique en

Terminale C, à la méthodologie du problème. Lire, comprendre et appliquer les consignes d'un exercice est une tâche d'analyse et de synthèse qui comporte bien des obstacles. A vrai dire, ce que renvoyaient les élèves c'est que ce travail est facile quand on sait le faire... Vérité de La Palice peu efficace pour un élève en panne d'idées. Cette proposition conférant aux connaissances différents statuts était donc très éclairante dans ce contexte.

Dans la présentation progressive qui en est faite aux élèves, nous adoptons dans un premier temps des appellations simplifiées. Pour les savoirs déclaratifs, c'est le « de quoi s'agit-il » incluant ce qu'on sait de par la situation, les définitions, les théorèmes, les propriétés en lien avec l'énoncé. En ce qui concerne les savoirs procéduraux, c'est le « comment faire ». Les premiers sont souvent statiques et résistent, les seconds sont dynamiques et engagent dans l'action.

1. Les liens entre les savoirs déclaratifs et les savoirs procéduraux

Dans la dialectique particulière à la recherche de problèmes c'est le chemin (allers et retours) entre savoirs déclaratifs et procéduraux en lien avec l'énoncé, ses données et ses questions, qu'il nous paraît essentiel de faire percevoir. Nous mettons donc en évidence ces liens :

a) dans le cours et le travail afférent

Comme il a été dit plus haut à propos du théorème de Pythagore, il nous semble important de signaler aux élèves les propriétés et les théorèmes comme leviers dans tel ou tel type de situation de recherche de problèmes. Ceci se fait dans

l'exposé du cours et dans les exercices d'application ou de présentation. Inversement, dans des points-synthèses, nous faisons en classe de temps en temps des fiches traitant de « si on me demande... alors je peux penser à... » telle ou telle démarche. Par exemple :

— comment procéder pour démontrer qu'on a une bijection (cf. annexe 1),

— comment procéder pour trouver le sens de variation d'une suite.

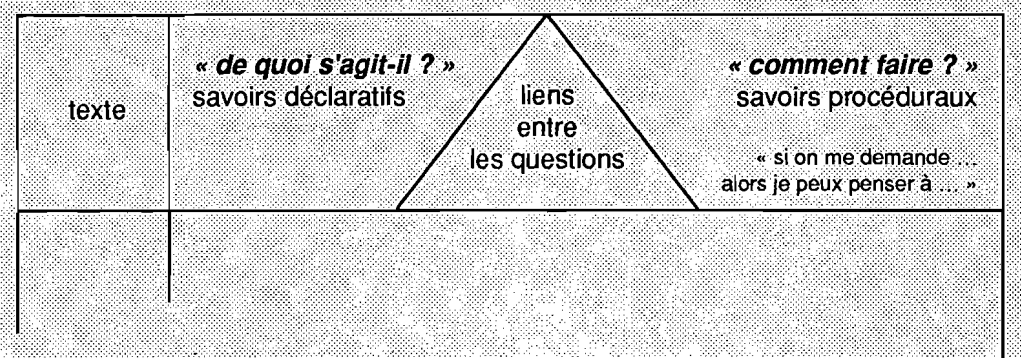
Nous invitons les élèves à faire eux-mêmes ce type de fiche sur les sujets qui les intéressent ou qui les interrogent.

Ces questions traversent bien entendu plusieurs chapitres du cours et il nous paraît souhaitable, au fur et à mesure de l'avancement du travail et du programme, de procéder à une élaboration progressive pour répondre à ces deux questions « à quoi sert tel théorème ? » et « comment procéder dans telle situation ? »

b) dans la recherche d'exercices et de problèmes

L'exercice ou le problème étant écrits dans la partie gauche de la feuille, nous proposons à nos élèves d'inscrire dans la moitié droite savoirs déclaratifs, savoirs procéduraux et les liens entre les questions, comme sur le schéma ci-après.

