REPERES - IREM. N° 133 décembre 2023

LE PROBLÈME DE LA TRANSPOSITION INFORMATIQUE POUR LES ALGORITHMES NUMÉRIQUES

Christophe JERMANN et Frédéric GOUALARD*
Nantes Université, École Centrale Nantes,
CNRS, LS2N, UMR 6004, F-44000 Nantes, France

Résumé : Le passage d'un algorithme mathématique à un programme informatique (la « transposition informatique ») suppose la prise en compte des contraintes de la modélisation computable induites, en particulier, par l'utilisation d'ensembles numériques finis aux propriétés réduites (entiers à représentation en base 2 dans un domaine fini, nombres dyadiques à développement fini en lieu et place des réels). Ces contraintes imposent parfois une modification radicale de l'algorithme mathématique original, inexplicable par la théorie de la transposition informatique telle qu'elle est le plus souvent présentée, par exemple par BALACHEFF, BRIANT, ou MODESTE. Nous montrons ce phénomène sur deux exemples tirés des programmes de mathématiques au lycée et suggérons une adaptation du processus de transposition informatique pour en tenir compte.

1. — Supposons une vache sphérique…

Le ministère de l'Agriculture de Freedonie demanda un jour au Professeur X., célèbre physicien, de trouver le moyen de doubler la production des laiteries du pays. Une quinzaine de jours plus tard, celui-ci convoqua les représentants du ministère et de la presse pour leur exposer un plan très précis permettant d'atteindre et même de dépasser cet objectif. Le Professeur X. s'approcha cérémonieusement du tableau noir et, lorsque le brouhaha de la salle retomba, lança d'une voix assurée tout en traçant de savantes équations :

— Supposons une vache sphérique de densité uniforme...

Cette fable, censée illustrer avec humour les dangers de la sur-simplification des modèles appliqués à la vie réelle, circule sous des formes diverses depuis de nombreuses années — le magazine *Science* évoquait déjà en 1970, par exemple, la question des poulets sphériques [20].

Comment calculer la somme S de n valeurs réelles x_i sur une machine ? *La transposition informatique* [3] telle que présentée par BRIANT

* Correspondant : frederic.goualard@univ-nantes.fr, LS2N, 2 rue de la Houssinière, BP 92208, F-44322 NANTES CEDEX 3

[5] et BRIANT & BRONNER [6], par exemple, est un processus formalisé en deux étapes où l'on va d'abord passer d'un problème exprimé dans le langage mathématique :

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

à un algorithme dans un langage semi-formalisé décrivant la logique de calcul au moyen de structures de contrôles conditionnelles et répétitives (du « *pseudo-code* ») *sur les variables mathématiques*, mettant ici en œuvre une *somme récursive* (programme 1).

La deuxième étape consiste ensuite à traduire le pseudo-code dans un langage de programmation, par exemple Python [1], sur des *variables informatiques* (programme 2). Seul le programme écrit dans un langage de programmation peut être réellement exécuté sur une machine.

L'exécution du programme 2 sur la série (1) :

x = (9 007 199 254 740 992 ; 0,25 ; 1,0 ; 0,75 ; 0,1 ; 0,9 ; –9 007 199 254 740 992)

devrait surprendre l'utilisateur lorsqu'il constatera que la somme calculée vaut 0 au lieu de 3. Le processus de transposition classique n'explicite malheureusement pas suffisamment les contraintes de modélisation computable [3] : le pseudo-code 1 est parfaitement valide car il s'applique sur des variables mathématiques à valeur dans **R**. Le programme 2 a vocation à être exécuté sur une machine — ordinateur, calculatrice, tablette, ... — où les ensembles de nombres manipulés sont des sous-ensembles finis des ensembles **Z** et **R**, représentés en binaire et possédant des propriétés réduites. L'arithmétique des nombres à virgule flottante remplaçant les nombres réels n'est pas associative pour l'addition, par exemple. Le code obtenu est donc généralement sous-optimal, voire erroné.

Programme 1 – Somme récursive de n nombres réels. Algorithme en pseudo-code sur les variables mathématiques.

$S \leftarrow 0$
pour chaque $x_i \in (x_1,...,x_n)$ **faire**
    $S \leftarrow S + x_i$
finpour
afficher S

Programme 2 – Somme récursive de n nombres réels. Programme Python issu de la transposition informatique directe du pseudo-code du programme 1.

```
S = 0
for xi in x:
    S += xi
print (S)
```

Comme le remarquent HASPEKIAN et NIJIMBÉRÉ [10], les programmes officiels du lycée sont particulièrement ambigus sur la notion d'algorithme, ce qui entretient le flou entre *algorithme mathématique*, appliqué à des variables à valeurs dans des ensembles infinis, et *algorithme informatique*, exécutable sur une machine finie.

Cependant, il semble clair qu'un programme écrit dans un langage informatique se doit de mettre en œuvre un algorithme qui tienne compte des possibilités des ensembles de nombres effectivement manipulés sur la machine. Le processus de transposition informatique de BRIANT doit donc être amendé pour que l'algorithme en pseudocode obtenu après la première étape s'applique sur les ensembles qui seront réellement utilisés sur une machine. Pour le cas de la somme de n réels, par exemple, de nom-

1. Dans la suite, tous les exemples utilisent Python 3.

breux travaux [13, 17, 15, 4] présentent de tels algorithmes sur les nombres à virgule flottante qui les remplacent en machine, indépendamment de leur mise en œuvre dans un langage de programmation. Ces algorithmes informatiques ne peuvent être le résultat d'une transcription quasi-automatique d'un algorithme mathématique sur les réels, domaine pour lequel ils ne présentent pas d'intérêt par rapport à une simple somme récursive.

Ne sommes-nous pas aussi lunaires que le Professeur X. lorsque nous choisissons d'ignorer le fait qu'un ordinateur ne peut manipuler ni l'ensemble des nombres entiers, ni les nombres réels et que nous produisons un programme informatique utilisant un algorithme pensé pour des variables mathématiques ?

Pour montrer l'importance d'une transposition informatique correcte, nous présentons dans la section 3 deux exemples de transposition : un algorithme pour calculer la factorielle d'un entier (section 3.1) et un algorithme pour calculer la moyenne d'un ensemble de nombres réels (section 3.2). La section 2 fixe les notations et rappelle les informations pertinentes sur la représentation en machine des nombres entiers (section 2.1) et des nombres réels suivant le standard IEEE 754 [1] (section 2.2). La section 4 présente les résultats des expérimentations avec des étudiants de la Licence 3 Informatique de la Faculté des Sciences et des Techniques de l'Université de Nantes sur le problème de la transposition d'un algorithme de somme de réels.

2. — L'arithmétique sur ordinateur

Dans la suite, nous employons le terme « ordinateur » dans un sens très large, qu'il s'agisse d'un ordinateur de bureau, d'une calculatrice ou d'un téléphone portable. Tous ces dispositifs de calcul ont en commun de posséder un circuit électronique, le « processeur », appliquant une succession de traitements sur des données se trouvant dans une mémoire stockant une longue suite de valeurs binaires (« *bits* »). Toutes les données à manipuler (entiers, caractères, réels, ...) doivent donc être encodées sous forme de suites de bits («chaînes binaires») — généralement de tailles fixes prédéfinies — pour être stockées en mémoire.

Nous ne rappelons ici que les éléments relatifs à l'arithmétique sur les nombres entiers et à virgule flottante suivant le format IEEE 754 [1] qui sont pertinents pour la suite de cet article. L'existence de standards largement adoptés, comme le standard IEEE 754, garantit un ensemble de propriétés sur lesquelles il est possible de s'appuyer pour concevoir un algorithme informatique indépendamment de la machine sur lequel il sera exécuté *in fine*. On verra cependant dans la suite que, si les machines elles-mêmes respectent généralement ces standards, les éléments logiciels avec lesquels interagissent les utilisateurs prennent parfois des libertés. C'est par exemple le cas du langage Python ou de certaines applications de la calculatrice Numworks.

