
POUR UN ENSEIGNEMENT PAR LA RECHERCHE

Compte-rendu d'un groupe de travail

Didier LESESVRE

Sun Yat-Sen University
Tangjiawan, Zhuhai, Guangdong,
Chine (RPC)

School of mathematics (Zhuhai)
lesesvre@math.cnrs.fr

*Ce texte est également consultable
en ligne sur le portail des Irem,
onglet : Repères IREM
<http://www.univ-irem.fr/>*

Résumé. Nous proposons une séquence pédagogique d'un semestre qui permet de mêler apprentissage et recherche dès les premières années d'université. Cette approche s'est révélée capable de développer de nombreux savoir-faire et savoir-être nouveaux et fondamentaux pour le futur mathématicien comme pour le futur ingénieur ou responsable, constituant ainsi une démarche pertinente pour la formation en mathématiques à l'université. Par-delà une discussion théorique de cette approche inductive et expérimentale, s'appuyant fortement sur les recherches récentes en pédagogie et en didactique, cet article présente le compte rendu d'un groupe de travail suivant ce modèle qui a eu lieu en 2019 à l'université Sun Yat-Sen, en Chine, mêlant étudiants de licence et chercheurs.

Introduction

Deux mondes : l'enseignement et la recherche

Il existe deux mondes à l'université, qui se côtoient à nos yeux sans guère se voir : celui de la recherche et celui de l'enseignement. Leurs objectifs sont différents ; les compétences et priorités pour l'un ne le sont pas pour l'autre. Toutefois, ces deux mondes transverses demeurent deux pratiques d'une même discipline, l'un explorant et l'autre enseignant les mêmes concepts et idées. Cela mène à s'interroger sur ce que l'enseignement des mathé-

matiques pourrait tirer des activités et du fonctionnement du monde de la recherche.

L'enseignement supérieur des mathématiques en France, forgé depuis l'université impériale sur le modèle des classes préparatoires et des corps techniques, se focalise sur le développement d'une culture érudite et d'une virtuosité technique. Cependant, les objectifs des étudiants de classe préparatoire ne sont pas ceux des étudiants de l'université, et il est nécessaire de prendre en compte ces différences. Il

n'est pas raisonnable de suivre un même modèle pour des formations aux finalités et aux temporalités différentes ; cela ne fait que contribuer à la dévotion de la qualité des enseignements à l'université et à l'apparence d'un système redondant mais à deux vitesses. Les étudiants de classes préparatoires sont armés pour des concours et formés à la résolution en durée limitée de problèmes bien formatés. Les chapitres sont fragmentés pour pouvoir dispenser l'enseignement nécessaire dans toutes les directions possibles, abordant tous les sujets de manière fonctionnelle et efficace, au point que certains professeurs affichent un syllabus de cinquante chapitres pour une année de classe préparatoire. Ces choix permettent à la fois une grande culture et une grande capacité technique, toutes deux fondamentales en mathématiques et dans leurs applications : nous soulignons que notre propos n'est pas ici de remettre en question ce système. Toutefois cette orientation se fait, comme tout choix, au détriment d'autres aspects. Il est notamment flagrant de constater que l'enseignement en écoles d'ingénieurs ou de commerce, débouchés naturels des classes préparatoires, se fait de manière radicalement différente, comme si la virtuosité des préparateurs n'avait de raison d'être que la réussite aux concours. Force est alors de constater que l'université peut et devrait peut-être faire le choix de la différence : la raison d'être de cet article est de rappeler que d'autres portes demeurent ouvertes pour l'enseignement universitaire et méritent examen.

Parmi les compétences ignorées dans l'enseignement actuel des mathématiques en classes préparatoires ou à l'université se trouvent de nombreux aspects propres au monde de la recherche et à l'éthos professionnel des chercheurs, ainsi l'exercice de l'esprit critique, le développement de la curiosité, l'habitude de l'exploration bibliographique, la capacité de gestion de projets à long termes, la découverte du travail en

équipe, ou encore la prise de décisions. Ces compétences sont évidemment hors du cadre de la formation en classes préparatoires compte tenu de l'aspect purement technique des concours. Néanmoins, ces savoir-faire et savoir-être nous semblent pertinents pour faire partie intégrante de la formation en mathématique à l'université au même titre que les connaissances disciplinaires, y amenant une diversité à la fois utile et nécessaire. Ces compétences sont fondamentales et partie intégrante de la pratique scientifique. De plus, de nombreux étudiants de ces filières auront un avenir dans le monde de l'entreprise, l'industrie, le conseil ou le management, et tous ces domaines sont des mondes où la capacité d'initiative, la prise de décisions et le travail d'équipe sont cruciaux et valorisés.

