DEMONTRER OU NE PAS DEMONTRER, VOILA LA QUESTION

Jean HOUDEBINE
Irem de Rennes

L'apprentissage de la démonstration est l'un des problèmes importants de l'enseignement des mathématiques au collège. Des recherches ont été entreprises, de nombreux articles et polycopiés sont parus récemment sur ce sujet.

L'objet de cet article, qui s'adresse à tous les enseignants de collège, est de tenter d'intégrer toutes ces idées dans une stratégie concrète d'apprentissage. Il aura atteint son but s'il permet aux enseignants d'entrevoir de nouvelles possibilités d'actions auprès de leurs élèves, et s'il est l'occasion pour certains de remettre en cause leur point de vue sur l'enseignement de la démonstration et d'entreprendre un travail de recherche.

Pour être plus convainquant, je suis parti de quelques exemples provocateurs. Ils ont été choisis parce qu'ils conduisaient à des désaccords entre les collègues.

L'article se termine par un glossaire : l'objectif n'est pas de tomber d'accord sur des définitions (ce serait sans doute impossible et en tout cas prématuré), mais de faciliter la lecture de l'article et de montrer la complexité des concepts et des notions rencontrées dans l'étude de l'apprentissage du "raisonnement déductif".

I – Quelques exemples

Premier exemple :

La démonstration est-elle bonne ?

En seconde, un enseignant propose l'exercice suivant :

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$ on a :
$(|x| + 2x = 3) \Rightarrow x > 0$

Voici l'une des copies :

Texte 1

Supposons que x vérifie $|x| + 2x = 3$. Deux cas se présentent :

— *Premier cas* : $x \geq 0$, dans ce cas $|x| = x$
On en déduit : $x + 2x = 3$, $3x = 3$, $x = 1$
donc $x > 0$.

— *Deuxième cas* : $x < 0$, dans ce cas $|x| = -x$
On a donc : $-x + 2x = 3$, $x = 3$
donc $x > 0$.

Ainsi, dans tous les cas, x est positif.

Trouvant cette copie intéressante, il demande l'avis de ces collègues. Les uns trouvent cette démonstration très bonne louant l'habileté de l'élève qui a résolu ce problème très abstrait en s'aidant d'une démonstration structurée. Les autres la trouvent fausse ou mauvaise : « il suppose x < 0 et démontre x > 0 », « il aurait dû faire un raisonnement par l'absurde », « il n'a pas compris ce qu'est un raisonnement par l'absurde ».

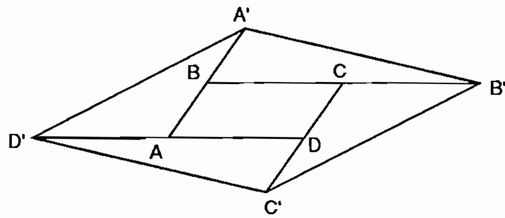
Qu'en pensez-vous ?

Deuxième exemple :

La démonstration est-elle un moyen de clarifier la solution d'un problème ?

Dans une classe de quatrième, un enseignant propose le problème suivant (avec la figure) :

Soit ABCD un parallélogramme. On appelle A' le symétrique de A par rapport à B, B' le symétrique de B par rapport à C, C' le symétrique de C par rapport à D et D' le symétrique de D par rapport à A.



Quelle est la nature du quadrilatère A'B'C'D' ?

Au cours du travail des élèves, l'un d'eux affirme que c'est un losange. Le professeur lui dit alors : "Bien sûr que non. Fais donc d'autres figures".

Un autre élève dit « Je suis sûr que c'est un parallélogramme; j'ai fait cinq figures tout à fait différentes et ça marche ». L'enseignant dit alors « il me faut une explication ».

Quelques bons élèves disent :

Texte 2

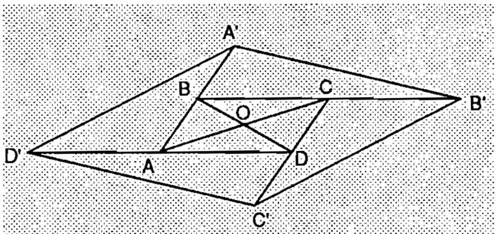
"Ca marche parce que la figure a un centre de symétrie : le point de rencontre des diagonales".

Après des échanges dans la classe, l'enseignant voudrait leur proposer une démonstration. Il hésite entre les deux suivantes :

Texte 3

Première démonstration :

Pour démontrer que A'B'C'D' est un parallélogramme on va démontrer que c'est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu. Pour cela on considère O le point de rencontre de BD et AC. Il suffit pour avoir le résultat de montrer que O est milieu de A'C' et B'D'.



Montrons que O est milieu de A'C'. Dans le triangle AA'C le théorème de "Thalès du milieu" montre que BO est parallèle à A'C. De même dans le triangle CAC', on a OD // AC'.

Comme BO est parallèle à OD, la transitivité du parallélisme montre que A'C est parallèle à AC'. A'CC'A est donc un parallélogramme. Ses diagonales se coupent en leur milieu donc O milieu de AC est aussi le milieu de A'C'.

On démontrerait de la même façon que BB'DD' est un parallélogramme et que O est milieu de B'D'.

Texte 4

Deuxième démonstration :

Soit O le point de rencontre des diagonales de ABCD. C'est le centre de symétrie du parallélogramme. Considérons la symétrie de centre O. Dans cette symétrie, B se transforme en D et A en C. **Comme B est milieu de AA', le transformé de A' sera un point E tel que D soit le milieu de CE et donc E = C'**. De la même manière B' se transforme en D'. Donc O est le centre de symétrie de A'B'C'D' qui est donc un parallélogramme.

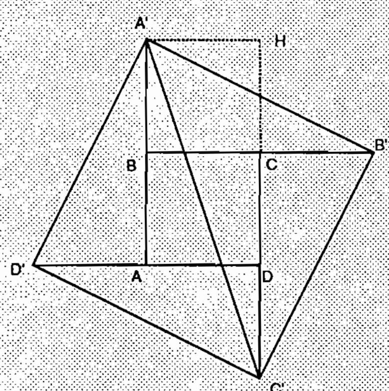
Demandant l'avis de ses collègues, il retient surtout des critiques : « Pourquoi as-tu écrit le début de la première démonstration en remontant ? ». « J'ai voulu la rendre plus compréhensible », « de toutes façons cette première démonstration est trop longue, et elle ne correspond pas aux procédures des élèves », « oui mais la deuxième démonstration est trop subtile (en particulier la phrase en gras) ».

L'enseignant se dit alors qu'après tout, il suffit de retenir l'argument essentiel « il y a une symétrie de centre O ». Malheureusement quand il propose un peu plus tard le même problème mais avec un carré ABCD, presque tous les élèves affirment que A'B'C'D' est un carré avec comme seul argument la symétrie de centre O. L'enseignant explique alors que cet argument n'est pas satisfaisant en dessinant une figure où ABCD est un rectangle. Il essaie d'expliquer sur la figure le rôle que joue la rotation de centre O d'angle $\pi / 2$. Mais instruit par l'expérience précédente, il décide de donner une démonstration. La voici :

Texte 5

Soit H le point tel que A'HCB soit un carré. Dans le triangle rectangle A'HC' on a : $A'C'^2 = A'H^2 + HC'^2$
Si a est le côté du petit carré :

$$A'C'^2 = (3a)^2 + a^2 = 10\,a^2$$



Dans le triangle A'B'B on a : $A'B^2 + BB'^2 = A'B'^2$
donc $A'B'^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2$
De même : $B'C'^2 = 5a^2$. Donc $A'B' = B'C'$.
D'autre part, dans le triangle

A'B'C' : $A'B'^2 + B'C'^2 = 10\,a^2$

Donc $A'B'^2 + B'C'^2 = A'C'^2$
Le triangle A'B'C' est rectangle en B'. A'B'C'D' est donc un carré.