On trouvera un exposé plus complet sur l'arithmétique des ordinateurs, avec des justifications historiques, dans le fascicule « *Le calcul sur ordinateur* » [9].

2.1 *L'arithmétique sur les nombres entiers*

Les nombres entiers sont représentés en machine par des chaînes binaires. Pour des raisons techniques, chaque entier est généralement encodé par une suite de 32 ou 64 bits. Étant donné une chaîne binaire « $b_{k-1}b_{k-2}\cdots b_0$ » de k bits b_i, il est possible de l'interpréter comme un entier positif ou nul exprimé en base 2 (« *entier non signé* ») :

$$\text{«}b_{k-1}b_{k-2}\cdots b_0\text{»}, b_i \in \{0,1\} \overset{\text{interprété comme}}{\longmapsto} S = \sum_{i=0}^{k-1} b_i 2^i$$

Si l'on souhaite pouvoir représenter des entiers positifs *et* des entiers négatifs (« *entiers signés* »), on peut utiliser l'interprétation *en complément à 2* :

$$\text{«}b_{k-1}b_{k-2}\cdots b_0\text{»},\ b_i \in \{0,1\} \xmapsto[\text{comme}]{\text{interprété}} -b_{k-1}2^{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} b_i 2^i$$

Exemple 2.1. Si l'on considère des chaînes de 4 bits, la chaîne «1101» peut être interprétée comme l'entier positif $13 = 2^3 + 2^2 + 2^0$ ou comme l'entier négatif $-3 = -2^3 + 2^2 + 2^0$ encodé en complément à 2.

Une chaîne binaire n'a donc pas de valeur intrinsèque. Sa valeur dépend entièrement de l'interprétation souhaitée par celui ou celle qui écrit le programme qui la manipule. La taille de chaîne binaire considérée ainsi que l'interprétation qui en est faite définit un type, correspondant à l'ensemble des valeurs manipulables dans cette interprétation.

Les calculs sur les nombres entiers représentés par des chaînes binaires de tailles fixes sont effectués au sein du processeur par des circuits électroniques spécialisés très rapides. Certains langages de programmation offrent aussi des possibilités de manipulation d'entiers dont la longueur de représentation n'est pas fixée à l'avance, pour pouvoir traiter des entiers très grands en valeur absolue. La contrepartie est un coût d'utilisation plus important car toutes les opérations arithmétiques sont alors effectuées par un programme informatique au lieu d'être traitées directement par le processeur de la machine. Contrairement à la plupart des langages de programmation comme C, C++ et Java, Python 3 offre par défaut un seul type d'entiers, avec une taille de représentation variable, mais évidemment bornée. Une description détaillée de la mise en œuvre dans Python de ce type se trouve dans l'annexe A du fascicule sur le calcul sur ordinateurs de GOUALARD et JERMANN [9].

Il reste possible de manipuler des entiers de taille fixe dans Python en utilisant la bibliothèque Numpy, qui offre de nombreux types d'entiers : `uint8` pour des entiers non signés sur 8 bits et `int8` pour des entiers signés sur 8 bits, par exemple. On a aussi des entiers sur 32 bits (`uint32`, `int32`) et sur 64 bits (`uint64`, `int64`).

En fonction de la taille des chaînes de bits, on peut ainsi représenter les entiers dans les domaines suivants, par exemple :

	Domaine	
Type	**(non-signé)**	**(signé)**
Entier sur 32 bits	$[0\,;\,2^{32}-1]$	$[-2^{31}\,;\,2^{31}-1]$
Entier sur 64 bits	$[0\,;\,2^{64}-1]$	$[-2^{63}\,;\,2^{63}-1]$
V_{32}	NA	$[-2^{30\times 2^{31}}+1\,;\,2^{30\times 2^{31}}-1]$
V_{64}	NA	$[-2^{30\times 2^{63}}+1\,;\,2^{30\times 2^{63}}-1]$

où V_{32} et V_{64} sont les deux types d'entiers en précision arbitraire que l'on trouve dans Python 3, en fonction de la mise en œuvre de l'interpréteur du langage utilisé. Pour ces types, il n'existe pas de déclinaison non signée.

Pour les types entiers non signés encodés par des chaînes de k bits, tous les calculs sont faits modulo 2^k.

2.2 *L'arithmétique à virgule flottante*

Le calcul sur les nombres réels est remplacé en machine par un calcul sur des nombres dyadiques à développement de taille bornée. Leur représentation sous forme de chaîne binaire ainsi que les propriétés des calculs sont définies par un standard international utilisé sur la quasi-totalité des ordinateurs actuels (le respect du standard sur les téléphones portables et les calcu-

latrices est plus aléatoire) : le standard IEEE 754 [1]. Ce standard définit un nombre à virgule flottante x par un triplet de trois valeurs :

— Le signe $s \in \{0,1\}$;

— L'exposant $E \in [E_{\min} ; E_{\max}]$, qui est un entier signé représenté par une chaîne de $1 + \log_2(E_{\max} + 1)$ bits;

— Le signifiant[2] $\sigma \in [0 ; 2 - 2^{-p}]$; c'est un nombre fractionnaire exprimé en binaire, avec un bit de partie entière et p bits de partie fractionnaire f :

$$\sigma = b_0, \underbrace{b_{-1}b_{-2}\cdots b_{-p}}_{f}; \quad b_i \in \{0,1\}$$

On a alors :

$$x = (-1)^s \times \sigma \times 2^E$$

Afin d'assurer la continuité des calculs, le standard définit la notion d'infini, positif ou négatif : si un calcul crée un nombre d'une magnitude trop grande pour être représenté, il est remplacé par une valeur spéciale indiquant l'infini (on parle d'*overflow*). On obtient ainsi une *droite réelle achevée*[3]. Lorsqu'un calcul n'a pas de sens sur les réels (exemple : $\sqrt{-1}$), on retourne une valeur spéciale : *NaN* (*Not a Number*). Ainsi, tous les calculs ont un résultat représentable dans le codage des nombres flottants.

La figure 1 présente la répartition des nombres flottants sur la ligne réelle pour un format où l'exposant est codé sur 2 bits et le signifiant sur 4 bits.

On voit que les nombres en virgule flottante (ou, simplement, *flottants*) sont répartis de manière non uniforme. La distance entre un nombre flottant positif de la forme $\sigma \times 2^E$ et le flottant suivant — à l'exclusion des infinis — est $2^{-p} \times 2^E$. On en déduit que si E est strictement supérieur à p, la distance entre un flottant et le suivant devient supérieure à 1. Donc, un type flottant avec une partie fractionnaire de taille p ne peut représenter tous les entiers que dans le domaine $D_{\mathbf{Z}} = [-2^{p+1} ; 2^{p+1}]$. À l'extérieur de cet intervalle, certains entiers ne sont pas représentables.

L'ensemble des nombres flottants n'est pas fermé pour les opérations arithmétiques (la somme de deux flottants peut ne pas être un flottant, par exemple). Il est donc nécessaire d'*arrondir* chaque résultat non représentable. On note $\mathrm{fl}(v)$ le nombre flottant correspondant à la représentation en machine du nombre réel v. Pour les opérations arithmétiques, une machine respectant le standard IEEE 754 garantit que le résultat arrondi est toujours le flottant le plus proche de la valeur réelle.

L'accumulation des arrondis lors d'un calcul peut engendrer de grandes différences au final entre un résultat réel et la valeur calculée en machine. En particulier, on verra dans la suite l'importance de deux phénomènes :

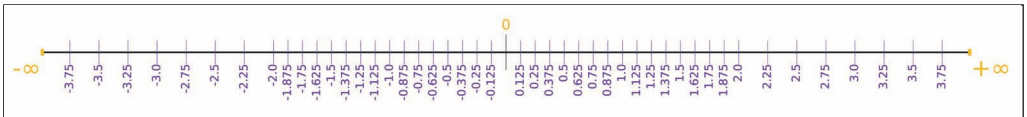


FIGURE 1 – Représentation d'un ensemble de nombres flottants (2 bits d'exposant et 4 bits de signifiant) sur la ligne réelle (les *NaNs* n'apparaissent pas sur la figure).