Par ailleurs, le monde de la recherche reste un temple dont les portes demeurent fermées aux profanes : si les activités de vulgarisation scientifique, les séminaires et les revues culturelles ne manquent pas, la réalité du terrain et de la pratique de la recherche restent impénétrables. Les enseignants à l'université ne sont guère plus des chercheurs une fois devant leurs classes, l'interface entre les étudiants et le monde de la recherche n'existe pas. Pourtant l'université devrait être le lieu privilégié de contact entre les étudiants et la recherche, à l'image du monde anglo-saxon où les opportunités de mener des activités de recherche sont plus systématiques dès les premières années de l'université, comme en témoignent les séminaires étudiants ou les revues qui leurs sont destinées. Cette distance mène à une incompréhension du fonctionnement de la recherche induisant en particulier une perte de crédit et de poids social pour les chercheurs ; et un désarroi plus grand pour les jeunes étudiants en thèse, abandonnés à eux-mêmes aux portes de l'inconnu. Cette incompréhension et cette peur induisent une forte reproduction sociale dans le monde académique, alors que les composantes de recherche

se développent à grande vitesse dans toutes les branches du monde professionnel. De plus, les directeurs de thèse eux-mêmes sont souvent bien peu conscients du monde nouveau que leurs étudiants doivent découvrir, démunis de plan de formation aux compétences utiles, sinon nécessaires, au chercheur. Une ouverture plus systématique au monde de la recherche permettrait ainsi non seulement meilleure préparation au monde professionnel, mais aussi une réelle formation des chercheurs.

Certaines initiatives, ainsi *La Main à la Pâte* devenue la norme dans l'enseignement primaire, les expériences épistémologiques de Lakatos dans l'enseignement secondaire ou l'association *Maths.en.Jeans* dans certains lycées, proposent de telles activités d'initiation à la recherche et d'approche plus inductive des savoirs, se concentrant sur la démarche d'investigation et l'implication active des étudiants. Toutefois, ces activités restent à la marge de l'enseignement, ces modules *parascolaires* ne rentrant jamais à part entière dans la formation, et demeurent quasiment inexistantes dans le milieu universitaire. La recherche en didactique, en pédagogie et en sciences cognitives fleurit, regorge toujours plus d'expériences lucides et de constats flagrants sur la nécessité de réformer les méthodes d'enseignement, mais leurs applications n'en sont pourtant qu'à leurs balbutiements, en particulier à l'université. Nous abondons dans le sens de telles initiatives et proposons ici une activité d'investigation et d'apprentissage par la recherche, pouvant être intégrée à un cursus de premier cycle universitaire. Alors que les lycées sont contraints par les programmes, que les classes préparatoires ne peuvent être un terreau fertile pour la recherche pédagogique, et que les concours généraux et autres olympiades sont réservés à une élite, l'université apparaît comme le lieu idéal pour se démarquer de telles normes et proposer un enseignement plus novateur.

Le problème des puissances croissantes

L'objectif de cet article est de proposer une approche nouvelle de l'enseignement des mathématiques universitaires, permettant de développer des connaissances érudites mieux maîtrisées tout en apportant de véritables compétences propres à la démarche d'investigation et de recherche. Il ne s'agit en aucun cas de proposer un changement de système d'enseignement des mathématiques à l'université, mais bien de suggérer la mise en place de certains modules ayant un fonctionnement différent avec des fruits similaires en termes de connaissances mais une véritable plus-value en termes de compétences transverses, contribuant ainsi à une formation plus riche.

La psychologie cognitive contemporaine nous permet de comprendre l'apprentissage comme un processus actif plutôt qu'une simple transmission de connaissances. Il est important de développer dès les premières années d'université une autonomie et une profondeur de compréhension allant au-delà de la simple mémorisation. Un tel objectif exige la création de connexions nouvelles entre savoirs et méthodes ainsi que la mise en contact avec des situations inédites. Le module proposé s'articule donc autour d'un problème mathématique précis, fil conducteur et moteur de l'étude. La formulation de ce problème est accessible sans le moindre bagage technique bien que les directions de résolution ne soient pas évidentes, situation archétypique de la théorie des nombres et plus généralement des mathématiques :

Existe-t-il un entier $s \geq 1$ tel que tout nombre naturel suffisamment grand s'écrive sous la forme

$$(1) \quad x_2^2 + x_3^3 + \dots + x_s^s, \text{ avec } x_2, \dots, x_s \in \mathbb{N} ?$$