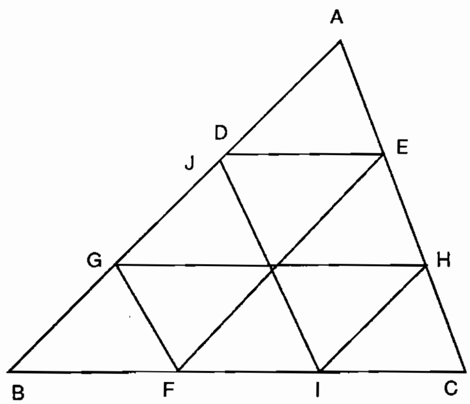
Bien peu d'élèves sont satisfaits : « Comment peut-on trouver un truc aussi alambiqué ? »

Troisième exemple :

Un même problème peut engendrer des textes bien différents

Un professeur voudrait donner le problème suivant à des élèves de quatrième :

Dans un triangle ABC, on part d'un point D de AB puis on mène successivement les parallèles aux côtés ; d'abord DE // BC, puis EF, FG, GH, HI et IJ.



J tombe-t-il sur D ou non ?

Le problème lui paraît intéressant pour la recherche qu'il va déclencher, mais les démonstrations qu'il a vues dans les livres ne lui paraissent pas très faciles d'accès pour les élèves. Il interroge alors quelques collègues.

Un collègue de terminale lui dit :

Texte 6

« Il y a une idée importante qu'il faut faire apparaître, c'est qu'on peut se ramener au cas d'un triangle isocèle. En effet, si on déplace A parallèlement à BC, D, J, E, G, H se déplaçant parallèlement à BC et F et I ne bougent pas. Et le cas du triangle isocèle est évident ».

Un collègue expérimenté du Collège insiste pour qu'il ne manque pas l'occasion de montrer comment on peut conduire la recherche d'un tel problème. Il rédige rapidement ce petit texte.

Texte 7

Dans un tel énoncé, il est évident que les parallèles jouent un rôle essentiel. Il y a deux outils disponibles dans ce cas : le *théorème de Thalès* et les *parallélogrammes*.

« Pour utiliser le premier outil, il semble raisonnable d'écrire une égalité de rapports pour chaque parallèle tracée, mais en choisissant ces rapports judicieusement. Pour utiliser la deuxième idée, il faut remarquer qu'il y a 6 parallélogrammes dans la figure et écrire pour chacun d'eux des égalités de côtés puisque le résultat souhaité est une égalité : AJ = AD ».

L'enseignant décide finalement d'expérimenter ce problème dans sa classe avec deux collègues pour mieux observer les réactions de élèves.

L'un des élèves argumente en disant :

Texte 8

En fait, les triangles des coins sont égaux : C'est comme si on avait transporté le triangle ADE pour obtenir GBF. HIC sera aussi le même triangle et on revient sur ADE au bout d'un tour.

Un autre argumente longuement : *Texte 9*

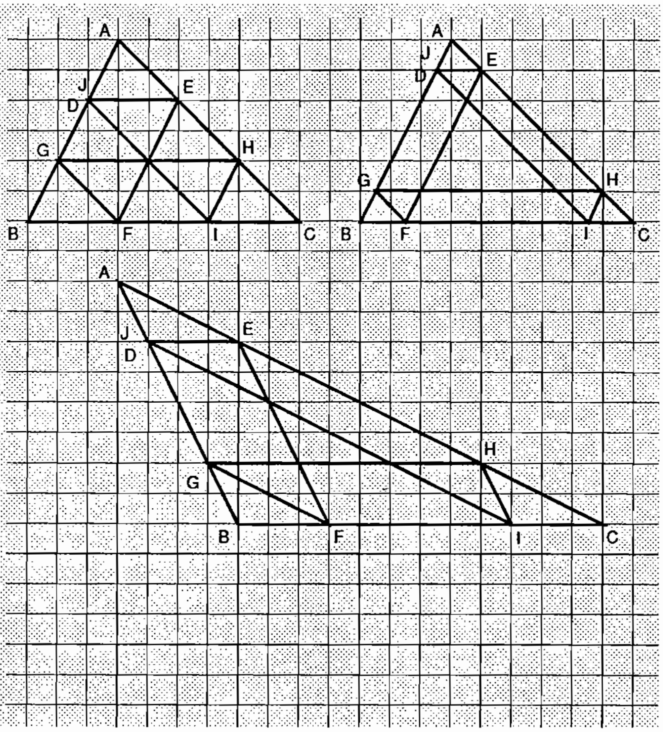
D et J sont sûrement l'un sur l'autre.

Pour être sûr, j'ai fait 3 figures avec du papier quadrillé.

J'ai choisi les côtés pour pouvoir repérer facilement où tombent les points D, E, F, G, H, I, J. Pour le premier et le deuxième triangles, le côté AB passe par un coin sur deux et le côté AC par tous les coins. Dans le premier cas, tous les points sont sur des coins. Dans le deuxième cas, il y a des points (D, F, G, I, J) qui tombent au milieu entre deux coins et d'autres sur les coins (E, H).

Pour le troisième triangle, j'ai fait un triangle penché, AB et AC passe par un coin sur deux et j'ai mis D au quart de AB.

Ces figures sont suffisamment quelconques pour que je sois sûr.



Enfin l'un des enseignants surprend un des élèves en train d'expliquer à ses camarades.

Texte 10

« Quand le prof pose un problème de ce genre, j'ai remarqué qu'il faut toujours répondre oui. De toutes façons, j'ai fait quatre figures, j'ai même utilisé du papier quadrillé et à chaque fois çà tombe juste. on ne voit pas d'ailleurs où J pourrait être s'il n'est pas sur D ».

Au moment de la synthèse, ne sachant comment intégrer toutes les idées rencontrées, l'enseignant décide finalement de leur proposer la démonstration donnée ci-après (cf. texte 11).

Beaucoup d'élèves ne reconnaissent pas les idées qu'ils ont exprimées. Pire, bien qu'ils ne voient aucune faille dans la démonstration du professeur, ils ne comprennent pas comment il trouve par miracle l'égalité finale.

L'enseignant regrette de n'avoir pas eu l'occasion d'utiliser les idées de ses collègues et de traiter sur le même plan les argumentations de ses trois élèves.

Mais qu'auriez-vous fait à sa place ?

Texte 11

On va utiliser le théorème de Thalès à chaque fois que l'on trace une parallèle.

Puisque DE // BC, on a : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

Puisque EF // AB, on a : $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$

Puisque GF // AC, on a : $\frac{BF}{BC} = \frac{BG}{BA}$

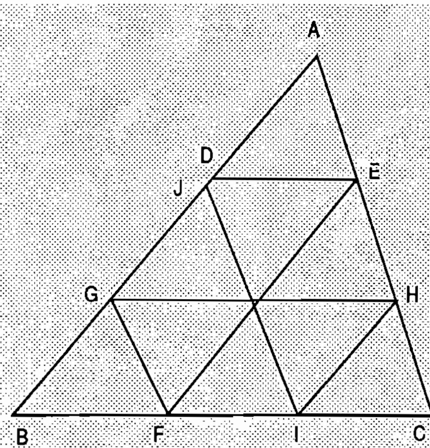
Puisque GH // BC, on a : $\frac{BG}{BA} = \frac{CH}{CA}$

Puisque HI // AB, on a : $\frac{CH}{CA} = \frac{CI}{CB}$

Puisque HI // AB, on a : $\frac{CI}{CB} = \frac{AJ}{AB}$

Tous ces rapports sont donc égaux donc : $\frac{AD}{AB} = \frac{AJ}{AB}$

Ce qui montre que D = J .



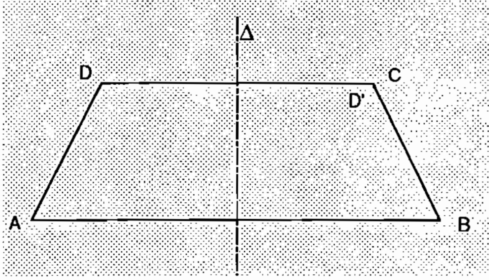
Quatrième exemple :

A quoi sert une démonstration quand le résultat est évident pour tous ?

Il est évident qu'un trapèze isocèle a un axe de symétrie. Faut-il alors en donner une démonstration comme celle-ci ?

Texte 12

Soit Δ la médiatrice de AB. Comme AB est parallèle à DC, Δ est perpendiculaire à DC. Le symétrique D' de D par rapport à A est donc sur la droite DC.
Comme D'B = DA = CB, D' = C.