2. Parfois improprement appelé « mantisse ».

3. Pour des raisons obscures, le langage Python choisit délibérément de ne pas suivre le standard IEEE 754 en ce qui concerne les valeurs « infinies » en arrêtant le calcul avec une erreur dans ce cas.

— L'*absorption*. Lorsque l'on fait la somme ou la différence de deux flottants, on commence par aligner l'exposant le plus petit sur l'exposant le plus grand, ce qui induit un décalage vers la gauche de la virgule pour préserver la valeur de l'opérande concerné. On fait ensuite la somme des signifiants. Lorsque les deux nombres ont des magnitudes très différentes, on peut perdre une grande partie des bits significatifs du plus petit nombre. Exemple : soit à faire l'opération $1{,}010 \times 2^{10} + 1{,}101 \times 2^{2}$ avec des signifiants sur 4 bits :

$$\begin{array}{rll} & 1,010 & \times 2^{10} \\ + & 1,101 & \times 2^{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{rll} & 1,010 & \times 2^{10} \\ + & 0,000\mathit{00001101} & \times 2^{10} \\ \hline \end{array}$$

Les chiffres en italique gris ne peuvent pas être représentés car le processeur effectue les calculs avec une précision fixe correspondant à celle des opérandes ; le calcul qui est réellement fait est donc : $1{,}010 \times 2^{10} + 0{,}000 \times 2^{10}$. La grande valeur a absorbé la petite ;

— La *cancellation*. À l'inverse, la soustraction de deux valeurs très proches issues d'un calcul ne garde que les bits issus des arrondis successifs. Exemple : soit à faire la soustraction avec des signifiants sur 8 bits $1{,}0010\mathit{111} \times 2^{0} - 1{,}0010\mathit{010} \times 2^{0}$, où les bits en italique rouge sont entachés d'erreurs par des calculs antérieurs. On a :

$$\begin{array}{rll} & 1,0010\mathit{111} & \times 2^{0} \\ - & 1,0010\mathit{010} & \times 2^{0} \\ \hline & 0,0000\mathit{101} & \times 2^{0} \end{array}$$

On obtient donc, après normalisation, la valeur $\mathit{1{,}01} \times 2^{-5}$, qui n'est composée que de bits erronés. La soustraction de valeurs proches n'ajoute pas d'erreur mais elle magnifie les erreurs précédentes.

Le standard IEEE 754 définit plusieurs tailles de nombres flottants. Nous ne nous intéresserons ici qu'au format dit en double précision avec les caractéristiques suivantes :

p	$E_{\min}$	$E_{\max}$	$\mathbf{D}_{\mathbb{Z}}$
52	-1022	$+1023$	$[-2^{53}\,;\,2^{53}]$

Le format flottant double précision est celui utilisé par défaut pour représenter les nombres réels dans la plupart des langages de programmation. C'est notamment le cas pour le langage Python.

3. — La transposition informatique

Le processus de passage d'une spécification écrite dans le langage mathématique à un programme dans un langage de programmation exécutable sur une machine est rarement explicité en détails dans la littérature. Un des premiers articles sur le sujet, celui de BALACHEFF [3], précise bien, cependant, que « *ce que l'on place habituellement sous le terme d'informatisation ne constitue pas une simple translitération* [...]». Il insiste aussi [2] sur le fait qu'« *en tant que dispositif matériel, l'ordinateur impose un ensemble de contraintes qui, elles-mêmes, vont exiger une transformation appropriée pour permettre la mise en œuvre de la représentation adoptée.* [...] *Les exigences propres à une modélisation computable tiennent à sa vocation à permettre la mise en œuvre* autonome [4]

4. C'est nous qui soulignons.

d'un modèle symbolique par un dispositif informatique [...] » On a là tous les éléments importants d'une transposition informatique correcte :

— Prise en compte des limitations de l'*univers interne* de l'ordinateur ;

— Autonomisation du processus de calcul : un programme informatique doit pouvoir s'exécuter sur les données d'entrée sans intervention d'un tiers régulateur.

Cependant, BALACHEFF choisit sciemment (« *nous n'entrerons pas, ici, dans l'analyse des contraintes profondes de représentation et de mise en œuvre des langages de programmation utilisés* » [3]) de ne pas détailler la prise en compte de ces éléments, ce qui semble l'induire plus tard en erreur en ce qui concerne leur impact sur la modélisation (« [...] *j'assimilerai les contraintes de cet univers* [l'univers interne de la machine] [...] *aux contraintes d'expression d'un modèle dans un langage de programmation* »).

On retrouve cette erreur dans les écrits postérieurs sur le processus de transposition informatique : pour BRIANT et BRONNER [6], la pensée informatique s'intègre à la pensée mathématique initiale en la complétant, pas en s'y substituant. De même, MODESTE [14] définit le pseudo-code utilisé dans la première étape de transposition comme un « *un langage intermédiaire, inspiré des instructions des langages informatiques mais libéré de certaines contraintes et manipulant directement les objets mathématique*s. »

Comme on va le voir dans les exemples ci-dessous, la prise en compte de l'univers interne de la machine a un impact majeur sur le pseudo-code à écrire, qui ne peut s'expliquer ni se justifier si l'on travaille sur les variables mathématiques.

3.1 *Exemple 1 : calcul de la factorielle de n*

On souhaite écrire un programme calculant la factorielle $n!$ d'un entier naturel n, définie récursivement par :

$$\begin{cases} 0\,! = 1 \\ n\,! = n \times (n-1)\,! \,, \quad n \geqslant 1 \end{cases} \tag{2}$$

Programme 3 – – *Pseudo-code pour le calcul de la fonction factorielle.*

```
fonction factorielle(n)
début
  si n = 0 alors
      retourner 1
  sinon
      retourner n × factorielle(n – 1)
  finsi
fin
```

Programme 4 – *Transposition informatique directe du pseudo-code pour calculer la fonction factorielle en Python.*

```
def factorielle(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n*factorielle(n-1)
```

Le pseudo-code s'en déduit simplement (programme 3). De même, un code Python s'obtient facilement, une fois prises en compte les contraintes de syntaxe du langage (programme 4).

Mais ce code est-il correct ? Lors de l'écriture du pseudo-code, nous n'avons jamais explicité le fait que n devait être un entier naturel car cela allait de soi. Dans un pro-

gramme informatique, *rien ne va de soi* et cette contrainte devrait apparaître dans notre code Python. Il y a plusieurs manières de faire cela : on peut tester à l'entrée dans la fonction que la valeur `n` est un entier (du type Python int) positif ou nul, ou l'on peut mettre un commentaire dans la documentation de la fonction précisant le type du paramètre attendu. Le programme 5 montre une solution combinant les deux (L'instruction « isinstance(n,int) » retourne une valeur booléenne égale à « `true` » si la variable `n` est du type « entier relatif à précision variable » int). On est obligé de choisir une convention pour la valeur à retourner lorsque `n` n'est pas un entier naturel ; on choisit de retourner la valeur 0, suffisamment pathologique dans le cadre d'un calcul de factorielle pour avertir l'utilisateur qu'il y a eu un problème.