Cette question, connue comme le *problème de Waring pour les puissances croissantes*, est l'un des résultats auxquels s'est attaquée la théorie analytique des nombres pendant le XX^e siècle. Ce problème est abordé par une méthode classique due à Hardy et Littlewood : la *méthode du cercle*. La mise en œuvre de cette méthode requiert de nombreux arguments et outils, tous accessibles dès la première année d'université, mettant en jeu dénombrement, analyse réelle, arithmétique modulaire, intégration et analyse de Fourier. L'objectif premier reste ainsi fondé sur un objectif académique classique, celui d'apprendre la méthode du cercle, qui sera toutefois prétexte à explorer de manière transversale de nombreux autres champs mathématiques.

De plus, ce module permettrait d'amener les étudiants à se mettre en position de chercheurs-apprenants, d'exégètes de textes scientifiques, visant une compréhension profonde allant au-delà de la seule lecture, qui ne serait que limitée à vérifier passivement les calculs, à les recopier sans pouvoir les adapter. La lecture visée, inductive, à rebours de l'écriture et en phase avec le déroulement de l'activité de recherche, permet de dégager de nombreux principes généraux concernant la méthode du cercle. Ces principes permettent de prendre du recul sur les méthodes et outils utilisés, servant ainsi tant à apprendre une théorie nouvelle qu'à consolider les acquis précédents. Plus généralement, l'affrontement de situations inconnues suscite une attitude proactive face aux textes scientifiques, aux difficultés ou concepts nouveaux. La passivité des apprenants est un fléau de l'enseignement des mathématiques, nourrie par le mythe qu'il suffirait d'expliquer pour que les élèves apprennent, de transmettre pour qu'ils comprennent. Il y a déjà un siècle, Jean Piaget montrait que le savoir est construit et non reçu, l'activité de l'individu étant indispensable pour se l'approprier. L'approche proposée met les

étudiants en situation constante d'utilisation des connaissances, leur donnant vie, nécessitant une posture active, une attitude nouvelle.

Ce module est ainsi articulé autour d'une mission inédite cherchant à assurer ce changement d'attitude : celle d'adapter la méthode du cercle, que l'on apprendrait de manière livresque aussi rapidement qu'on l'oublierait dès l'examen achevé, à une légère variation du problème de Waring pour les puissances croissantes :

Existe-t-il un entier $s \geq 1$ tel que tout nombre naturel suffisamment grand s'écrive sous la forme

$$(2) \quad x_2^2 + x_4^4 + \dots + x_{2s}^{2s}, \text{ avec } x_2, \dots, x_s \in \mathbf{N} ?$$

Il s'agit du *problème des puissances croissantes paires*. Cette variation ne change en rien l'applicabilité de la méthode étudiée dans le cas du problème de Waring classique et ses différentes étapes, de sorte que le niveau de difficulté ainsi que l'autonomie requise des étudiants restent raisonnables. De plus, de telles variations sont légion et sont une intarissable source de tels projets originaux. Cependant, l'adaptation à une telle variation inédite se révèle impossible sans avoir fait l'effort de digérer suffisamment les arguments des articles originaux. C'est cette démarche par essais et erreurs et cette confrontation aux situations inédites qui sont fondamentales épistémologiquement, comme l'a déjà souligné Lakatos, et qui sont la base d'un apprentissage par la pratique.

Nous faisons dans cet article le bilan de l'importance épistémologique de cette approche, de l'utilité sociologique de démystifier l'activité de recherche, mais aussi de l'efficacité pédagogique et méthodologique d'une telle activité d'investigation ainsi que son applicabilité à l'enseignement supérieur.

Organisation de l'article

La première section de l'étude est dédiée à une esquisse théorique de la méthode du cercle et à la structure du groupe de travail, de manière à fournir les clés nécessaires au lecteur : une démarche éminemment spiralaire permet de dégager les limites de chaque article à la lumière du suivant, et souligne les améliorations successives pouvant être résumées en une méthode nouvelle ou un résultat particulier. De plus, la lecture d'articles de recherche authentiques demande une véritable compréhension des choix qui sont faits dans les méthodes utilisées ainsi que dans les calculs réalisés. Ce défi ainsi que le problème de recherche inédit passent donc par une démarche d'investigation, d'essais et d'erreurs, rendant facile la participation de chacun à travers des tâtonnements à faire chez soi ainsi que des discussions pendant les classes, suscitant l'implication de tous.