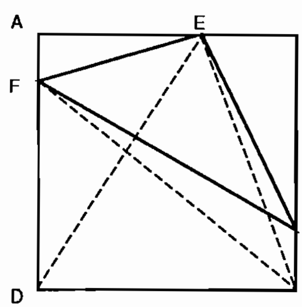
La dernière phrase de cette démonstration n'est pas plus évidente que l'affirmation initiale. Elle cache en particulier le fait qui se voit si bien sur la figure que ABCD n'est pas un parallélogramme ?

Cinquième exemple :

Que faire quand il n'est pas possible de rédiger une démonstration à partir de sa démarche de recherche ?

Problème :

Quelle est la plus grande aire que peut avoir un triangle dont les sommets sont sur les côtés d'un carré ABCD ?



Un élève explique sa démarche de recherche.

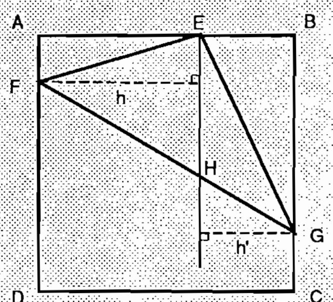
Texte 13

L'aire EFG augmente quand G vient en C car la hauteur issue de G augmente. Elle augmente encore quand F vient en D. A partir de là on ne peut plus l'augmenter. Donc l'aire maximum est la moitié de l'aire du carré.

Devant cette situation, il paraît naturel aux matheux de rechercher une démonstration qui évite toutes les ambiguïtés de cette recherche. En voici une par exemple :

Texte 14

L'aire maximum est bien la moitié du carré. En effet, il existe des triangles dont les sommets sont sur les côtés du carré et qui ont cette aire : par ex. ABC.
Montrons que tout triangle EFG a une aire inférieure à $a^2/2$ (a étant le côté du carré). Il y a trois cas :
— E , F *et* G *sont sur le même côté* : l'aire est nulle.
— *Deux sommets sont sur le même côté* (F et G par exemple). Alors la hauteur issue de E est $\leq a$, $FG \leq a$, donc l'aire est inférieure à $a^2/2$.
— *Les trois points E, F, G sont sur des côtés distincts.* Deux d'entre eux sont alors sur des côtés opposés. Supposons qu'il s'agisse de F et G.



Menons par E une parallèle à ces côtés. Elle coupe FG en H. On a :

aire EFH = 1/2 EH x h   et   aire EHG = 1/2 EH x h'.

Donc aire EFG = 1/2 EH x (h + h') ,

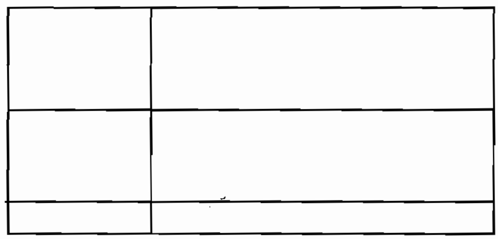
comme $h + h' = a$ et $EH \leq a$, on a le résultat.

Comment inciter les élèves à accepter un tel détour ? Comment les convaincre qu'il peut être nécessaire ?

Sixième exemple :

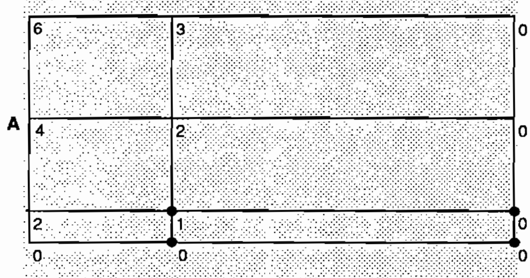
Suffit-il d'être méthodique pour prouver ?

Combien y a-t-il de rectangles dans la figure ci-dessous ?



Texte 15

Il suffit de compter méthodiquement.



Il y a 4 rectangles qui ont A pour sommet en haut à gauche. Ce sont des rectangles qui ont pour sommet en bas à droite les croisements marqués d'un point, c'est-à-dire tous les croisements situés en dessous et à droite de A. En faisant ce calcul pour chaque sommet, on obtient :

6 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 18 rectangles.

Est-ce une démonstration ? Sinon quelle démonstration serait une meilleure preuve ?

II – Quelques réflexions à partir de ces exemples

Beaucoup d'idées toutes faites circulent au sujet de la démonstration. Les exemples précédents se veulent un moyen de les contester.

1. La démonstration n'est pas toujours une explication.

Une explication est un discours ou un texte qui met en évidence les causes profondes d'un résultat : par exemple, le texte 2 me semble une bonne explication. Beaucoup de raisons font que souvent au niveau des collèges les démonstrations ne sont pas des explications.

• Ou bien l'abondance des techniques intermédiaires voile les idées directrices : c'est le cas du texte 3 où la symétrie disparaît sous les parallélogrammes.

• Ou bien en voulant à partir d'une bonne explication rédiger une démonstration, certains détails sont plus difficiles à saisir que l'explication globale. C'est le cas du texte 4 où le résultat utilisé : « dans une symétrie centrale si A est le milieu de BC, si A' et C' sont les transformés de A et C et si A' est le milieu de B'C' alors B' est le transformé de B » obscurcit l'explication par sa complexité (on pense plus volontiers à l'argument : « puisque la symétrie centrale conserve les milieux », résultat malheureusement inefficace ici).

• Ou bien la démonstration ne peut s'inspirer de « l'explication naturelle » parce qu'on ne possède pas les résultats mathématiques indispensables : c'est le cas dans le texte 5 de la démonstration par Pythagore du fait qu'un angle est droit, alors que la rotation donne le résultat naturellement. De même dans le texte 8, l'idée des triangles égaux n'était pas exploitable pour écrire une démonstration en quatrième. C'est enfin le cas de l'exemple 5 où la rédaction d'une démonstration s'inspirant de la démarche de recherche est particulièrement ardue (textes 13 et 14).

• Ou bien, c'est un choix d'efficacité. Les démonstrations de géométrie par des calculs sur les coordonnées n'apportent en général aucun élément d'explication, mais elles résolvent le problème à peu de frais.

• Citons enfin un exemple historique qui montre qu'il arrive aussi que dans la communauté mathématique une démonstration ne soit pas jugée comme une bonne explication. Pour montrer que l'aire du cercle est égal à l'aire d'un triangle rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit est le rayon du cercle et l'autre la longueur du cercle, Archimède proposait un double raisonnement par l'absurde. Au 17ème siècle, cette démonstration est vivement contestée : d'une part, elle n'explique rien, d'autre part, ce type de démonstration ne peut pas être un moyen de découverte : Cavalieri propose alors la méthode des indivisibles qui est cette fois une bonne explication mais ne peut être considérée comme une démonstration (cf. 5).

Disons cependant, en conclusion, que la démonstration joue plus facilement au collège le rôle d'explication que celui de preuve.

2. Démonstration et preuve.

Dans la pratique usuelle des mathématiques la démonstration est une preuve, c'est-à-dire qu'elle a comme rôle principal de rendre indiscutable tel résultat dans la communauté à laquelle elle s'adresse. On peut penser qu'elle joue ce rôle en terminale. Par contre, il apparaît clairement que c'est rarement le cas pour beaucoup d'élèves de quatrième et même de troisième. Il y a bien des raisons à cela.

D'abord les élèves de ces classes ne maîtrisent pas bien ce nouveau mode d'expression; ils savent par expérience que leurs démonstrations comportent beaucoup d'erreurs. Rappelons d'ailleurs que le même problème existe pour les mathématiciens puisque certaines démonstrations acceptées par la communauté mathématique ont été considérées comme fausses 20 à 30 ans plus tard.

Ensuite, on rencontre encore trop dans les livres, dans les cours ou dans les problèmes des démonstrations dont la conclusion est évidente : on n'a pas besoin de prouver l'évidence (exemple 4).

Et puis les élèves ont d'autres moyens de preuve beaucoup plus performants dans bien des cas. Citons d'abord le plus évident : les *méthodes*; l'exemple 6 en montre un exemple en géométrie. La résolution des équations et des inéquations, l'étude des variations d'une fonction, etc. sont certainement des méthodes même si certains croient encore leur donner un statut de démonstrations en ajoutant des équivalences que personne ne lit.