Programme 5 – *Calcul de la factorielle de n en Python. Test sur le type de l'entrée.*

```
def factorielle(n):
  """
  Calcul de la factorielle de `n`.
  Le paramètre `n` doit être un
  entier naturel.
  On retourne `0` si ce n'est pas
  le cas.
  """
  if isinstance(n,int) and n >= 0:
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n*factorielle(n-1)
  else:
    return 0
```

3.1.1 *Mise en œuvre avec des entiers de taille fixe*

Pour obtenir de meilleurs performances en temps ou en occupation de la mémoire (la représentation en mémoire d'un entier de type int à précision variable occupe beaucoup de place), on peut être tenté d'utiliser un type entier de taille fixe tel que ceux offerts par la bibliothèque Numpy, comme ce serait le cas dans la plupart des langages de programmation, tels que C, C++, ou Java. Le programme 6 présente la fonction factorielle calculée avec des entiers non signés (uniquement positifs ou nuls) codés par des chaînes de 64 bits. On vérifie que le paramètre *n* est d'un type compatible avec un entier (int, numpy.int32, ...) avec la fonction isinstance() déjà vue, et que sa valeur est codable dans un entier non signé sur 64 bits ($[0 ; 2^{64} - 1]$). Lorsque la valeur en entrée de la fonction est trop grande, on retourne la valeur 0, comme précédemment.

Programme 6 – *Calcul de la factorielle de n avec des entiers non signés codés sur 64 bits.*

```
import numbers
from numpy import uint64

def factorielle(n):
  """
  Calcul de la factorielle de `n`.
  Le paramètre `n` doit être un entier
  représentable sur 64 bits. On retour-
  ne `0` si ce n'est pas le cas.
  """
  if isinstance(n,numbers.Integral)
            and 0 <= n <= 2**64-1:
    n = uint64(n)
        # On force `n` à avoir
          le type `uint64`
    if n == 0:
        return uint64(1)
    else:
        return
          n*factorielle(n-uint64(1))
  else:
    return uint64(0)
```

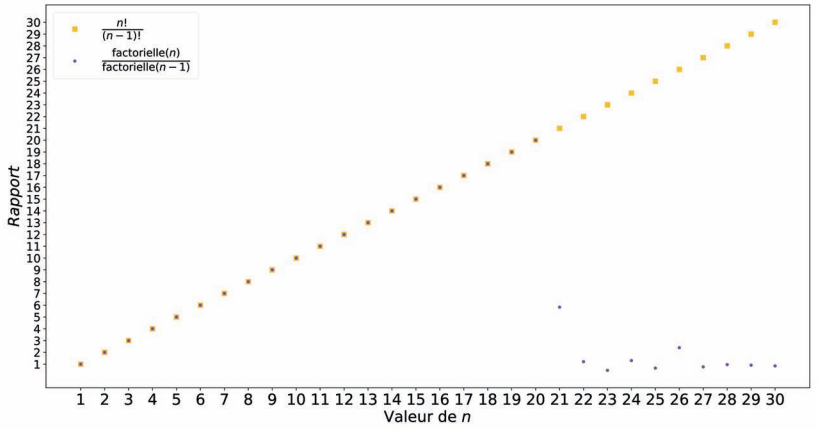


FIGURE 2 – Vérification des valeurs calculées par la fonction Python `factorielle()` du programme 6.

Pour s'assurer de la correction des calculs, on a écrit un petit programme vérifiant l'invariant :

$$\frac{n!}{(n-1)!} = n \qquad (3)$$

pour n de 1 à 30. La figure 2 compare les valeurs attendues avec les résultats obtenus par la fonction `factorielle()` du programme 6. Pour $n > 20$, la fonction retourne des valeurs parfois plausibles (exemple : `factorielle(21)` retourne la valeur 14197454024290336768, qui est plus grande que 20!) qui ne vérifient pas l'invariant : avec des entiers non signés sur 64 bits, tous les calculs sont faits modulo 2^{64}; or, 21! est supérieure à cette valeur.

Ainsi, malgré ce que dit le commentaire en tête de la fonction `factorielle()` dans le programme 6, on constate que tous les entiers de l'intervalle $[0;2^{64}-1]$ ne sont pas admissibles en entrée, car la valeur calculée doit aussi être représentable sur 64 bits. On a un problème dès que le nombre de bits nécessaire pour représenter une factorielle est supérieur à celui alloué pour représenter les entiers utilisés. La formule de Kamenetsky [19], basée sur la formule de Stirling pour calculer une approximation de la fonction factorielle, nous permet de connaître le nombre de bits nécessaires pour représenter n! sans avoir à calculer la factorielle elle-même :

$$\text{Kamenetsky}(n) = \left\lceil \frac{\log_2(2n\pi)}{2} + n \log_2 \frac{n}{e} \right\rceil$$

La figure 3 (page suivante) montre le nombre de bits nécessaire pour représenter $n!$ pour n dans le domaine [3;50]. On a identifié sur la figure les plus petites valeurs de n pour lesquelles il faut plus de 31, 32, 53, 63 et 64 bits, ce qui correspond à des tailles de chaînes binaires usuelles de représentation des entiers en machine. On voit ainsi que si l'on utilise le format `int32` (entier signé sur 32 bits, n'offrant donc que 31 bits pour le plus grand entier positif), habituel dans des langages informatiques comme C, C++ et Java, ou le format `uint32` (entier non signé sur 32 bits), on ne peut pas représenter la factorielle d'un entier supérieur à 12. Avec des entiers sur 63 ou 64 bits, on ne peut pas représenter la factorielle d'un entier supérieur à 20.

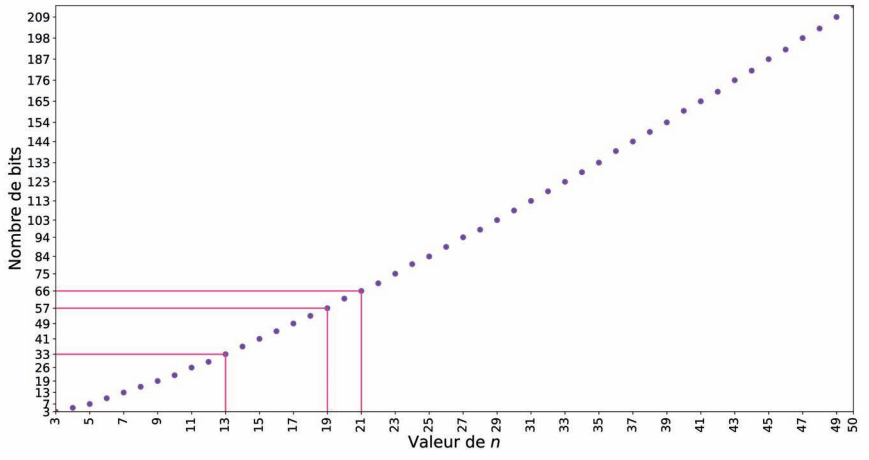


FIGURE 3 – Nombre de bits nécessaires pour représenter n!

Un programme correct doit donc intégrer dans son algorithme les tests permettant de rejeter les appels qui ne pourraient être traités correctement, sous peine de retourner des valeurs fausses, parfois difficilement distinguables des valeurs correctes.

Programme 7 – *Calcul de la factorielle de n avec des entiers non signés sur 64 bits intégrant un test sur le domaine de validité.*

```
import numbers
from numpy import uint64

def factorielle(n):
  if isinstance(n,numbers.Integral)
                  and 0 <= n <= 20:
    n = uint64(n)
    if n == 0:
        return uint64(1)
    else:
        return
          n*factorielle(n-uint64(1))
  else:
    return uint64(0)
```

Le programme 7 modifie le test de domaine de la fonction factorielle du programme 6 pour garantir, désormais, que la valeur de sortie se trouve bien dans le domaine de validité des calculs sur des entiers de 64 bits.

3.1.2 *Mise en œuvre avec des entiers de taille variable*

On peut cependant objecter qu'il n'est nullement nécessaire de se limiter à des entiers sur 64 bits, en particulier avec Python, qui, contrairement à la plupart des langages de programmation, utilise par défaut une représentation des entiers en précision arbitraire [9, p. 53–54]. Bien évidemment, la représentation n'est pas infinie mais, dans le moins favorable des cas, elle permet, en théorie, de manipuler tous les entiers positifs dans le domaine $[0, 2^{30\times 2^{31}} - 1]$, ce qui est énorme.