Nous dressons dans la section suivante le bilan des compétences qui nous sont apparues être le fruit d'une telle activité. Nous suivons les propositions des travaux récents concernant l'évaluation des étudiants et formulons précisément les compétences développées par ce module en se fondant sur les retours d'expérience et les difficultés rencontrées par les étudiants. Nous établissons des niveaux de maîtrise pour chaque compétence identifiée. Une telle évaluation par compétences permet d'y associer l'étudiant tout comme ses camarades, en faisant un outil de progression et non plus seulement de chiffrage. Une telle démarche permet ainsi de mettre en place une grille de lecture pour de telles activités d'introduction à la recherche.

La dernière section, plus technique, mais pouvant être comprise dans sa structure sans avoir à affronter les calculs, fait un bilan plus détaillé de certaines séances du groupe de travail. Elle

présente le calendrier précis des sessions, discutant quatre moments différents de la démarche, ayant permis de dégager une compréhension technique passées sous silence dans les articles étudiés. Cela est l'occasion de souligner le déroulement dialectique émergeant naturellement du contact avec une situation inédite et de la structure de projet de groupe.

Remerciements

Nous tenons à remercier Kuan Chan Jeong et Xiao Xuanxuan, sans qui ce groupe de travail et cette expérience pédagogique n'auraient pu prendre place, ainsi que les trois étudiants qui ont participé assidûment pendant toute la durée du projet. Par ailleurs, le format de ce groupe de travail est né des pratiques observées dans l'équipe d'Harald Helfgott à Göttingen, en Allemagne, que nous tenons à honorer ici. Après ces premiers pas dans le monde de la méthode du cercle, le groupe de travail a grandement profité des lumières apportées par Jörg Brüderl sur le sujet. Enfin, nous remercions les relecteurs pour leurs commentaires constructifs ayant permis d'améliorer la lisibilité de cet article.

Cadre de l'étude

Nous commençons par une introduction de la méthode du cercle, avant de présenter le corpus choisi et les directions d'étude. Les détails techniques et le déroulement de cette étude sont essentiellement relégués à la dernière section.

Méthode du cercle

L'une des idées centrales de la théorie analytique des nombres est de remplacer l'étude d'une quantité arithmétique ou géométrique par celle d'un objet analytique contenant autant d'informations. C'est par exemple le cas en considé-

rant sa fonction génératrice de Fourier définie par, en posant $e(x) = \exp(2i\pi x)$,

$$f(\alpha) = \sum_{n \geq 0} R(n)e(n\alpha)$$

Ainsi, la quantité recherchée est le coefficient de Fourier

$$R(n) = \int_0^1 f(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha \quad (*)$$

Introduisons l'ensemble K des puissances apparaissant dans le problème considéré, ainsi $K = \{2, 3, \dots, s\}$ dans le cas des puissances croissantes (1), et $K = \{2, 4, \dots, 2s\}$ dans le cas des puissances croissantes paires (2). Notons $R(n)$ le nombre de manières de représenter $n \in \mathbf{N}$ sous la forme (1) ou (2), de sorte que la question est d'assurer qu'il existe un $s \geq 1$ tel que $R(n) > 0$ pour $n \in \mathbf{N}$ suffisamment grand.

Une méthode systématique est de considérer les fonctions génératrices définies par, pour tout $k \in K$,

$$f_k(\alpha) = \sum_{\substack{x^k \leq n \\ x \in \mathbf{N}}} e(\alpha x^k), \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

La fonction $f = \prod_{k \in K} f_k$ apparaît comme la fonction génératrice des $R(n)$. En effet, en développant et en regroupant les sommes de puissances donnant la même valeur,

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \prod_{k \in K} \sum_{x_i^k \leq n} e(\alpha(x_2^2 + x_3^3 + \dots + x_s^s)) = \\ &= \sum_{m \leq n} R(m)e(\alpha m) + \dots \end{aligned}$$

Cela donne une formulation analytique de $R(n)$, quantité *a priori* éminemment arithmétique. Il reste à comprendre suffisamment f pour esti-

mer l'intégrale (*). La fonction est une somme d'exponentielles, et de telles sommes sont particulièrement grandes lorsque α est proche de rationnels a/q à petits dénominateurs, ce qui s'observe par exemple numériquement.