En début d'année ce travail sur texte est proposé assez systématiquement et élaboré en classe. Les élèves sont expressément invités à l'essayer dans la recherche d'exercices et de problèmes à la maison, puis, progressivement, en devoir en temps limité en classe. Cependant nous ne deman-



donc pas trace de ce travail et nous laissons dans la pratique une grande liberté à l'élève de s'en servir systématiquement ou non. Cette façon d'aborder un texte est souvent affinée et individualisée lors d'entretiens méthodologiques que nous avons avec les élèves à leur demande. On pourra voir en annexe 2 des fiches élaborées en classe.

c) Dans les corrigés de problèmes ou d'exercices

A propos des questions difficiles et/ou des questions qui ont fait l'objet de la part des élèves de plusieurs procédures de résolution, nous soulignons les liens entre les indices apparaissant dans le texte et les procédures plus ou moins intéressantes et plus ou moins efficaces en la circonstance. Le corrigé de problème devient alors l'occasion d'élaborer les fiches évoquées au 1. a).

2. Le repérage des savoirs déclaratifs et procéduraux

Très vite il nous est apparu que si ce modèle d'action clarifiait beaucoup la recherche de problèmes, le non-expert qu'est l'élève éprouvait des difficultés à comprendre en profondeur la différence entre le

quoi et le comment et était loin de percevoir clairement le comment et tous les comment relatifs à une question. Nous touchons là à l'organisation des savoirs et à l'apprentissage du cours, un apprentissage dynamique, source et moteur de la recherche. Nous avons donc cherché à affiner la perception, en situation, c'est-à-dire dans la résolution d'exercices et de problèmes. Voici quelques activités à ce sujet. Il y en a mille autres que le lecteur pourra inventer.

a) Repérage des savoirs déclaratifs utilisés lors d'un contrôle sous forme de questionnaire à réponses ouvertes courtes

Les élèves sont amenés à lister les savoirs déclaratifs nécessaires pour le travail et à les indiquer avec précision pour chaque question (cf. Annexe 3). Ceci est clair, ne présente pas de difficulté sauf pour les élèves qui n'apprennent pas le cours ou, au contraire, quelques bons élèves pour qui tout est si bien intégré qu'ils se sentent freinés quand on leur demande les références.

Cependant la question se pose tout de même quant au niveau de précision deman-

dé. Faut-il, par exemple, citer toutes les règles de calcul ? Pour cela notre réponse est qu'il faut tenir compte du niveau de la classe. Par exemple, on citera les règles de calcul dans R en classe de Quatrième mais plus en Terminale... L'évidence dans ce cas n'en est plus une dans d'autres : quel degré de précision demander dans l'expression des calculs de limites ? L'accord est loin d'être fait entre les experts. Dans la classe, à un niveau donné, le professeur et les élèves fixeront le niveau de précision des références.

b) Regroupement d'exercices qui se ressemblent

L'exemple donné en annexe 4 concerne les savoirs procéduraux relatifs aux logarithmes népériens. Une liste d'exercices est donnée à étudier dans un temps court, de manière à ce qu'on ne puisse pas les résoudre complètement. La recherche est d'abord individuelle, elle peut se faire à la maison. Ensuite il y a confrontation par groupes de quatre élèves et élaboration des regroupements et des raisons des regroupements. On peut observer qu'un certain nombre d'élèves ne vont pas directement au classement par procédures de résolution mais s'arrêtent souvent à la « surface » des exercices. Par exemple, on regroupe (4) (8) (9) (10) (16) (17) parce que ce sont des équations ou inéquations sans se préoccuper du procédé à employer pour les résoudre. C'est dans la confrontation qu'apparaît le classement par procédures. Nous avons pu observer dans ce travail des situations de conflits socio-cognitifs propres à faire percevoir en profondeur les diverses méthodes de résolution des exercices.

c) Construction d'exercices de même type

En prolongement du travail précédent il est intéressant de faire énoncer, indivi-

duellement ou en groupes, des exercices de même type qu'un exercice donné. La reconnaissance et l'énonciation d'exercices où intervient un même savoir procédural sont pour nous des moyens complémentaires d'accès à ce savoir.

Ce travail d'énonciation est assez facile quand l'exercice de départ est simple; il est plus délicat quand la situation est complexe, ce qui est le cas le plus courant. On voit en action chez certains élèves la fascination des indices de surface, ce que nous appellerons le sens aigu de l'essentiel..., et la difficulté de repérer les indices pertinents. Il y a là beaucoup de travail à faire dans le quotidien.

d) Ce qu'on peut garder d'un exercice et qui est transposable

Une autre façon de saisir les savoirs procéduraux est de tenter de relever dans un exercice les méthodes qu'on pourra réemployer dans d'autres situations. On voit que ceci est très en lien avec les § 2. b) et c).