Essayons de tirer parti des capacités de calcul étendu de Python pour calculer quelques grandes valeurs de la fonction factorielle présentée dans le programme 4 :

```
>>> factorielle(500)
1220136825991110068701238785423046926253574342803192842192413588385845373153881997605496447502203281863013
↪   6647714820358416337872207817720048078520515932928547790757193933060377296085908627042917454788242491272
↪   6344305670173270769461062802310452644218878789465754777149863494367781037644274033827365397471386477878
↪   4954384895955375379904232410612713269843277457155463099772027810145610811883737095310163563244329870295
↪   6389662891165897476957208792692887128178007026517450776841071962439039432253642260523494585012991857150
↪   1248706961568141625359056693423813008856249246891564126775654481886506593847951775360894005745238940335
↪   7984763639449053130623237490664450488246650759467358620746379251842004593696929810222639719525971909452
↪   1782333175693458150855233282076282002340262690789834245171200620771464097945611612762914595123722991334
↪   0169552363850942885592018727433795173014586357570828355780158735432768888680120399882384702151467605445
↪   4076635359841744304801289383138968816394874696588175045069263653381750554781286400000000000000000000
↪   0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
>>> factorielle(1000)
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
[...]
RecursionError: maximum recursion depth exceeded in comparison
```

Tout se passe effectivement bien lorsque l'on calcule 500!, un nombre dont la représentation requiert plus de 3700 bits. Par contre, on a une erreur lors du calcul de 1000!, alors que cette factorielle ne requiert que 8530 bits, ce qui est bien en deçà des possibilités de Python.

On a, en fait, atteint ici une limite du langage Python, qui n'autorise pas plus de 1000 appels de fonction imbriqués (pour des raisons techniques, la borne précise est légèrement plus basse dans notre cas). Malgré l'usage d'une représentation des entiers pratiquement non bornée, on se retrouve donc limité[5] à des valeurs de n inférieures à 1000.

Alors, faut-il reprendre la fonction `factorielle()` du programme 4 et lui ajouter un test sur la valeur maximale autorisée de *n*, comme on l'a fait dans le programme 7 ? Non, car nous pouvons nous passer de la récursion problématique en réécrivant notre fonction sous une forme itérative (programme 8).

Notre seule limite, maintenant, semble être celle de la représentation des entiers en précision arbitraire de Python. On a vu qu'elle est suffisamment élevée pour répondre à la plupart des demandes. Il est cependant difficile de déterminer une borne précise pour la valeur maximale du paramètre de la fonction `factorielle()` car elle dépend de facteurs extérieurs au programme (paramétrage du système d'exploitation de la machine, taille de la mémoire disponible, ...). La fonction `factorielle()` du

Programme 8 – *Calcul itératif de la factorielle de n.*

```
import numbers

def factorielle(n):
  """
  Calcul de la factorielle de `n`.
  Le paramètre d'entrée peut être
  de n'importe quel type entier.
  La sortie est toujours de type
  `int`. Retourne 0 si l'entrée
  n'est pas un entier.
  """
  if isinstance(n,numbers.Integral):
    n = int(n)
        # On force `n` au type « entier
        à précision variable »
    res = 1
    while n > 1:
        res = res * n
        n = n - 1
    return res
  else:
    return 0
```

5. Il reste néanmoins possible de changer la borne du nombre d'appels avec la fonction sys.setrecursionlimit().

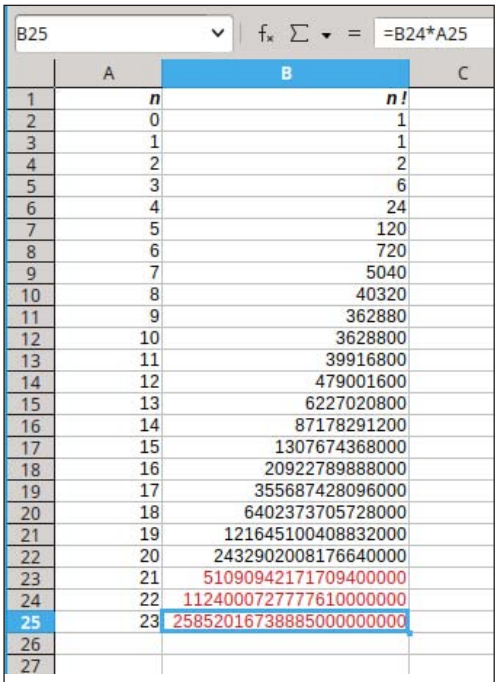
programme 8 accepte un paramètre de n'importe quel type entier en entrée. Par contre, le type de sortie est toujours « `int.` » C'est pourquoi on effectue une *promotion* de `n` dans le type « `int.` » avant la structure répétitive.

Le programme 8 est complètement différent de l'algorithme mathématique du programme 3. Si l'on ne considère que les variables mathématiques, il n'y a aucune raison d'écrire un pseudo-code itératif plutôt que récursif, bien plus proche de la spécification mathématique de l'équation 3.1. Seules des considérations de mise en œuvre de l'algorithme nous ont conduit à adopter un algorithme itératif. On voit donc ici un premier échec de l'approche de BRIANT et *al.* en deux étapes pour la transposition informatique.

3.1.3 *Mise en œuvre avec d'autres langages et applications*

La majorité, sinon la totalité, des tableurs ne manipulent que des valeurs de type flottant double précision, même lorsque l'on souhaite utiliser des entiers. C'est par exemple le cas de LibreOffice. La figure 4 montre le calcul de la factorielle des entiers de 0 à 23 avec LibreOffice 7.5.1.2, où les valeurs en rouge sont erronées, comme on peut s'y attendre dès lors que l'on utilise un type flottant double précision à la place d'un type entier : dans ce format, seul l'ensemble des entiers dans l'intervalle $D_{\mathbf{Z}} = [-2^{53} ; 2^{53}]$ peut être entièrement représenté. De 2^{53} à 2^{54} seuls les entiers pairs sont représentables; de 2^{54} à 2^{55}, seuls les multiples de 4 le sont, ... L'intervalle de calcul sur les entiers que l'on peut garantir correct est donc plus petit que si l'on utilise un format entier sur 64 bits.

Un des atouts mis en avant pour l'utilisation du langage de programmation AlgoBox dans l'enseignement de l'algorithmique est sa proximité syntaxique avec du pseudo-code. Pour



	A	B	C
1	***n***	***n!***	
2	0	1	
3	1	1	
4	2	2	
5	3	6	
6	4	24	
7	5	120	
8	6	720	
9	7	5040	
10	8	40320	
11	9	362880	
12	10	3628800	
13	11	39916800	
14	12	479001600	
15	13	6227020800	
16	14	87178291200	
17	15	1307674368000	
18	16	20922789888000	
19	17	355687428096000	
20	18	6402373705728000	
21	19	121645100408832000	
22	20	2432902008176640000	
23	21	51090942171709400000	
24	22	1124000727777610000000	
25	23	25852016738885000000000	
26			
27			

FIGURE 4 – Calcul de la fonction factorielle avec LibreOffice 7.5.1.2. Les valeurs en rouge sont erronées mais restent plausibles car elles croissent d'un facteur proche de *n*.

s'en convaincre, il suffit de comparer la définition de la fonction factorielle dans le programme 9 (page suivante) avec le pseudo-code du programme 3.