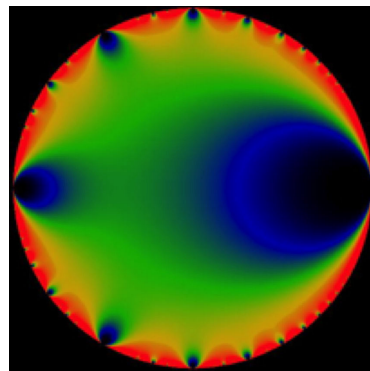


Figure 1 - Comportement typique d'une fonction similaire à f_k . Les valeurs les plus élevées sont représentées en noir, puis en bleu, etc. On constate que la valeur la plus élevée est atteinte en 1, puis la deuxième en 1/2, puis en 1/3 et 2/3, etc.

Cela motive le découpage du segment $[0,1]$ en voisinages de ces rationnels à petits dénominateurs. Introduisons des paramètres entiers $Y > X \geq 1$ et $1 \leq a \leq q \leq X$ où $\text{PGCD}(a,q) = 1$. Définissons l'arc majeur autour de a/q comme l'ensemble des points du segment $[0,1]$ suffisamment proches de a/q , plus précisément :

$$\mathfrak{M}(q, a) = \left\{ \alpha \in [0,1] : \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{qY} \right\}$$

L'ensemble des arcs majeurs est la réunion de ces arcs pour $q \geq X$, autrement dit :

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{q \leq X} \bigcup_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a,q)=1}} \mathfrak{M}(q, a)$$

La motivation pour cette définition précise des arcs majeurs est dévoilée dans la dernière partie de cet article, comme l'un des fruits du groupe de travail. On définit l'ensemble des arcs mineurs comme le complément de ces arcs dans le segment $[0,1]$, c'est-à-dire

$$m = [0,1] - \mathfrak{M}.$$

Corpus de l'étude

Depuis les premiers pas de la méthode du cercle au XX^e siècle, une vaste littérature a été publiée concernant le problème de Waring et ses généralisations telles celle considérée ici. L'ouvrage principal sur la méthode du cercle est le livre de Vaughan, dont la première vingtaine de pages est suffisante pour comprendre la méthode du cercle et son application au problème de Waring de manière autocontenue. Cela en fait une base théorique tout adaptée et en phase avec le contenu académique d'un cours de mathématiques à l'université.

Une fois les bases théoriques et les idées de la méthode du cercle comprises, tous les outils sont disponibles pour s'attaquer aux différents travaux de recherche traitant du problème des puissances croissantes. Ces brefs articles couvrent un demi-siècle d'aventures mathématiques et sont dus à Roth, Thanigasalam, Vaughan, Brüdern et Ford. Ce dernier a obtenu les meilleurs résultats actuels sur le sujet, avec la valeur $s = 15$. Ces articles sont de plus suffisamment proches du cadre présenté dans le livre de Vaughan pour susciter une familiarité avec le sujet. Les améliorations du résultat sont dues à un progrès technique très localisé sans que le reste de la preuve ne change de manière significative, aidant à la navigation et à la comparaison entre les articles, suscitant ainsi une véritable dialectique entre les différents cadres.

L'étude de tous ces articles n'est bien évidemment pas nécessaire compte tenu de leur forte proximité, et nous avons opté pour l'étude d'un article ancien et très proche de présentation du livre de Vaughan, à savoir l'article de Thanigasalam qui est déjà suffisant pour une première manipulation des outils et leur adaptation à notre cas inédit des puissances paires ; puis l'étude de l'un des derniers articles en date, le premier article de Ford, permettant d'atteindre essentiellement l'état de l'art actuel.

Ainsi, plutôt qu'une avalanche théorique, nous adoptons une approche spiralee, privilégiée par les pédagogues et cognitivistes contemporains, trop peu présente dans les enseignements universitaires. Outre les synthèses régulières et les raffinements successifs permis par une telle structure, il est important de garder à l'esprit un aspect psychologique important : le sentiment de décrochage touche beaucoup d'étudiants qui, très souvent, se retrouvent condamnés par ce désarroi. La structure spiralaire de ce corpus est alors l'occasion de recommencer l'étude du même sujet régulièrement, redonnant sa chance à chacun. Outre l'acquisition de connaissances nouvelles, ce corpus permet donc aux étudiants de s'investir de manière participative et de se mesurer aux dimensions alors inconnues de la démarche scientifique.