Parlons ensuite de l'usage des figures. Bien sûr elles peuvent servir comme contre-exemple pour prouver un résultat négatif ; c'est ce que fait l'enseignant dans l'exemple 2. La figure suffit alors pour prouver ; les discours sont vraiment inutiles. Mais les figures peuvent aussi servir de preuve d'une autre manière. Dans l'exemple 3, quand un élève dit qu'il a "fait cinq figures tout à fait différentes et ça marche", tout mathématicien au vu de ces figures sera sûr du résultat. Le texte 9 montre bien comment il est possible de rendre convaincant ce type de preuve. L'utilisation du quadrillage supprime les critiques sur l'inexactitude des mesures sur une figure. L'objection « on veut le résultat sur une figure générale » est plus difficile à lever. Cependant, il ne faut pas oublier qu'une démonstration sera aussi rédigée avec une figure particulière et que le problème des "cas de figure" se pose très souvent. Certains élèves se demandent d'ailleurs si une démonstration faite sur une figure va marcher sur une autre figure. Il ne sont pas capables de reconnaître comme l'enseignant si deux figures correspondent au même "cas de figure", ou s'ils ont utilisé dans leur démonstration, des arguments ne dépendant que des données et non de la figure particulière. Si le texte d'élève dont nous venons de parler peut servir de preuve c'est bien parce que les figures choisies tiennent compte des deux paramètres essentiels : la forme du triangle et la position du point initial sur le côté.

A la fin du deuxième exemple, la figure pourrait jouer mieux encore le rôle de preuve car toutes les figures sont "identiques" à une homothétie près.

3. Les démonstrations, la conviction et les représentations.

Le premier exemple montre à l'évidence que certaines démonstrations correctes même relativement courtes ont peu de chance d'emporter la conviction des élèves et même des enseignants.

Citons aussi l'exemple historique de Cantor qui après avoir trouvé une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ écrivait dans une lettre à Dedekind : « Je le vois mais je ne peux le croire ».

Enfin, on peut remarquer qu'une explication qui entraîne la conviction de beaucoup n'est pas toujours une preuve. C'est le cas pour l'argument du centre de symétrie de la fin du deuxième exemple.

On peut sans doute analyser ces faits par le rôle important que jouent les représentations mentales dans la conviction. Dans le premier exemple, ci-dessus, c'est bien la difficulté à se représenter le problème qui empêche de "comprendre la démonstration". D'ailleurs les enseignants ayant à résoudre cette question la transforme en parlant d'équation parce qu'ils possèdent là des représentations plus fiables. C'est bien la même situation pour Cantor. A l'époque en effet, les représentations de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^2$ étaient liées à l'idée de dimension qui s'opposait totalement à ce qu'il puisse exister une bijection entre $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Bien sûr les figures jouent un grand rôle dans la conviction en géométrie en particulier par ce qu'elles sont un moyen d'organiser la représentation que l'on a d'un problème. Mais les représentations mentales ne peuvent s'analyser uniquement en termes d'images, de figures ou de schémas. Par exemple, dans la représentation que se font les élèves des expressions algébriques, il y a sans doute l'idée non exprimée que si elles sont différentes elles prennent des valeurs différentes pour toutes les valeurs des variables ou au moins pour les valeurs "suffisamment quelconques". C'est donc un argument très convaincant en faveur de l'égalité de deux expressions que d'obtenir pour quelques valeurs des variables le même résultat.

Si bien souvent la démonstration proposée par l'enseignant n'emporte pas la conviction de l'élève, c'est qu'elle fait appel à une représentation de la situation qui n'est pas celle de l'élève. Le troisième exemple le montre bien. Dans le cinquième exemple, l'élève expliquant sa démarche de recherche cherche surtout à s'appuyer sur sa représentation de la situation : vision dynamique de la figure, « jusqu'où puis-je agrandir le triangle EFG ? » La démonstration proposée par l'enseignant correspond à une autre représentation fondée sur l'idée d'inégalité.

Notons enfin que beaucoup d'élèves (mais aussi beaucoup d'enseignants) ont besoin pour retenir un résultat, pour appliquer un théorème, de lui associer un ou plusieurs exemples prototypes. Dans le cas de la géométrie, ce sera une figure, dans le cas de l'algèbre un exemple numérique.

En dehors des travaux de psychologues, il existe peu de résultats sur cette idée de représentation qui soit facilement utilisable par l'enseignant de mathématique (cf. 13, 14).

4. Le rôle des méthodes.

Dans le travail mathématique on oublie trop souvent le rôle des méthodes. Pourtant les mathématiques du 17ème siècle avaient su leur donner toutes leur place.

L'exemple 6, sur lequel N. Balacheff a longuement expérimenté (cf. 3 et 4) est particulièrement intéressant de ce point de vue. En effet, si l'on demande à des étudiants expérimentés ou à des enseignants de résoudre ce problème, la plupart d'entre eux rédigerons une méthode et non une démonstration. Il paraît donc raisonnable de considérer qu'ici la rédaction que l'on doit demander aux élèves est celle d'une méthode.

Il est aussi utile de remarquer que les méthodes peuvent tout autant que les démonstrations jouer le rôle de preuves, emporter la conviction, donner des éléments pour se faire une représentation. Par exemple, l'utilisation de graphiques, de tableaux de variation sont souvent d'excellentes preuves. Pour les élèves de quatrième et surtout de troisième, les méthodes de résolution d'équations sont très convaincantes. Même s'ils ne savent plus ce que veut dire "solution d'une équation", ils seront convaincus d'avoir le bon résultat s'ils ont suivis les procédures standard : vérifier que les solutions obtenues satisfont l'équation leur paraît sans objet.

Il me paraît bon de bien distinguer les styles des textes correspondant à des démonstrations et à des méthodes. Ces dernières, en effet, ont été justifiées une fois pour toute par l'enseignant dans son cours et il est normal que les élèves les emploient sans rappeler à chaque fois cette justification. Par exemple :

Il paraît plus important, dans la méthode de résolution des équations, d'habituer les élèves à contrôler que les conditions d'application de leur méthode sont réunies, plutôt que de les obliger à rajouter des « $\Leftrightarrow$ » entre les équations.

5. Communiquer sa conviction : l'argumentation.

Il est toujours difficile de convaincre et cela souvent parce qu'il faudrait pouvoir communiquer sa représentation. C'est ici que l'argumentation joue son rôle. Ce discours structuré pour convaincre peut se présenter sous des formes très diverses.

- Il peut s'appuyer sur des dessins ou des schémas. Notons cependant que, même en géométrie où les figures jouent un rôle très important, la présentation d'un dessin suffit rarement à convaincre. Un élève peut avoir la figure de l'exemple 2 devant les yeux et ne pas voir le centre de symétrie : il faudra le lui montrer.

- Il peut contenir des arguments non mathématiques, voire des arguments non rationnels, le texte 10 est de ce type.

- Il peut contenir beaucoup d'arguments liés aux représentations comme dans le texte 3 ou pratiquement aucune comme dans le texte 1.

- Il peut être sous forme d'un texte très construit ou au contraire sous une forme beaucoup plus libre (texte 6).

La démonstration est l'une des formes d'argumentation. Tout se passe comme si au Collège c'était la seule forme d'argumentation à avoir un statut mathématique. Les écrits demandés aux élèves sont presque toujours de cette forme. Cela est certainement dommageable. D'abord le discours des élèves comporte souvent des argumentations pertinentes qu'il est regrettable de ne pas valoriser, même si elles ne peuvent pas s'intégrer à une démonstration : l'exemple 2 et l'exemple 5 le montrent bien. Le texte 10 contient des arguments très discutables, mais sa structure argumentative est très intéressante.

Ensuite l'enseignant ne se prive pas d'employer ce type de discours même s'il l'écrit rarement.

Enfin travailler sur des argumentations variées est la meilleurs préparation à la rédaction des démonstrations. Des structures vont peu à peu se dégager, la spécificité de la démonstration apparaître, et les difficultés rencontrées montreront progressivement combien la démonstration est un type d'argumentation plus performant et plus facile à rédiger.