Contrairement à Python et à la plupart des autres langages de programmation classiques, AlgoBox ne reconnait qu'un seul type numérique : `NOMBRE`. La documentation ajoute à la possibilité de confusion du langage avec du pseudo-code en ne fournissant aucune indication sur la représentation en machine du type. S'agit-il d'un type magique capable de représenter toutes les valeurs de **Z** et **R** ? Seul un petit

Programme 9 – *Fonction AlgoBox pour calculer la fonction factorielle.*

```
FONCTION factorielle(n)
VARIABLES_FONCTION
DEBUT_FONCTION
  SI (n == 0) ALORS
     DEBUT_SI
        RENVOYER1
     FIN_SI
  SINON
     DEBUT_SINON
        RENVOYER n*factorielle(n-1)
     FIN_SINON
FIN_FONCTION
```

paragraphe intitulé « *Calculs numériques et arrondis* » peut nous mettre la puce à l'oreille lorsqu'il évoque la possibilité d'erreurs d'arrondi liées à la représentation interne des nombres. Mais, insiste le même paragraphe, ces arrondis n'affectent pas les entiers, donc nous n'avons pas de soucis à nous faire en ce qui concerne notre fonction factorielle().

Afin de nous assurer de la correction des calculs, nous avons refait avec un programme AlgoBox le test illustré par la figure 2 et nous avons calculé la factorielle des entiers de 1 à 69, en vérifiant l'invariant de l'équation (3). Le programme était écrit de façon à afficher les valeurs de n pour lesquelles le test échouait. De nombreuses valeurs échouaient au test.

Après consultation du code source d'AlgoBox, il apparait que le type `NOMBRE` n'est qu'un alias pour le format IEEE 754 en virgule flottante double précision. Comme pour LibreOffice, en dehors de l'intervalle $D_{\mathbf{Z}}$, certains entiers doivent être arrondis. Contrairement à la promesse de la documentation d'AlgoBox, les «entiers» sont donc bien concernés par les problèmes d'arrondi, eux aussi.

AlgoBox propose par ailleurs une fonction **ALGOBOX_FACTORIELLE(n)** pour calculer la factorielle de n. La documentation précise que n doit être strictement inférieur à 70. C'est une borne bien optimiste si l'on considère qu'à partir de 20 (figure 3), le type `NOMBRE` ne possède plus assez de précision pour garantir la représentation des résultats. Incidemment, la formule de KAMENETSKY indique qu'il faut 327 bits pour représenter 69!; c'est bien au-delà de ce que peut manipuler un ordinateur avec les types numériques usuels. La confusion peut venir du fait que le format flottant double précision peut représenter de très grands nombres, jusqu'à environ 10^{308} (ce qui correspondrait à un type entier non signé de $\lceil 308 \log_2 10 \rceil = 1024$ bits), mais sa précision ne peut garantir la représentation de tous les entiers jusqu'à cette borne.

3.2 Exemple 2 : *calcul de la moyenne de n réels*

On souhaite maintenant écrire une fonction pour calculer la moyenne d'une série de valeurs réelles :

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Le pseudo-code s'obtient simplement avec une boucle « **pour** » (programme 10, page suivante) et ressemble — la division finale exclue — au pseudo-code du programme 1. Notons que notre pseudo-code reçoit un tuple en entrée, mais ce pourrait être n'importe quel ensemble non ordonné, comme l'addition est commutative et associative sur **R**.

On trouve le code Python correspondant dans de nombreuses références, par exemple le fascicule de ressources pour le lycée, série Mathématiques, « *Algorithmique et programmation* » [22, p. 7] sur Éduscol (programme 11).

Programme 10 – *Pseudo-code pour le calcul de la moyenne d'une série de n réels.*

fonction moyenne($(x_1, \ldots, x_n)$)
début
  $S \leftarrow 0$
  pour chaque $x_i \in (x_1, \ldots, x_n)$ **faire**
    $S \leftarrow S + x_i$
  finpour
  retourner $\frac{S}{n}$
fin

Programme 11 – *Transposition directe en Python du pseudo-code de calcul d'une moyenne.*

```
def moyenne(serie):
    n = len(serie)
    S = 0
    for xi in serie:
        S = S + xi
    return S/n
```

3.2.1 *Transposition informatique du calcul d'une moyenne*

Comme on l'a évoqué au début de la section 3, un code informatique diffère d'un pseudo-code en ce qu'il doit être une mise en œuvre *autonome*, capable de gérer toutes les entrées possibles. La fonction `moyenne()` est susceptible d'être appelée par d'autres fonctions sur lesquelles on n'a aucune prise. Que se passe t-il si la série donnée en entrée contient des valeurs infinies au sens du standard IEEE 754? Des *Not a Number* ? En Python, on pourrait même imaginer que des valeurs non numériques polluent l'entrée (chaînes de caractère, ...), voire que cette entrée ne soit pas *itérable* — c'est-à-dire, pas un ensemble de valeurs que l'on peut énumérer mais, par exemple, un scalaire. Un code correct se doit d'en tenir compte, soit en prévenant l'utilisateur d'une erreur, soit en éliminant silencieusement ces valeurs de la série avant de calculer la moyenne. Dans tous les cas, le choix fait doit apparaître clairement dans la documentation de la fonction. Dans la suite, par simplicité, on supposera que le paramètre en entrée est une liste ou un tuple dont les valeurs sont au moins numériques.

Par ailleurs, si le code du programme 11 est exécuté dans une version 2.x d'un interpréteur Python et non dans une version 3.x et que la série ne contient que des valeurs entières, la division finale sera aussi une division entière. Le remplacement de la ligne « `S = 0` » par « `S = 0.0` » garantirait au moins que les calculs qui suivent sont faits sur les nombres flottants.

De même, le programme 11 génèrera une erreur s'il est appelé avec une série vide. À titre d'exemple, le programme 12 (page suivante) montre une mise en œuvre possible de la fonction `moyenne()` qui teste ses entrées : comme on prévoit de faire tous les calculs en double précision, on s'assure que la série ne contient que des valeurs flottantes d'une précision égale ou inférieure (demie précision ou simple précision). De même, on interdit la présence d'entiers dans la série car ils pourraient être plus grands que ce que l'on peut représenter avec des flottants double précision [6]. Un entier de l'ensemble $D_{\mathbf{Z}}$ doit simplement être écrit avec une partie fractionnaire nulle pour être accepté (« `1.0` » au lieu de « `1` », par

6. En toute rigueur, on pourrait au moins tester que les entiers sont dans le domaine $D_{\mathbf{Z}}$ avant de rejeter la série, ou bien même, qu'ils sont représentables dans notre format flottant, ce que l'on ne fait pas ici par souci de simplicité.

Programme 12 – *Calcul de la moyenne avec filtrage des entrées.*

```
import numbers
import numpy
import math

def moyenne(serie):
    """
    Calcul de la moyenne de la liste ou du tuple `serie`. On suppose
    que `serie` est un itérable qui ne contient que des valeurs numériques.
    """
    # Recherche de valeurs qui ne sont pas des flottants
    # en demie, simple, ou double précision.
    badValues = list(filter(lambda x:not isinstance(x,(numpy.half,
                                                       numpy.single,
                                                       numpy.double,float)),
                            serie))
    if len(badValues) != 0:
        return math.nan
    # Suppression silencieuse des valeurs math.nan et math.inf
    serie = list(filter(lambda x:math.isfinite(x),serie))
    n = len(serie)
    if n == 0:
        return 0.0
    else:
        s = 0.0
        for xi in serie:
            s = s + float(xi)
        return s/n
```

exemple). Si toutes les conditions ne sont pas réunies pour calculer une moyenne, on retourne un NaN, qui signale une erreur. On choisit aussi d'éliminer silencieusement les valeurs indésirables (NaNs et infinis).

3.2.2 *Mise en œuvre tenant compte des propriétés des flottants*

Les programmes 11 et 12 accumulent les valeurs de la série dans l'ordre dans lequel elles y apparaissent. Cela rend le processus de somme sensible aux erreurs d'absorption et de cancellation. On en a vu un exemple dans le programme 2 pour la série (1), dont la moyenne calculée serait 0 au lieu de 3/7. Le problème du calcul correct d'une moyenne est réductible à celui du calcul de la somme de la série car la division finale ne peut introduire qu'une erreur minime du fait des propriétés d'arrondi des opérations arithmétiques garanties par le standard IEEE 754. Dans la suite, on va donc se concentrer sur celui-ci.