Pythagorisme et exégèse

Dès les premières lectures des articles du corpus transparait une certaine obscurité, non pas des arguments mathématiques mais des choix réalisés dans la démarche, que l'on pourrait qualifier de pythagorisme. L'écriture scientifique est parfois faite de sorte à ne la réserver qu'aux seuls initiés, fermant la porte aux profanes n'ayant pas eu encadrants et directeurs de thèse spécialistes leur donnant les clés de lecture adéquates. La présenta-

tion des résultats est sèche et efficace, déductive plutôt qu'inductive, bien loin de tout objectif pédagogique, ne mentionnant en rien la démarche de compréhension et de matura-

tion des idées. Ainsi, regardons par exemple les premières pages de l'article de Thanigasalam, qui est par ailleurs limpide dans ses arguments et particulièrement détaillé.

number. The constants implied by the notation " \ll " depend at most on δ and ε .

$e(a)$ denotes $e^{2\pi ia}$ and $e_q(a) = e(a/q)$.

Throughout a, q satisfy $a \leq q$ and $(a, q) = 1$ (unless otherwise specified).

For any natural number n and positive numbers X, Y satisfying

$$2 \leq n, 1 \leq X \leq Y,$$

we define

$$\nu = n^{-1},$$

$$f_n(X, Y; a) = \sum_{X \leq x^n \leq Y} e(ax^n),$$

$$S_n(a, q) = \sum_{x=1}^q e_q(ax^n),$$

$$\tau_n(X, Y; \beta) = \nu \sum_{X \leq y \leq Y} y^{\nu-1} e(\beta y),$$

$$F_n(X, Y; a, q, a) = q^{-1} S_n(a, q) \tau_n(X, Y; a - a/q),$$

$$A(u, q) = \sum_a e_q(-au) \left\{ \prod_{n=2}^5 (q^{-1} S_n(a, q)) \right\},$$

$$A^*(u, q) = \sum_a e_q(-au) \{q^{-1} S_4(a, q)\}^6,$$

$$\mathfrak{S}(X, u) = \sum_{q \leq X} A(u, q), \quad \mathfrak{S}^*(X, u) = \sum_{q \leq X} A^*(u, q),$$

$$\mathfrak{S}(u) = \sum_{q=1}^{\infty} A(u, q), \quad \mathfrak{S}^*(u) = \sum_{q=1}^{\infty} A^*(u, q).$$

Let u_1, u_2, \dots, u_U be the integers that are expressible in the form

$$(16) \quad \sum_{s=3}^{18} x_s^{s+1} + \sum_{s=20}^{35} x_s^{s+1},$$

and satisfy $u_i < N/4, i = 1, \dots, U$.

Also let v_1, v_2, \dots, v_V and $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_W$ be the integers expressible respectively in the forms

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 \quad \text{and} \quad x_1^4 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5,$$

and satisfy

$$(17) \quad v_i < N/4, \quad v_i \equiv 0, 1, 2, 3, 4 \text{ or } 5 \pmod{16}, \quad i = 1, \dots, V;$$

$$(18) \quad \omega_j < N/4, \quad \omega_j \equiv 0, 1, 2, 3, 4 \text{ or } 5 \pmod{16}, \quad j = 1, \dots, W.$$

Figure 2. Introduction de quantités et de choix de constantes dans l'article de Thanigasalam.

Write

(19)
$$\theta(\alpha) = \prod_{n=2}^5 f_n(N/2^n, N; \alpha),$$

(20)
$$\Omega(\alpha) = \sum_{i=1}^U e(\alpha u_i), \quad \Omega_1^*(\alpha) = \sum_{i=1}^V e(\alpha v_i), \quad \Omega_2^*(\alpha) = \sum_{j=1}^W e(\alpha \omega_j),$$

(21)
$$A(\alpha) = \theta(\alpha) \Omega(\alpha) f_{20}(1, N/4; \alpha),$$

(22)
$$\Theta(\alpha, q, a) = \prod_{n=2}^5 F_n(N/2^n, N; \alpha, q, a),$$

(23)
$$\theta^*(\alpha) = \{f_4(N/16, N; \alpha)\}^6,$$

(24)
$$\Theta^*(\alpha, q, a) = \{F_4(N/16, N; \alpha, q, a)\}^6,$$

so that

(25)
$$\Omega(0) = U, \quad \Omega_1^*(0) = V, \quad \Omega_2^*(0) = W.$$

Figure 3. Introduction de quantités et de choix de constantes dans l'article de Thanigasalam.