6. Mais qu'est-ce donc qu'une démonstration ?

Le sens de ce mot a évolué au cours des siècles (cf. par exemple [1], [5] et [6]). Actuellement, il continue à être sujet de désaccord. Voulant centrer l'attention sur ce qui peut être l'objet d'un apprentissage au collège et au lycée, j'ai choisi de lui donner un sens assez restrictif que l'on pourrait résumer par la phrase :

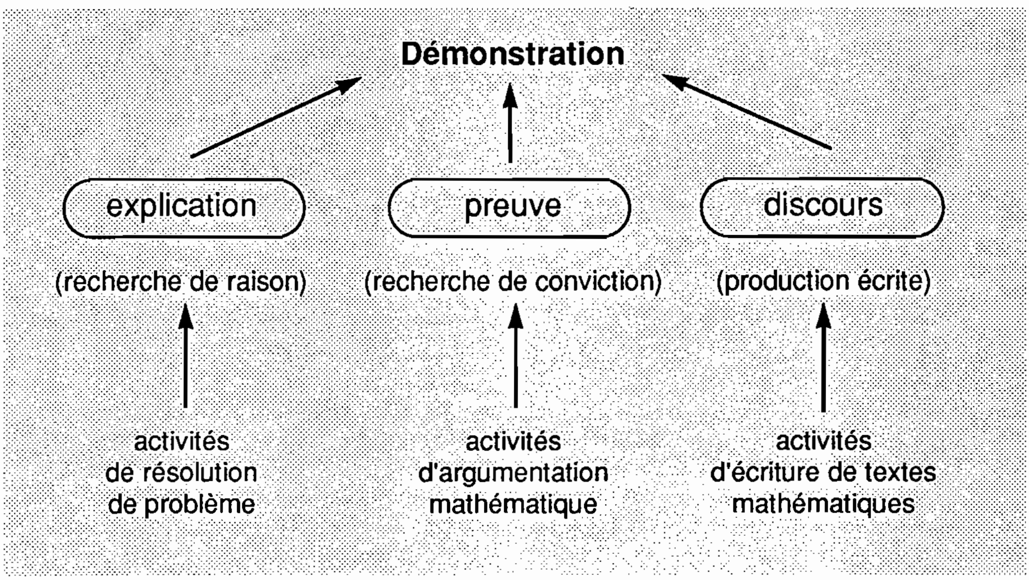
« La démonstration est un texte argumentatif spécifique des mathématiques (structure particulière, arguments pris parmi des résultats déjà énoncés), dont la sémantique est liée à la résolution de problème et à la preuve. »

Le schéma ci-dessous proposé par J. Julo est une autre façon de présenter cette idée.

Plutôt que de rester dans l'abstrait, discutons autour de quelques exemples.

Les textes 3, 4 et 5 de l'exemple 2, le texte 11 de l'exemple 3 et le texte 14 de l'exemple 5 sont des exemples très classiques de démonstrations. Ils appellent cependant quelques remarques.

— Les règles régissant ces textes sont complexes et de nombreux mots y jouent un rôle clé : en effet, car, or, donc, soit, supposons que, considérons, posons, etc. Ces règles sont rarement connues explicitement des enseignants car les connaissances sur ce sujet ne font pas partie de la formation



actuelle. Bien sûr, l'explicitation de ces règles est inutile à l'élève ; ce n'est pas en apprenant des règles de grammaire que l'on apprend à écrire le français.

— Une démonstration ne se présente pas comme une suite de syllogismes. En effet, elle peut comporter des raisonnements par l'absurde, des disjonctions de cas. Les idées de "quel que soit" et "il existe" y jouent un rôle important même si elles sont souvent bien cachées. De plus elles comportent souvent des "marches arrières" grâce à des expressions comme : en effet, il suffirait de démontrer etc. Il n'est pas rare qu'une rédaction agréable à suivre commence par un résultat important qui dans un déroulement linéaire devrait être en plein milieu de la démonstration. Beaucoup d'enseignants de collèges n'ont pas cette image de la démonstration. Par exemple, la plupart ne présentent à leurs élèves que des démonstrations écrites "dans le bon ordre".

— Une démonstration ne contient pas nécessairement l'énoncé de tous les résultats utilisés. Par exemple dans le texte 5, le théorème de Pythagore n'est pas cité ni sa réciproque. Il est normal en effet qu'une argumentation s'adapte au public auquel elle s'adresse. De la même manière, une démonstration sera plus ou moins détaillée suivant les circonstances.

— Les démonstrations ne sont pas un texte français ordinaire. On y utilise des termes que l'on ne rencontre pratiquement jamais en français ; par exemple l'expression "si et seulement si". Le sens des mots y est particulier par exemple en français l'expression "si... alors" (qui est d'ailleurs rarement employée) est ambiguë alors qu'en maths elle ne l'est pas.

Le texte 1 est aussi une démonstration correcte ; ce texte respecte en effet les règles d'écriture habituelles et n'utilise comme arguments que des résultats mathématiques clairement énonçables. Cette démonstration est rejetée par beaucoup d'enseignants parce qu'elle contient dans le deuxième cas une contradiction. Pourtant peu de personnes refuseraient le texte suivant qui est du même type (il n'y a pas de x tel que $x^2 + x + 1 = 0$) :

« Dans le cas où $x^2 + x + 1 = 0$
on a $x = -1 - x^2$ donc $x \leq -1$ »

La seule différence est que dans le cas du texte 1, la contradiction saute aux yeux. Bien sûr, il y a des démonstrations plus simples (raisonnement par l'absurde, raisonnement par contrapposée), ou sémantiquement plus satisfaisantes (recherche des solutions de l'équation $|x| + 2x = 3$). Mais il serait dangereux de disqualifier ce texte. D'une part l'élève qui à travers de nombreux exemples a cru distinguer les structures des textes démonstratifs risque d'être « déstabilisé » pour longtemps ou de voir ses possibilités d'expression considérablement réduites. D'autre part il faut souligner que cette démonstration a au moins une qualité, celle d'être un prototype des démonstrations où l'hypothèse contient des valeurs absolues.

Plus généralement l'idée qu'il y ait des démonstrations meilleures que les autres me parait très dangereuse. On ne peut comprendre en effet la richesse de ce moyen d'expression si on le sclérose prématurément. Comme en français c'est la fréquentation de textes suffisamment variés qui va permettre d'acquérir une maîtrise de sa production.

De toute manière dès qu'on engage la discussion sur ce sujet les désaccords entre enseignants deviennent difficilement réductibles. Les uns en effet souhaitent avoir des textes ayant la structure la plus simple possible, d'autres cherchent au contraire à les rendre le plus convaincant, d'autres encore privilégient l'aspect explicatif. Certains rédigent en partant de la conclusion, d'autres en partant de l'hypothèse. Pour surmonter ces désaccords il faut admettre que toutes ces formes de textes ont leur intérêt. Ce qui est important pour l'élève c'est d'être capable de rédiger des démonstrations "correctes" c'est-à-dire pouvant raisonnablement servir de preuve et aussi de reconnaître parmi des démonstrations de formes très variées celles qui sont "équivalentes" c'est-à-dire celles qui utilisent les mêmes arguments et celles qui diffèrent essentiellement.

7. Le « Raisonnement déductif ».

Le sens de cette expression suscite depuis longtemps des polémiques. Les situations dans lesquelles il y a une démarche de raisonnement sont en effet très variées. Le petit tableau ci-dessous en donne un aperçu.

Les modes de raisonnement pour chacune de ces situations sont sans doute différents ; il faudrait plusieurs concepts pour en rendre compte. Ces concepts ne peuvent être mis tous sous le vocable "raisonnement déductif". De plus certains d'entre eux risquent d'être peu accessibles à l'expérience [citons cependant des travaux sur les représentations et sur la notion d'inférence, (cf. 13, 15, 16)].

Par contre, les textes produits et les discours tenus sont susceptibles d'analyse et nous venons de voir qu'ils sont très variés : Argumentation, démonstration, méthode, explication, texte heuristique, etc.

En ce qui concerne la didactique, il parait donc plus opérationnel de renoncer à l'idée vague de "raisonnement déductif" pour travailler autour de notions sur lesquelles l'action et l'analyse soient possibles :

	Travailler pour soi.	Travailler pour un interlocuteur.
Chercher à comprendre.	Trouver des raisons. Construire des représentations.	Expliquer les raisons. Faire des schémas.
Chercher à être sûr.	Des preuves pour soi.	Des preuves pour les autres : Démonstrations. Méthodes.
Chercher une conviction.	Construire des représentations.	Développer des arguments.

argumentation, démonstration, résolution de problème, preuve, etc.