De nombreux algorithmes informatiques plus ou moins sophistiqués ont été et sont encore développés aujourd'hui pour sommer une série de valeurs flottantes le plus précisément possible [13, 17, 15, 4]. KAHAN [12], par exemple, a proposé dès 1965 d'exploiter le fait que l'erreur commise lors de la somme de deux nombres flottants était toujours un nombre flottant représentable, que l'on pouvait réinjecter dans le calcul. On obtient ainsi l'algorithme de *somme compensée* du programme 13 (page suivante).

Avec le programme 13, on obtient une moyenne de $\mathrm{fl}\left(\frac{4}{7}\right)$ pour la série (1), plus satisfaisante que la valeur 0 obtenue avec la somme récursive. Mais, on peut faire encore mieux avec l'algorithme de SHEWCHUK [18], mis en œuvre dans le programme 14 : on utilise un tableau intermédiaire dans lequel on insère les sommes partielles et les erreurs rencontrées lors de l'ajout de chaque nouvelle valeur de la

Programme 13 – *Calcul de la moyenne avec réinjection des erreurs d'arrondi.*

```
import numbers
import numpy
import math

def moyenne(serie):
    # Recherche de valeurs qui ne sont pas des flottants
    # en demie, simple, ou double précision.
    badValues = len(filter(lambda x:not isinstance(x,(numpy.half,
                                                      numpy.single,
                                                      numpy.double,float)),
                           serie))
    if len(badValues) != 0:
        return math.nan
    # Suppression silencieuse des valeurs math.nan et math.inf
    serie = list(filter(lambda x:math.isfinite(x),serie))
    n = len(serie)
    if n == 0:
        return 0.0
    else:
        (s, e) = (0.0, 0.0)
        for xi in serie:
            y = float(xi) - e
            t = s + y
            e = (t - s) - y # Calcul de l'erreur courante
            s = t
        return s/n
```

série. Ce deuxième tableau ne croît que s'il y a une erreur d'arrondi lors d'une itération. On finit par une somme récursive de toutes les sommes partielles et leurs erreurs. Cet algorithme nous permet d'obtenir la bonne moyenne pour notre série, arrondie au flottant représentable le plus proche : $\mathrm{fl}\left(\frac{3}{7}\right)$.

Pour chaque algorithme de somme, on est capable de déterminer mathématiquement une borne sur l'erreur commise quelle que soit la série à sommer, ce qui nous permet de choisir l'algorithme le plus adéquat en fonction de la précision attendue et de la dégradation des performances que l'on peut admettre.
Chacun des algorithmes de somme plus précis sur les nombres flottants que l'algorithme direct de somme récursive n'a aucun sens si l'on manipule des variables réelles. C'est pourquoi, ils ne peuvent être obtenus par le processus usuel de transposition informatique. Pourtant, il est crucial de les utiliser à la place de l'algorithme du programme 11 issu du pseudo-code sur les variables mathématiques (programme 10) si l'on veut avoir des garanties sur les résultats calculés en machine.

4. — Expérimentations dans les classes

Dans le cadre d'un cours sur l'architecture des ordinateurs de troisième année de Licence en informatique à la Faculté des sciences et des techniques de l'Université de Nantes, nous présentons aux étudiants et étudiantes la représentation en machine des nombres entiers et des nombres à virgule flottante suivant le standard IEEE 754.

Lors du premier cours magistral, nous mettons explicitement en garde les élèves contre les dangers de la transposition litérale d'un pseudo-code mathématique en programme informatique en utilisant l'exemple du calcul de la fonction factorielle tel qu'il est présenté dans

Programme 14 – *Calcul de la moyenne avec accumulation des sommes compensées.*

```
import numbers
import numpy
import math

def moyenne(serie):
    """
    Calcul de la moyenne des valeurs de `series`.
    Le paramètre d'entrée ne doit contenir que des valeurs
    flottantes en demie, simple, ou double précision.
    Tous les calculs sont faits en double précision.
    Retourne `math.nan` si la série d'entrée contenait des
    valeurs invalides.
    """
    # Recherche de valeurs qui ne sont pas des flottants
    # en demie, simple, ou double précision.
    badValues = list(filter(lambda x:not isinstance(x,(numpy.half,
                                                       numpy.single,
                                                       numpy.double,float)),
                            serie))
    if len(badValues) != 0:
        return math.nan
    # Suppression silencieuse des valeurs math.nan et math.inf
    serie = list(filter(lambda x:math.isfinite(x),serie))
    n = len(serie)
    if n == 0:
        return 0.0
    else:
        partielles = []
        for xi in serie:
            xi = float(xi)
            i = 0
            for v in partielles:
                if abs(xi) < abs(v):
                    (xi,v) = (v,xi)
                s = xi+v
                e = v - (s - xi)
                if e != 0.0:
                    partielles[i] = e
                    i += 1
                xi = s
            partielles[i:] = [xi]
        S = 0.0
        for xi in partielles:
            S = S + xi
        return S/n
```

un livre, largement utilisé par ailleurs, sur le langage de programmation C : *C in a nutshell* [16] de Peter PRINZ et Tony CRAWFORD. Dans ce livre, les auteurs effectuent les calculs de la factorielle en utilisant des nombres flottants plutôt que des entiers avec la justification (*sic*) que le type utilisé peut représenter des nombres entiers plus grands qu'il ne serait possible avec un type entier usuel.

Interrogés, mêmes les élèves ayant déjà eu l'occasion d'étudier les problèmes de représentation des nombres en machines lors d'autres cours en première année de Licence ou lors du suivi de la spécialité NSI au lycée ne sont généralement pas capables de trouver le problème que cela pose par eux-mêmes.

Nous rappelons alors les détails de la représentation des entiers et des nombres flottants en pointant les problèmes que leur usage induit et en faisant remarquer les limites de l'utilisation des nombres flottants pour représenter de grands entiers.

Lors d'une des premières séances de travaux pratiques en salle machine, nous demandons ensuite aux élèves de calculer la somme des éléments d'un tableau fourni — défini de façon à maximiser les erreurs d'absorption et de cancellation — en triant les éléments du tableau suivant différents ordres avant sommation (ordre initial, par ordre croissant/décroissant de valeurs, par ordre croissant/décroissant des valeurs absolues). La majorité des élèves sont en général surpris d'obtenir des sommes différentes suivant l'ordre utilisé et attribuent cela, en premier lieu, à une erreur dans leur programme.

Malgré la sensibilitation aux dangers d'une transposition litérale des algorithmes mathématiques s'étalant habituellement sur deux séances de cours magistraux, il semble impensable pour les élèves qu'un algorithme ayant certaines propriétés sur les réels puisse ne plus en jouir lorsque l'on change l'ensemble des nombres support.

Avec l'introduction de l'algorithmique dans le cours de Mathématiques de la Seconde, nos élèves ont une expérience de transposition directe du pseudo-code mathématique en un programme informatique d'environ cinq années lorsqu'ils se présentent à nous, éventuellement renforcée par le suivi de la spécialité NSI en Première et/ou en Terminale. Il devient alors difficile de les faire revenir sur les automatismes acquis.

Il est par ailleurs troublant de constater que la connaissance de la représentation en nombres flottants est au programme de la spécialité NSI en Première, mais n'est pas utilisée pour guider la transposition des algorithmes numériques présentés.