La lecture de telles pages est déjà rebu- tante. Cette observation apporte une clé sur les documents à produire pendant ce groupe de travail, motivant et dessinant petit à petit les objectifs finaux : il faut que la rédaction soit claire et lisible, que les choix soient justifiés et compris. On écrit pour être lu et c'est là un fait important qui change la manière d'écrire sauf lorsque, comme dans le cas d'articles de recherche, on ne s'adresse qu'aux experts. La lecture de ces quelques lignes demande d'emblée un changement d'attitude : l'incompréhension doit susciter la curiosité plutôt que la démotivation, apporter une myriade de questions face à ces choix arbitraires qui resteront tout au long de l'article sans aucune justification ni raison apparente : pourquoi la borne inférieure dans la somme f_n ? pourquoi toutes ces quantités qui n'apparaissent pas naturellement même en connaissant la méthode du cercle ? pourquoi considérer Ω plutôt que la fonction génératrice habituelle ? pourquoi un traitement particulier de f_{20} ? pourquoi le choix pourtant crucial de $X = n^{4/5}$? de $Y = n^{14/71}$? pourquoi ce U ?

ce choix de K_1 ? Cette numérogie demeurera une frustration tout au long de l'article, et ne trouvera jamais de justification ni ici ni ailleurs, hormis auprès de la dizaine de spécialistes du sujet dans le monde qui auront su, d'une manière ou d'une autre, lire entre les lignes et reconstruire la démarche non dévoilée.

Il y a donc ici déjà une attitude qui doit naître face au document : l'esprit critique, la curiosité, le questionnement sans répit. Loin de la victimisation culpabilisée de l'étudiant qui pense qu'il n'est pas à sa place, il doit apprendre que ses questions sont normales et constructives, que c'est le sens de l'étude que de commencer par ne pas comprendre, et la seule voie vers une plus grande compréhension. Le professeur doit lui aussi faire partie de cette recherche : il ne comprend pas non plus car, à la seule lecture de ces lignes, rien ne justifie ces choix, mais ces raisons existent vraisemblablement et c'est la mission du lecteur d'en comprendre le détail : c'est le début d'une quête d'investigation. La démarche proposée par ce module s'apparente donc aux « situations-problèmes » de l'école

primaire, rendant l'étudiant actif et expérimentateur. Pour reprendre la description lucide de Giordan, il est évident qu'« organiser le travail scolaire n'a aucun rapport avec la surveillance de travaux forcés » mais que, au contraire, le rôle de l'enseignant doit être « de concevoir et de distribuer des tâches qui vont mobiliser les élèves et les confronter à des obstacles qu'ils auront envie de vaincre, pas d'esquiver ». C'est ainsi un véritable travail deutéronomique et exégétique auquel les étudiants sont amenés à prendre part, montrant que le travail même des scientifiques, moines modernes, est de réécrire, digérer, raffiner les connaissances. La marche de la science se fait par nombreuses petites mains, et il est important de saisir l'ampleur et la réalité de cette entreprise. Ne pas comprendre redevient la norme, l'effort et l'étude se trouvent enfin réhabilités.

Déroulement du groupe de travail

Le groupe de travail était constitué de trois étudiants en troisième année d'université ainsi que trois jeunes chercheurs, dont aucun ne connaissait la méthode du cercle au-delà de son existence. Nous espérons que cette expérience permettra de poser les premiers jalons d'un module original d'initiation à la recherche et d'apprentissage de la théorie analytique des nombres, réalisable par groupes d'une dizaine d'étudiants pendant un semestre en L2 ou en L3. Une telle expérience pourra également donner des idées aux écoles doctorales et aux directeurs de thèse pour mettre en place des activités de formation pour les apprentis chercheurs.

Le projet s'est déroulé pendant un semestre, de mars à juin 2019, à l'université Sun Yat-Sen, à Zhuhai, en Chine. Il consistait en des séances hebdomadaires ayant lieu tous les mercredis de 16h30 à 18h sous la forme d'un groupe d'étude articulé autour d'une ou deux présentations courtes au tableau par séance. Le déroulement

a été structuré en plusieurs phases, chronologiquement :

- 4 sessions sur la méthode du cercle, basées sur le livre de Vaughan,
- 3 sessions sur l'article de Thanigasalam,
- 3 sessions sur une première adaptation aux puissances croissantes paires,
- 2 sessions sur l'article de Ford,
- 3 sessions sur l'adaptation finale aux puissances croissantes paires.

Le contenu peut être aisément adapté au niveau des étudiants et au temps disponible. Notamment, d'autres possibilités pourraient être d'étudier seulement le livre de Vaughan sur la méthode du cercle, ou encore de se concentrer seulement sur une introduction provenant du livre puis sur le premier essai des puissances croissantes dû à Roth. Toutefois, le plan ci-dessus s'est révélé bien calibré en termes de temps comme de contenu pour un semestre.