A titre d'exemple, regardons la difficulté de comprendre la phrase du programme :

> « *La pratique du raisonnement déductif permet d'apprendre à rédiger des démonstrations.* »

- Si le raisonnement déductif est la démonstration, c'est une tautologie.
- S'il s'agit des démarches de pensée qui accompagnent la résolution de problèmes, ne faudrait-il pas le préciser ?
- S'il s'agit de démarches plus générales ou plus complexes, nos exemples montrent qu'il risque d'y avoir une grande distance entre ces démarches et la rédaction d'une démonstration.

8. Démonstration et résolution de problèmes.

Bien sûr, il y a un lien entre la résolution de problèmes et la rédaction des démonstrations. La démonstration ne prend son sens que par rapport à un problème que l'on a résolu, et elle n'a d'intérêt que si la solution du problème n'est pas évidente.

Mais il faut bien distinguer au niveau du collège les deux démarches :

Pour tous ceux, en effet, qui ont observé des élèves de quatrième et troisième et à plus forte raison de sixième et cinquième dans une activité de résolution de problèmes, il ne fait aucun doute que la démonstration se présente comme un corps étranger, une démarche formelle et inutile, qu'on ne peut d'ailleurs aborder que quand le problème est résolu.

Résoudre un problème, c'est trouver des raisons pour soi-même d'être convaincu d'un résultat. L'élève qui s'exprime dans le texte 8 a sans doute résolu le problème de l'exemple 3. Bien entendu, cette activité développe des capacités de raisonnement à travers des activités comme énoncé de conjectures, explication, argumentation, mise en ordre de différents arguments, mise en place de méthode, réalisation de schémas, de dessins, de figures. Tout cela est essentiel dans l'activité mathématique mais ce n'est pas rédiger une démonstration.

Vis-à-vis de la résolution d'un problème, la démonstration joue suivant les cas des rôles différents :

— Elle peut être un élément décisif dans la solution du problème. C'est le cas de l'exemple 1 où il est probable que c'est la rédaction du texte 1 qui a permis à l'élève de résoudre le problème. Mais ce phénomène est très rare au Collège.

— Elle peut permettre de contrôler pour soi-même qu'on n'a fait aucune erreur dans la résolution. Par exemple, pour l'exemple 2, celui qui a résolu le problème avec le carré en disant, "c'est parce qu'il y a une symétrie du centre O" peut s'apercevoir de son erreur s'il essaie de rédiger une démonstration. Cette démarche demande une certaine maturité mathématique. Il faudrait sans doute essayer de la faire acquérir dès le collège.

— Elle peut servir à communiquer à quelqu'un d'autre sa solution. Au collège, cette communication passe beaucoup plus souvent sous la forme d'une explication ou d'une argumentation.

— Elle peut enfin servir de preuve pour un interlocuteur.

De nombreux articles dont l'intitulé

comporte le mot "démonstration" ou "raisonnement", sont en fait une réflexion sur la résolution de problèmes (qui n'est pas l'objet de cet article).

Nous avons essayé de montrer :

• Qu'il ne suffit pas de proposer de bons problèmes et d'apprendre à les résoudre pour apprendre à démontrer.

• Qu'il ne suffit pas de savoir rédiger des démonstrations pour être bien armé pour la ·ésolution de problèmes.

9. Démonstration et axiomatique.

Une démonstration suggère que l'on soit tombé d'accord sur un certain nombre de faits et qu'on sache quels théorèmes on a le droit d'utiliser. C'est d'ailleurs pourquoi elle dépend de la communauté à l'intérieur de laquelle elle s'exprime. Une démonstration entre matheux professionnels n'est pas comme une démonstration en terminale et celle-ci n'est pas comme une démonstration en quatrième.

Il ne faut pas confondre cela avec une démarche axiomatique. L'objectif de cette démarche est en effet de clarifier les fondements d'une théorie (ce ne peut en aucun cas être un objectif intéressant pour un élève de collège). Elle suppose donc l'explicitation complète des hypothèses de départ. Cela nécessite aussi une simplification extrême du langage utilisé et une étude attentive de tous les énoncés même s'ils paraissent évidents. La démonstration dans ce cadre n'a plus pour but de prouver qu'une chose est "vraie" mais de vérifier qu'on peut la déduire des axiomes explicitement choisis.

Dans le cadre scolaire, s'il faut bien partir de certitudes communes, celles-ci n'ont nullement besoin d'être entièrement explicitées ; elles peuvent être surabondantes, très complexes ; exprimées avec un langage très riche ; au cours d'une démonstration si le besoin s'en fait sentir on pourra s'appuyer sur de nouvelles certitudes qu'on n'avait pas eu l'occasion d'énoncer auparavant (par exemple un trapèze isocèle a un axe de symétrie).

La confusion entre ces deux démarches est sans doute l'un des malentendus de la réforme des "mathématiques modernes".

III – L'enseignement de la démonstration

1. Pourquoi enseigner la démonstration ?

C'est un faisceau de plusieurs arguments qui peut emporter la conviction. On peut en distinguer deux classes :

— Des arguments historiques et épistémologiques qui montrent combien la démonstration a joué un rôle important dans l'avancement des sciences et des mathématiques en particulier. C'est actuellement la forme de texte la plus pratiquée par les mathématiciens. Ce type d'argument est intéressant parce qu'il montre que d'autres types de textes ont aussi leur importance, texte heuristique, débat scientifique, explication, etc.

— Des arguments didactiques :

• L'apprentissage de la lecture et de l'écriture de textes scientifiques est l'un des éléments indispensables de la formation scientifique. De nombreux échecs s'expliquent au collège par le manque de maîtrise des élèves dans ce domaine. C'est sans doute en mathématique que cet apprentissage est le plus aisé : les textes sont très typés, les concepts étudiés sont plus simples.

• La démonstration en première et terminale et plus encore à l'Université est un outil efficace pour prouver, expliquer, résoudre des problèmes. C'est une tâche normale d'enseignement de préparer un outil longtemps à l'avance.

• L'un des objectifs du Collège est d'apprendre à argumenter. L'enseignement du français a évolué dans ce sens depuis quelques années. En faisant travailler les élèves sur la démonstration l'enseignant de mathématiques peut participer à cet apprentissage, surtout s'il le fait en liaison avec l'enseignant de français. Une recherche récente (cf. 7) montre bien que la capacité d'écrire des textes argumentatifs se développe entre le CM2 et la cinquième, c'est donc à ce niveau qu'il faut poser les premiers jalons.

• D'une manière générale, l'apprentissage du raisonnement ne peut se dispenser de l'écriture de textes.

2. Ce qu'en disent les programmes.

Le travail didactique sur la démonstration n'est pas encore très développé ; de plus, les auteurs des programmes ne connaissent pas toujours les travaux déjà rédigés. Il n'est donc pas étonnant que ces programmes correspondent à une vue assez naïve du problème. On y parle beaucoup de raisonnement déductif, expression dont le sens peut porter à discussion. Les objectifs sont exprimés en termes assez généraux comme "les travaux permettront, sous la direction du professeur, de mettre en œuvre de brèves séquences déductives".

Aussi plutôt que de retenir la lettre, il vaut mieux retenir l'esprit. D'une part les nombreuses petites phrases distribuées dans le programme montrent l'importance qu'on doit attacher à ce type d'apprentissage. D'autre part, la variété des expressions indique un esprit d'ouverture. Il ne s'agit donc pas maintenant de gloser longuement sur ces programmes, mais d'inventer de bonnes activités, de les mettre au point, de les expérimenter, de les intégrer dans des séquences, de réfléchir aux tâches journalières (en particulier correction de devoir), pour que d'ici une dizaine d'années les enseignants aient des outils performants à leur disposition.

3. Deux idées importantes.

Voici deux idées simples qui remettent en question les pratiques habituelles :

a) Faire rédiger les démonstrations sur des problèmes résolus

Comme nous l'avons déjà dit il ne faut pas confondre les deux objectifs d'apprentissage : résoudre des problèmes et rédiger des démonstrations. Il faut donc autant que possible séparer les deux tâches : au moment de la résolution de problèmes il est possible de ne demander qu'un texte minimum dans une forme très libre, la seule condition étant qu'il donne suffisamment de repères pour savoir si le problème est résolu. Au contraire le problème étant résolu et corrigé pour toute la classe, on peut travailler à la rédaction d'une démonstration. On s'apercevra alors que ce ne sont pas forcément les mêmes élèves qui réussissent ces deux tâches (cf. 12).