3. Ce qu'en pensent les élèves

Dans un travail que nous faisons auparavant sur « Lire, comprendre et appliquer les consignes d'un exercice » beaucoup d'élèves demandaient une aide plus précise et restaient assez démunis pour démarrer un problème. Sans que cette nouvelle façon de faire soit magique et réponde à toutes nos questions, nous pouvons dire que le voile se lève un peu et que des prises de conscience se font, sans doute plus nombreuses et plus efficaces dans la pratique. C'est essentiellement en classe, en entretien méthodologique individuel et dans un travail sur l'apprentissage des leçons que les élèves ont pu s'exprimer à ce sujet. A

partir du moment où l'énoncé est compris dans ses termes, l'évaluation de la méthode par les élèves est globalement positive. Certains butent toujours sur la compréhension du texte et/ou la compréhension des savoirs déclaratifs qui, bien sûr, n'est jamais parfaite. On peut noter dans les déclarations des élèves une modification de l'apprentissage des leçons où ils s'entraînent à faire des liens entre les savoirs, à chercher des champs d'application des théorèmes, à faire des fiches procédurales (voir annexe 5).

Certains élèves redemandent des précisions et du travail dans ce domaine ; pour d'autres il se fait tout seul. Ces derniers cependant disent y trouver leur compte dans les recherches difficiles pour eux.

Levier dynamique pour les uns, quelquefois frein pour les intuitifs, cette méthode de travail nous apparaît riche, intéressante dans notre pratique et susceptible d'être améliorée. Nous la proposons donc à toute la classe mais avec beaucoup de souplesse dans l'application individuelle.

Conclusion

Pour réussir en mathématiques, il ne suffit pas d'apprendre définitions, théo-

rèmes... Il convient aussi, pensons-nous, d'apprendre les conditions d'utilisation de ces énoncés mathématiques. On a ainsi, mais de façon interne à notre discipline, des réponses à la question « A quoi ça sert ? » Le repérage des savoirs procéduraux semble être ainsi une piste intéressante permettant de préciser ce que l'élève doit apprendre pour savoir démarrer les problèmes les plus courants. Nous avons présenté des exemples dans une classe de Terminale C, de stratégies possibles pour faciliter l'apprentissage de tels savoirs. Il s'agit, croyons-nous, que l'élève puisse en résolvant un exercice, anticiper sur les problèmes analogues à venir : dégager la structure d'une résolution de problèmes et ses conditions d'utilisation pour pouvoir la réinvestir dans un avenir proche.

Peut-être avons-nous là quelques éléments permettant de préciser ce qu'est l'intuition mathématique : ce ne serait pas une qualité intrinsèque indépendante des connaissances du sujet mais plutôt le signe d'apprentissage de savoirs très spécifiques comme les savoirs procéduraux... encore que nous avons bien conscience que nous ne réglons pas par ce type d'approche la question du sens qu'un élève peut donner à un objet mathématique.

Bibliographie

- Bauthier-Castaing et Robert : *Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques*, in Rev. Fr. de Pédagogie, n° 84, p. 13-20, 5,(1988).
- Brissiaud R. et Escarabajal M.C. : *Formulation des énoncés : classique vs récit*, in Rev. Fr. de Pédagogie, n° 74, p. 47-52, (1986).
- Caillot M. : *La résolution de problèmes de physique ; représentations et stratégies*, in Psychologie Française, n° 29, 3/4, p. 257-262, (1984).
- Chi, Feltovich et Glaser : *Categorization and representation of physics problems by experts and novices*, in Cognitive Science, n° 5, p. 121-152 (1981).
- De Corte et Verschaffel : *Using retelling data to study young children's*, in Sloboda J.A. et Rogers D. - Cognitive processus in mathematics - Oxford science publications.
- George C. : *Interactions entre les connaissances déclaratives et procédurales*, in Peruchet P. : Les automatismes cognitifs, Ed. Mardaga (1988).
- Hoc J.M. : a) *Le rôle organisateur de la planification dans la résolution de problèmes*, in *Journal de Psychologie*, n° 4, (1982),
b) *Psychologie cognitive de la planification*, PUG (1987).
- Kintsch et Greeno : *Understanding and solving word arithmetic problems*, in *Psychologie review*, Vol. 92 n° 1 p. 109-129 (1985).
- Larkin et all : *Experts and novices performances in solving problems physics*, SCIENCE- Vol. 208-20, p. 1335-1342 (1980).
- Lindsay et Norman : *Traitement de l'information et comportement humain*, Ed. Etudes Vivantes (1980).
- Nguyen-Xuan et Grumbach : *Modèles informatiques de processus d'acquisition*, in Caverni et all : *Psychologie cognitive, modèles et méthodes*, PUG (1988) p.55-86.
- Robert, Rogalsky, Samurcay : *Enseigner des méthodes*, in Cahiers de didactique des maths, n° 38, (1987).
- Silver E.A. : *Recall of mathematical problem information ; solving related problems*, *Journal of research in mathematics education* (1981), Vol. 12, n° 3, p. 54-64.