5. — Conclusion

Que de chemin parcouru entre les programmes Python 2 et 11 d'une part, travestis de pseudo-code mathématique, et les programmes Python 8 et 14 d'autre part, spécifications exécutables capables de gérer toutes les entrées possibles en fournissant des résultats avec une précision quantifiable à l'avance! Pour obtenir ces derniers programmes, il nous faut connaitre, entre autres, les détails de l'arithmétique entière et de l'arithmétique à virgule flottante telle que spécifiée par le standard IEEE 754, ainsi que leurs particularités dans le langage de programmation utilisé. Peut-on réellement exiger un tel niveau de connaissance des élèves, voire même des enseignants en collège et lycée? Évidemment, non! L'important est que les élèves intègrent la nécessité d'expliciter tous les traitements dès lors que le code est censé être exécuté par une machine et non plus lu par un opérateur intelligent, et qu'ils soient bien conscients des limites d'un code qui reprendrait un algorithme mathématique. La transposition informatique exige un véritable travail d'adaptation *au-delà des aspects syntaxiques liés à un langage de programmation particulier*, qui demande une bonne connaissance des propriétés de la machine et de son arithmétique. Les élèves doivent comprendre et se souvenir en permanence qu'un programme est exécuté sur des ensembles de nombres qui n'ont pas les mêmes propriétés que les ensembles mathématiques. Il n'est donc pas possible de réutiliser un algorithme mathématique tel quel et espérer des résultats corrects pour toutes les entrées possibles.

À cet égard, l'utilisation d'un langage de programmation comme AlgoBox pour l'initiation à l'algorithmique s'avère problématique car il entretient la confusion déjà présente dans les programmes officiels [10] entre l'algorithmique mathématique et l'algorithmique informatique en utilisant une syntaxe très proche du pseudo-code employé généralement pour décrire un algorithme mathématique et en définissant un type flou « `NOMBRE` » sans propriétés ni bornes bien définies pour les variables numé-

riques, alors qu'il est mis en œuvre par un simple type flottant en double précision avec tous ses manques et ses faiblesses.

La réécriture d'un algorithme mathématique pour s'adapter aux possibilités de la machine possède une histoire ancienne et, à la fin des années 1940, Alan TURING lui-même était réputé pour son ingéniosité dans l'écriture de programmes où l'ordre des instructions ne suivait pas la logique de la procédure mathématique mais s'adaptait aux possibilités des mémoires à mercure à lecture/écriture séquentielle de l'EDSAC de l'université de Cambridge [21].

Datant respectivement de 1965 et 1997, les codes des programmes 13 et 14 pour sommer les éléments d'un ensemble de réels ne sont pas nouveaux. Pourtant, de nombreux outils continuent de proposer un code ressemblant à celui du programme 11 (exemple : la fonction `sum()` de Python[7]). L'immense majorité des ressources pédagogiques consultées pour la rédaction de cet article fait référence aux problèmes de représentation des réels sur une machine, puis introduit superficiellement la représentation des nombres flottants au format IEEE 754, pour traduire enfin comme si de rien n'était des algorithmes mathématiques en programmes informatiques sans tenir compte du changement d'ensembles utilisés.

En 1967, FORSYTHE [7] présentait les difficultés rencontrées dans l'implémentation d'une «simple» procédure de résolution d'équation quadratique et se désolait que, malgré l'existence d'un code correct proposé quelques années auparavant par William KAHAN, il n'existait probablement pas plus de cinq implémentations correctes dans le monde. À ce jour, il semble que le nombre n'a malheureusement pas augmenté [8], et l'utilisation d'un code correct est encore loin d'être universelle. Il est plus que temps que les élèves intègrent massivement tant les difficultés et les pièges de la transposition informatique que l'absolue possibilité d'obtenir un code robuste et correct par la connaissance des propriétés et des limites de la machine, afin qu'ils sachent l'exiger de la part de tous les implémenteurs de bibliothèques numériques.

6. — Remerciements

Notre intérêt pour la notion de transposition informatique prend sa source dans une invitation par Magali HERSANT et Emmanuel DESMONTILS, de l'Institut de Recherche en Enseignement des Mathématiques (IREM) des Pays de la Loire, à venir présenter l'arithmétique des ordinateurs lors de la journée académique de l'IREM 2023 à Nantes.

7. Python propose, cependant, une fonction spécialisée, `math.fsum()`, qui utilise l'algorithme de SHEWCHUK [18, 11], mais qui la connait et l'utilise au quotidien ?

7. — Références

[1] IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic. Rapport technique IEEE Std 754-2019 (Révision de IEEE 754-2008), juillet 2019.

[2] Nicolas BALACHEFF : Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 14:9, 1994.

[3] Nicolas BALACHEFF : La transposition informatique, un nouveau problème pour la didactique. *In Colloque « Vingt ans de didactique des mathématiques en France », 15-17 juin 1993*, pages 364–370. La Pensée Sauvage, 1994.

[4] Pierre BLANCHARD, Nicholas J. HIGHAM et Theo MARY : A Class of Fast and Accurate Summation Algorithms. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 42(3):A1541–A1557, janvier 2020.

[5] Nathalie BRIANT : *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français.* Thèse de doctorat, Université Montpellier 2, décembre 2013.

[6] Nathalie BRIANT et Alain BRONNER : Étude d'une transposition didactique de l'algorithmique au lycée : une pensée algorithmique comme un versant de la pensée mathématique. *In Actes de «Espace Mathématique Francophone»*, octobre 2015.

[7] George E. FORSYTHE : What is a satisfactory quadratic equation solver? Technical Report CS74, Computer Science Department, Stanford University, août 1967.

[8] Frédéric GOUALARD : The ins and outs of solving quadratic equations with floating-point arithmetic. Rapport de recherche hal-04116310, LS2N, Université de Nantes, juin 2023. https://cnrs.hal.science/ hal-04116310.

[9] Frédéric GOUALARD et Christophe JERMANN : Le calcul sur ordinateur. Fascicule pour la journée académique de l'IREM, IREM des Pays de la Loire, Nantes, avril 2023. https://cnrs.hal.science/ hal-04088101/.

[10] Mariam HASPEKIAN et Claver NIJIMBÉRÉ : Favoriser l'enseignement de l'algorithmique en mathématiques : une question de distance aux mathématiques ? *Éducation et didactique*, 10(3):121–135, décembre 2016.

[11] Raymond HETTINGER : Binary floating point summation accurate to full precision, mars 2005. https://code.activestate.com/recipes/
393090-binary-floating-point-summation-accurate-to-full-p/.

[12] W. KAHAN : Pracniques : further remarks on reducing truncation errors. *Communications of the ACM*, 8(1):40, janvier 1965.

[13] Peter KORNERUP, Vincent LEFEVRE, Nicolas LOUVET et Jean-Michel MULLER : On the Computation of Correctly Rounded Sums. *IEEE Transactions on Computers*, 61(3):289–298, mars 2012.

[14] Simon MODESTE : *Enseigner l'algorithme pour quoi? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* Thèse de doctorat, Université de Grenoble, décembre 2012.

[15] T. OGITA, S.M. RUMP et S. OISHI : Accurate sum and dot product with applications. *In 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508)*, pages 152–155, Taipei, Taiwan, 2004. IEEE.

[16] Peter PRINZ et Tony CRAWFORD : *C in a nutshell : the definitive reference*. O'Reilly Media, Sebastopol, CA, second edition édition, 2015.

[17] Siegfried M. RUMP : Ultimately Fast Accurate Summation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(5): 3466–3502, janvier 2009.

[18] Jonathan Richard SHEWCHUK : Adaptive Precision Floating-Point Arithmetic and Fast Robust Geometric Predicates. Research Report CMU-CS-96-140, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, mai 1996.

[19] N.J.A. SLOANE : A034886 : number of digits in $n!$, décembre 2010. The on-line encyclopedia of integer sequences. https://oeis.org/A034886.

[20] Steven D. STELLMAN : A Spherical Chicken. *Science*, 182(4119):1296–1296, décembre 1973.

[21] Maurice V. WILKES : Computers Then and Now. *Journal of the ACM*, 15(1):1–7, janvier 1968.

[22] ÉDUSCOL : Algorithmique et programmation : ressources pour le lycée général et technologique — mathématiques. Rapport technique, Ministère de l'Éducation Nationale, 2017.
https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/73/3/ Algorithmique_et_programmation_787733.pdf.