Les bons problèmes ne manquent pas

dans les bibliothèques ; en revanche des activités ou des séquences qui conduisent "tous les élèves" d'une classe à la maîtrise complète de la solution d'un problème sont trop rares. Elles sont pourtant indispensables si l'on veut que le travail de rédaction sur un problème soit profitable aux élèves les plus en difficultés .

b) Rédiger des textes mathématiques variés

Tout se passe comme si la seule activité possible de rédaction était, en mathématiques, la démonstration. En réalité les élèves rencontrent beaucoup d'autres sortes de discours ou de textes mathématiques : il suffit d'ouvrir un manuel scolaire pour s'en convaincre. Pourquoi ne pas apprendre aux élèves à écrire tous ces types de textes :

— des argumentations, des explications comme nous l'avons dit dans la partie précédente ;

— des textes heuristiques où l'on s'efforce d'expliquer comment on peut découvrir tel ou tel résultat ;

— l'énoncé de conjectures qui conduit souvent naturellement à l'énoncé de définitions ;

— l'énoncé d'un exercice ou d'un problème à partir de l'observation d'une figure ;

— la description d'algorithmes : construction de figures, suite d'opérations, etc.

— la description de méthode en algèbre ou en géométrie (cf. l'exemple 6) ;

— l'intégration dans un texte de schémas, de dessins explicatifs. C'est par exemple le statut du tableau de signes.

Cette pratique redonne sa vraie place à la démonstration dans l'activité mathématique.

4. Apprendre à argumenter en mathématiques.

Les travaux actuels permettent de dégager quelques étapes incontournables :

a) Les concepts de preuve et de vérité

Il y a souvent au début du premier cycle de graves malentendus sur ces concepts entre les enseignants et les élèves (et même parfois entre les enseignants eux-mêmes). Ainsi aux yeux des élèves un contre exemple ne suffit pas toujours à invalider un énoncé ou encore une simple vérification sur une figure suffit à prouver.

Il faut donc faire réfléchir les élèves sur ces concepts comme d'ailleurs sur le sens du contrat exprimé par les mots : expliquer, démontrer, construire, etc. Une démarche a déjà été expérimentée : organiser un débat autour des conceptions des élèves (cf. 11 et 9).

b) La recherche d'arguments

Quand un élève entrevoit la solution d'un problème, il n'arrive pas toujours à exprimer des arguments précis. Il arrive même que, pour un problème complètement résolu, la recherche d'arguments acceptables par le mathématicien ne soit pas aisée (exemple 5). Il est donc nécessaire de préparer les élèves à cette tâche par des activités spécifiques. Par exemple :

— Dégager les arguments essentiels dans la résolution d'un problème,

— Rechercher des arguments dans des textes déjà écrits (cf. 12),

— Parmi les données, quelles sont celles qui sont utiles pour obtenir tel résultat ?

— Quels sont les théorèmes qui peuvent servir dans tel problème ?

c) La mise en ordre des arguments

Lorsqu'ils sont nombreux, il peut arriver qu'il soit nécessaire de les ordonner avant d'écrire un texte de démonstration. C'est sans doute ici que l'idée de déductogramme peut être utile (cf. 8). Mais on peut proposer d'autres exercices. Par exemple : classer des propriétés en fonction de leur "éloignement" des données ou de la conclusion.

d) Le rôle de la figure

L'essentiel du travail sur la démonstration est fait au collège sur des problèmes de géométrie. Les figures vont donc y jouer un rôle essentiel. Au début du collège, on demande aux élèves d'observer et de constater des propriétés sur une figure. Il faudra les faire évoluer vers l'idée de preuve. Le statut de la figure changera nécessairement. Parmi les propriétés observées sur la figure associée à un problème, certaines seront des données, d'autres des conséquences, d'autres encore seront dues aux particularités de la figure, plusieurs figures pouvant correspondre au même problème ; cela doit être l'objet d'un travail spécifique. Par exemple :

— A partir d'une figure écrire plusieurs énoncés de problèmes.

— Constater qu'une figure peut correspondre à plusieurs énoncés (classification).

— Reconnaître parmi plusieurs figures celles qui correspondent à un énoncé.

— Reconnaître la même configuration dans des figures différentes .

5. Apprendre à lire et à écrire des textes.

Pour l'écriture de textes de démonstration, on s'est contenté jusqu'à ces dernières années d'un apprentissage par imitation. L'évolution de l'enseignement du français au Collège a montré que cette attitude est insuffisante et que l'apprentissage de l'écriture de textes peut être amélioré par des activités spécifiques. On sait en particulier qu'il ne suffit pas de connaître le sens des mots pour écrire des phrases, ni de savoir écrire des phrases pour savoir les articuler en un texte cohérent.

Un travail important de mise au point d'activités, et de réflexion est donc à faire sur trois fronts.

a) Maîtriser le sens des mots

Certains enseignants préconisent ici de minimiser le vocabulaire utilisé par les élèves. Il y a au moins deux arguments sérieux contre cette attitude :

— Les élèves ont naturellement des expressions très variés ; or il faut, pour étayer solidement le sens des mots employés, partir de la façon dont les élèves s'expriment. Comment un élève pourrait-il comprendre le langage du professeur si celui-ci n'emploie jamais les expressions qui lui sont familières ?

— Les enseignants n'ont pas tous le même vocabulaire. En particulier le passage en seconde peut être une véritable rupture si les modes d'expression mathématique de l'élève sont trop stéréotypés.

Plusieurs classes de mots sont en cause :

• Les quantificateurs au sens large : le, la, une, certain, chacun, parfois, toujours, jamais, tous, quelques-uns, il y a, etc. Par exemple, l'enseignant dès la sixième dira "le point, tel que..." ou "un point tel que..." suivant qu'il y a ou non unicité. L'élève découvrira-t-il tout seul cette subtilité ?

• L'expression si, alors et toutes les formes équivalentes : parce que, de sorte que, à cause de, le participe présent, ... Il y a ici deux difficultés : les confusions entre énoncé direct et réciproque, et le "quel que soit" qui est en général sous entendu dans cette expression (cf. 12).

• Les mots de liaisons argumentatifs : donc, mais, par conséquent, en effet, nous savons que, supposons que, soit, etc.

• Certains termes mathématiques qui dérogent au sens usuel. Par exemple, en français un rectangle ne peut être un carré alors qu'en mathématique tout carré est un rectangle.

b) Travail sur les phrases

Dans la pratique la plus fréquente on ne conçoit ce travail qu'à l'occasion de l'écriture d'un texte complet. C'est augmenter les risques d'échec car cette dernière tâche est difficile. Pourtant beaucoup d'activités peuvent être conçues dans cette optique. Voici quelques pistes de travail :

— Classer des conjectures ou des théorèmes pour savoir quels sont les énoncés équivalents.

— Faire écrire des conjectures ou des théorèmes.

— Traduire un énoncé d'une forme dans une autre. Par exemple passer d'un énoncé "instancié" à un énoncé "non instancié" ou réciproquement.

— Faire écrire des définitions, les comparer.

— Dans le triplet : données, énoncé d'un théorème, résultat ; donner deux des éléments et faire compléter le troisième.

c) Travail sur les textes

Les enseignants de français connaissent depuis longtemps la difficulté de cette tâche complexe et mettent au point des activités qui la rendent accessible à tous les élèves. Un travail analogue est à faire en mathématiques. Retenons deux idées essentielles de l'expérience acquise en français :

— Un travail sur des textes trop simples n'est pas formateur. On ne peut en effet y percevoir les structures des textes.

— Le travail d'écriture doit être proposé aux élèves le plus tôt possible. Pour le Collège cela veut dire qu'il ne faut pas attendre la quatrième pour écrire des textes mathématiques mais commencer dès la sixième. Puisqu'il faut travailler très tôt sur des textes complexes, la difficulté est de trouver des tâches réalisables par tous les élèves. En voici quelques unes :

• Lire des textes déjà écrits pour en extraire une information, pour repérer des textes qui veulent dire la même chose, pour associer des textes de problèmes et des démonstrations, etc.

• Mettre au point un texte à partir de textes déjà écrits. Par exemple extraire une démonstration d'un texte contenant des commentaires heuristiques.