ANNEXE 1

Comment faire pour démontrer qu'on a une bijection ? Savoirs procéduraux liés aux bijections (niveau TC)

1°) Vérifier qu'il s'agit d'une application.

2°) S'il s'agit d'une application en GÉOMÉTRIE PLANE

$$T: \begin{cases} M \mapsto M' \\ E \rightarrow E' \end{cases}$$

On note, s'il y a lieu, (x, y) les coordonnées de M et z son affixe ;
de même (x', y') et z' pour M' .

et **SI** elle est exprimée analytiquement : $(x', y') = F(x, y)$

ALORS on cherche (x, y) en fonction de (x', y')

si il y a une solution unique,

ALORS T est bijective.

et **SI** elle est exprimée sous forme complexe : $z' = f(z)$

ALORS on cherche z en fonction de z'

si il y a une solution unique,

ALORS c'est une bijection.

et **SI** l'application est composée de bijections

ALORS c'est une bijection.

et **SINON**, pour tout M' de E' , on cherche à construire M de E , *antécédent de M'*

si il y a une solution unique,

ALORS T est bijective.

[S'il s'agit de bijection en GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE seule la forme complexe est exclue.]

3°) S'il s'agit d'une APPLICATION NUMÉRIQUE D'UNE VARIABLE RÉELLE

$$f: \begin{cases} x \mapsto f(x) \\ I \rightarrow f(I) \end{cases} \quad \text{définie sur un intervalle } I$$

et **SI** elle est *continue* sur I

ALORS on cherche ses *variations*,

et **SI** elle est *strictement monotone* sur I

ALORS c'est une bijection de I sur $f(I)$.

N.B.- Les autres cas se ramènent en général à l'un des cas précités.

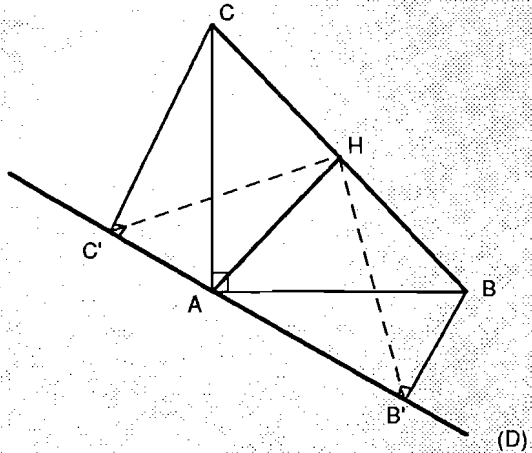
La fiche ci-dessus est une fiche pratique de travail où, pour la clarté du schéma, apparaissent des abus de langage. Dans le travail, quand il s'agit de résoudre les équations, nous réintroduisons les quantificateurs :

« Pour tout z' , affixe de M' de E' , cherchons z , affixe de M de E , tel que : $z' = f(z) \dots$ »

ANNEXE 2

Exercice 21 - page 122 - tome 2 - TRANSMATHS TC-E

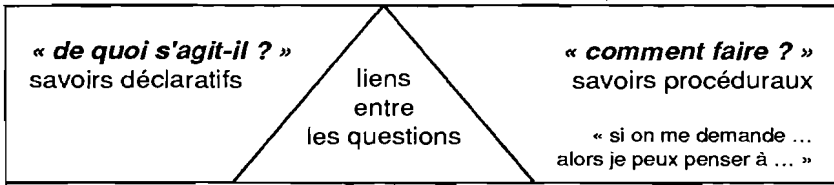
- (1) ABC est un triangle rectangle isocèle de sommet A et H est le milieu de [BC].
- (2) Une droite D passant par A ne coupe pas le segment [BC].
- (3) On note B' et C' les projetés orthogonaux de B et C sur D.



1°) Montrer que le triangle B'HC' est rectangle isocèle.

2°) Montrer que :

$$B'C' = BB' + CC'$$



(1) Triangle rectangle isocèle, définition, propriété caractéristique.

H milieu de l'hypoténuse : $(AH) \perp (BC)$

(2) Problème de convexité B, B' et C, C' de part et d'autre de (AH).

1°) Si on me demande de démontrer que B'HC' est *rectangle isocèle* alors je peux :

a) Montrer que $\widehat{B'} = \widehat{C'} = 45^\circ$

b) Montrer $\left\{ \begin{array}{l} \widehat{H} = 90^\circ \\ HC' = HB' \end{array} \right.$

c) Utiliser le théorème de Pythagore et $HC' = HB'$
etc.

(le retour aux données privilégie la première procédure).

Si on demande de démontrer $\widehat{B'} = \widehat{C'} = 45^\circ$, je peux comparer ces angles à des angles connus - ici en B et C - d'autant plus qu'apparaissent des *points cocycliques* A, H, B, B' et A, H, C, C'.

2°) Si on me demande de montrer $B'A + AC' = BB' + CC'$ et que ces segments figurent dans des triangles ACC' et ABB' qui paraissent isométriques, je peux penser à une isométrie.

Les données et le résultat de 1°) conduisent à penser à une rotation de centre H et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

ANNEXE 3

Contrôle sur \ln . le 25 octobre 1988 - groupe 2

Nom :

note :

/ 20

Liste des théorèmes et propriétés utilisés, en les numérotant :

1- Définition de \ln : ...

2- Propriété algébrique fondamentale : ...

3-

6-

4-

7-

5-

8-

I - Equations. Inéquations. Calculer $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ ou $n \in \mathbb{N}$ tels que :

	\mathcal{D}	Résolution	n° thème ou Réf.
(1) $2 \ln (2x) = \ln 4$			
(2) $2 \ln \sqrt{2} + \ln (x^2 - 1) = \ln (4 - x)$			
(3) $\ln (x + 4) - \ln (2x - 1) \leq 3 \ln 2$			
(4) $\frac{2 \ln 2 + \ln (x - 2)}{\ln (x - 1)} = 2$			
(5) $(0,4)^n \leq 10^{-7}$			
(6) $\begin{cases} \ln (xy) = 5 \\ (\ln x \times \ln y)^2 = 36 \end{cases}$			

II - Calculer la dérivée de f telle que :

	Intervalle	Calcul	n° thème ou Réf.
(1) $f(x) = (\ln x)^2$			
(2) $f(x) = \ln 2x - 3 $			
(3) $f(x) = x \ln x$			
(4) $f(x) = \ln \left[\frac{1}{\ln x} \right]$			

III - Calculer les primitives de f telle que :

	Intervalle	Calcul	n° thème ou Réf.
(1) $f(x) = 2x^2 + 4x - \frac{1}{x}$	\mathbb{R}^{+*}		
(2) $f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2}$	\mathbb{R}^{+*}		
(3) $f(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{2}{4x-1}$	$\left[\frac{1}{2}, +\infty \right]$		

IV - Calcul de limites

	Calcul ou résultat direct	Référence cours
(1) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$		
(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$		
(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$		
(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^4}{x^2}$		
(5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3 \ln x}{x + 2 \ln x}$		

ANNEXE 4

Des exercices avec \ln .

Consigne : sans les traiter complètement, regrouper les exercices qui se ressemblent et préciser les raisons de votre regroupement.