• Transformer un texte déjà écrit : changer l'ordre d'une démonstration, passer du "style élève" au "style prof", développer une démonstration ou réduire une démonstration détaillée, etc.

• Faire apparaître la structure de textes déjà écrits, par exemple associer un déductogramme à un texte, ou construire un déductogramme à partir d'un texte .

• Travaux de type puzzle.

• Ecrire des textes simples dans le cadre de la résolution de problèmes, mais aussi écrire des textes compliqués avec des aides importantes : par exemple partir d'un déductogramme pour écrire un texte.

6. Et l'évaluation ?

On ne peut parler de stratégie pédagogique sans parler d'évaluation. Le point essentiel est que celle-ci doit être un moteur et non une sanction. S'il est nécessaire de corriger les erreurs, il est encore plus indispensable de mettre en valeur les succès. Cela ne peut se faire dans une tâche trop globale : l'usage veut que l'on demande à la fois à l'élève de résoudre un problème, et de rédiger une démonstration, la note ne portant finalement que sur le résultat final. Un seul obstacle dans le long processus demandé à l'élève et c'est l'échec. Au contraire si on s'efforce de sérier les difficultés, de proposer des activités où une seule difficulté est abordée, résoudre un problème, trouver des arguments, classer des arguments, rédiger une argumentation, une démonstration ou une explication, chaque élève verra quelles compétences il possède et sur quels points il devra faire porter son effort.

Un autre point essentiel est de savoir respecter un certain espace de liberté dans la rédaction des démonstrations. Il y a des fautes sur lesquels tous les enseignants sont d'accord. Par contre les corrections apportées par les enseignants sont trop souvent liées à des exigences personnelles. Certains exigeront que tous les théorèmes soient énoncés (même "une droite est définie par deux points" ou "une droite est parallèle à elle même"). D'autres veulent que la conclusion soit à la fin du texte, d'autres encore refusent un raisonnement par l'absurde qui aurait pu être finalement évité. Dans ces conditions, l'élève ne pourra pas distinguer les structures essentielles d'un texte démonstratif de ce qui peut être laissé à l'appréciation du rédacteur en fonction de celui à qui il s'adresse. Par exemple il serait désastreux de dire à un élève ayant fait la démonstration du premier exemple qu'elle est fausse.

7. Conclusion.

L'enseignement de la démonstration peut beaucoup progresser pendant les années à venir. Cette amélioration ne viendra pas de quelques recettes miracles, mais d'une évolution globale de l'enseignement. On peut penser qu'elle se fera sur trois plans :

- La mise au point d'activités nombreuses, variées et performantes qui peuvent de la sixième à la troisième concourir à la maîtrise de la rédaction des textes mathématiques.
- La modification de certaines attitudes journalières Nouvelle façon de voir les copies, réflexion sur les démonstrations présentées dans le cours ou lors de la correction d'un problème, intégration des préoccupations de rédaction dans toutes les progressions, etc.
- Introduction de débats dans la classe sur des sujets comme la preuve, la vérité, le rôle des figures, la nature et la correction d'un texte etc. C'est sans doute sur le sujet dont nous parlons que cette modalité pédagogique est la plus indispensable pour modifier les points de vue des élèves en les obligeant à s'exprimer et à s'opposer.

Beaucoup d'idées ont déjà fait l'objet d'études approfondies, mais trop peu d'enseignants ont pu modifier leur enseignement pour tenir compte des résultats ; beaucoup de pistes restent à étudier. Il faudra donc pendant les dix prochaines années consacrer des moyens importants au travail de formation et de recherche qui reste à faire.

Glossaire

L'objectif de ce glossaire n'est pas de donner une bonne définition des mots (qui peut prétendre en avoir une) mais d'une part de faciliter la lecture de cet article en évitant certaines ambiguïtés, et d'autre part, de faire sentir clairement la diversité des concepts, des notions qui apparaissent quand on étudie "le raisonnement déductif" et la difficulté de les enfermer dans des définitions. Celles-ci sont volontairement courtes et parfois provocatrices.

Démonstration
Texte argumentatif spécifique des mathématiques (structure particulière, arguments pris parmi les résultats déjà énoncés) dont la sémantique est liée à la résolution de problème et à la preuve.

Explication
Donner une cause profonde qui rende le résultat évident.

Preuve
Tout ce qui permet de n'avoir aucun doute sur la vérité d'une proposition .

Argumentation
Texte ou discours dont le but est de convaincre un partenaire. Le texte contient des arguments, c'est-à-dire des affirmations destinées à convaincre et ces arguments sont liés par des mots qui structurent le texte en vue de convaincre. L'argumentation dépend du partenaire à laquelle elle s'adresse. Elle n'a vraiment de sens que s'il y a quelqu'un à convaincre.

Raisonnement déductif
Expression dont le sens est ambigu. Pour beaucoup, elle est presque équivalente à démonstration. Pour d'autres, elle signifie "démarche de la pensée rationnelle qui a pour objectif de se convaincre soi-même de la vérité d'une affirmation".

Axiomatique
Se dit de la démarche qui consiste à réduire une théorie complexe à la donnée d'un langage simple et de quelques phrases de ce langage qui seront considérées comme vraies.

Représentations
Devant une situation, un problème, chacun se fait "dans la tête", une image de cette situation qui va lui permettre d'agir. On peut penser qu'elle comporte des liaisons entre les données et des procédures pour agir sur ces données. Les représentations sont inaccessibles à l'expérience directe. On ne les connaît que par ce qu'en dit ou ce qu'en écrit la personne.

Algorithme
Suite d'actions programmées à l'avance et qui permettent d'obtenir le résultat souhaité.

Méthode
C'est une notion un peu plus générale que celle d'algorithme. Les actions ne sont pas forcément entièrement programmées et parfois elles ne font qu'orienter vers le résultat cherché. Les textes décrivant des méthodes comportent le plus souvent peu d'articulations.

Résolution de problème
Activité dont le but est de trouver la réponse à une question précise posée.

Conjecture
Proposition qu'on estime être juste. On va essayer de la prouver ou à défaut de se convaincre de sa vérité.

Bibliographie

[1] G. Arsac, *Thèses contemporaines sur l'apparition de la démonstration dans les mathématiques*, Séminaire de Didactique des mathématiques et de l'informatique de Grenoble, n° 61, 1984-1985.

[2] G. Arsac, *Thèse de Doctorat sur le même sujet*.

[3] N. Balacheff, *Preuve et démonstration en mathématique au Collège*, Recherche en didactique des mathématiques. Vol. 33 - 1982.

[4] N. Balacheff, *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de Collège*, Thèse de Doctorat publiée à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1988.

[5] E. Barbin, *La démonstration mathématique, significations épistémologiques et questions didactiques*, Bulletin de l'APMEP. N° 366. Déc. 88.

[6] E. Barbin, *Heuristique et démonstration en mathématiques : la méthode des indivisibles au XVIIème siècle,* Fragments d'histoire des mathématiques II - L'A.P.M.E.P. 1987.

[7] D. Brossard, *Le développement des capacités discursives chez l'enfant de 8 à 12 ans. Le discours argumentatif*, Thèse de Doctorat éditée par l'Université de Strasbourg.

[8] D. Gaud et J.P. Guichard, *Apprentissage de la démonstration*, Petit x, n° 4, 1984.

[9] M. Mante, *De l'initiation au raisonnement déductif à l'apprentissage de la démonstration*, Suivi scientifique 4ème. Bulletin Inter-IREM.

[10] A.L. Mesquita et J.P. Rauscher, *Sur une approche d'apprentissage de la démonstration*, Annales de didactique et de sciences cognitives. IREM de Strasbourg.

[11] *Apprentissage du raisonnement*, IREM de Grenoble, 1985.

[12] *"Je, tu, ils ... elles argumentent"*, IREM de Rennes, 1988.

[13] *Développer l'activité de représentation*, IREM de Rennes, à paraître début 1990.

[14] *L'apprentissage du raisonnement déductif en géométrie*, Rapports de recherches de l'INRP. n° 12. 1987.

[15] J. Mathieu, *Compréhension, raisonnement et résolution de problèmes,* Manuel de psychologie. Edition Vigot. 1985.

[16] P. Oleron, *Les activités intellectuelles*, P.U.F., 1972.

[17] J. Houdebine, *La structure des textes de démonstrations*, Département de Mathématiques. Université de Rennes 1, 1987.