- (1) Ensemble de définition de $f : x \mapsto \ln \circ \ln \circ \ln (x)$
- (2) Etudier le sens de variation de :
 $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$ $g : x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$
 En déduire un encadrement de $\ln(1+x)$ sur \mathbb{R}^* .
- (3) Soit f , définie sur l'intervalle $I = [\frac{1}{e}, +\infty[$, par : $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.
 Etudier les variations de f sur I ; calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$.
 Représenter f et \ln , pour $x \in I$, sur un même graphique.
- (4) Résoudre : $\ln(-x-2) = \ln\left(\frac{-x+1}{x+3}\right)$
- (5) Calculer la dérivée de : $x \mapsto \frac{\ln \sqrt{x} - 1}{\ln \sqrt{x} + 1}$
- (6) Calculer $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$
- (7) La fonction f suivante est-elle bijective sur $[0, 5]$: $f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1}$?
- (8) Résoudre l'équation : $\ln x = \frac{2x-1}{x}$
- (9) Soit $f : x \mapsto \ln x + \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}^* .
 Discuter, suivant les valeurs de m , paramètre réel, l'inéquation $f(x) > m$.
- (10) Soit h , définie sur $\mathbb{R}^* \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, par : $h(x) = \frac{x+1}{2x+1} + \ln |x|$.
 Etudier ses variations et ses limites. Montrer qu'elle s'annule pour trois valeurs α, β, γ que l'on précisera à 10^{-1} près par excès.
- (11) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$; calculer les primitives de f sur un intervalle choisi.
- (12) Dériver f telle que $f(x) = \ln(\cos x)$ en précisant $\mathcal{D}f$ et $\mathcal{D}'f$.

(13) Montrer que $f : x \mapsto x + \ln x$ est une bijection de \mathbb{R}^{+*} sur \mathbb{R} .

(14) Calculer $\sum_{i=3}^n (\ln x)^i$, en fonction de x et n .

(15) $f(x) = x + \frac{\ln |x|}{|x|}$. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

(16) Résoudre : $\ln x \leq x^2 + 2x$.

(17) Résoudre : $\ln(x^2 - 2x) \geq \ln\left(x - \frac{5}{4}\right) + 2 \ln 2$.

(18) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \{ (\ln x^2) - 2\sqrt{x} \}$.

(19) Soit $h : x \mapsto \frac{1}{2} + \ln x$, sur \mathbb{R}^{+*} .

Etudier h et construire sa courbe C .

Etudier les variations de h' et construire la tangente à C de coefficient directeur le maximum de h' .

(20) $(\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}) \ln(a + b) = (\ln a) \times (\ln b)$. Est-ce vrai ou faux ?

Réponses

Exercices regroupés	Raisons

ANNEXE 5

Apprentissage du cours de maths en TC

Carte d'étude

Nom : *Florence*

Date : *3 février 1989*

*Tu es en Terminale et voilà bien des années qu'on te demande d'apprendre des leçons, de savoir le cours. Cette fiche a pour objectif d'y voir un peu plus clair en ce qui concerne ce que tu penses qu'on attend de toi dans ce domaine. D'autre part, tu seras amené(e) à dire **comment tu t'y prends, ou comment tu t'y prendrais pour réussir.***

<p>Ce que je pense que le prof attend de moi quand je sais mon cours c'est...</p>	<p>Ce que je fais pour y parvenir c'est... ou ce que je ferais... (distinguer les deux)</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Connaissance parfaite des définitions ou des formules (formules sur les limites, formules de trigo...). • Maîtrise des exercices d'application directe du cours. • Connaissance du champ d'application du sujet traité (à quoi ça sert ?). • Connaissance des savoirs procéduraux liés au cours (comment on fait !) 	<p>Ce que je fais :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Apprentissage des définitions ou des formules à retenir le cas échéant, puis résolution des exercices à faire. S'il n'y a que des savoirs procéduraux dans le cours, résolution directe des exercices. • Si les exercices ont été faits avant la date pour laquelle ils étaient prévus, lecture du cours et révision des formules la veille de la suite de ce cours. • Conscience des liens unissant les différents paragraphes du cours. • Si des exercices ont été traités en cours, lecture de ces exercices et apprentissage de leur mode de résolution s'il est particulier. <p>Ce que je ferais :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lire la leçon sur le livre et savoir les démonstrations. • Regarder les applications traitées dans le livre pour résoudre des exercices dont je n'arrive pas à trouver la solution. • Traiter des exercices d'annales non traités en cours en fin de chapitre. • Apprendre toujours le cours avant de résoudre les exercices. Le revoir régulièrement.