L'objectif du groupe de travail n'était pas de lire linéairement le corpus de manière passive, mais bien d'en améliorer notre compréhension en adoptant une attitude active de chercheur. Par-delà l'objectif de lire le corpus bibliographique et de rattraper l'état de l'art sur le problème posé, le but principal était celui de comprendre, menant les étudiants non pas seulement à connaître quelques bribes théoriques et intuitions vagues, mais également à savoir refaire, adapter à des variations, privilégiant ainsi les strates élevées des classifications modernes des évaluations de compétences, visant la maîtrise des concepts plutôt que leur étalement superficiel. Par ailleurs le fonctionnement en groupe est non seulement une source de motivation supplémentaire mais également un facteur d'apprentissage : cela est l'un des fruits de la thèse socioconstructiviste de Vygotski, qui souligne l'importance de l'interaction dans la

construction de la connaissance, non seulement de l'interaction avec le professeur mais aussi et surtout de l'interaction entre différents apprenants. Cette diversification des compétences et de leurs niveaux de maîtrise forment une direction fondamentale que doit prendre l'enseignement pour répondre à une plus grande richesse des élèves et des corps de savoirs, et surtout pour intégrer le besoin fondamental d'action des élèves. Ainsi que le reconnaît le socle commun de connaissances,

« *Chaque grande compétence du socle est conçue comme une combinaison de connaissances fondamentales pour notre temps, de capacités à les mettre en œuvre dans des situations variées mais aussi d'attitudes indispensables tout au long de la vie, comme l'ouverture aux autres, le goût pour la recherche de la vérité, le respect de soi et d'autrui, la curiosité et la créativité.* » (Socle commun de connaissances, 2006)

Chaque séance était articulée autour d'un point technique spécifique dont l'orateur avait pour mission de faire l'exégèse, présentant les idées, les arguments précis, l'insertion dans le contexte plus large de l'article étudié, et de discuter des limites et avantages de la méthode. Cela se faisait notamment à la lumière du projet inédit proposé : en quoi la méthode est-elle générale ou très spécifique au cas de l'article ? peut-on faire des choix différents et comment s'assurer de l'optimalité de son application dans l'article étudié ? Les autres membres du groupe de travail devaient lire les parties présentées avant la session, pour avoir une idée de la démarche et des arguments et pouvoir se concentrer sur le tout en prenant du recul. Un tel fonctionnement force une mise en situation autonome des étudiants, ne pouvant se contenter de suivre passivement, développant leur confiance en eux, forçant leur investissement dans la préparation et ouvrant la voie à des

discussions. L'emphase était donnée à la compréhension des arguments techniques, à leur place dans la démarche globale ainsi qu'à la raison pour laquelle le choix de méthode était privilégié. Les variations et tentatives de généralisation étaient toujours attendues, vivement encouragées et guidées. La structure des activités proposées était ainsi conçue de sorte à favoriser l'implication des étudiant et l'interactivité des sessions, mettant ainsi en place un cadre d'expérimentation de groupe.

La mémoire précise de cette étude originale, d'un point de vue pédagogique comme sociologique, nous a paru être un élément important. Le groupe de travail a donc été accompagné d'un journal d'étude, mis à jour après chaque session par un membre autre que l'orateur, où le contenu de l'exposé, les remarques heuristiques, les difficultés, réflexions et idées ont été consignés. Ce journal était alors relu par les autres membres, amendé ou complété si nécessaire, donnant ainsi un outil de travail complet, personnalisé et adapté aux membres du groupe. Cette formalisation collective a été l'occasion d'un moment systématique de synthèse, de bilan des connaissances acquises et de leurs limites, cristallisant une importante prise de recul réflexive de chacun comme du groupe. Ce journal se révèle ainsi, tout comme le projet de recherche inédit, comme un « texte intermédiaire » si fondamental à l'appropriation active des connaissances.

Pluralité des compétences

Il nous semble important de synthétiser ici les arguments théoriques en faveur de la démarche adoptée au cours de cette activité proposée, identifiant les savoirs, savoir-faire et savoir-être développés par une telle approche. Ceux-ci se sont dévoilés tout au long du groupe de travail, dont l'expérience a permis de mettre au jour les besoins, les

attentes et les compétences nécessaires aux étudiants.

Nous soulignons notre attachement à la notion de compétence, qui permet de rendre compte des différentes dimensions que nous cherchons à dégager : l'évaluation doit cesser d'être cette vision unidimensionnelle chiffrée à laquelle on souhaiterait réduire les individus. Il est primordial de rendre l'évaluation multidimensionnelle comme le sont les compétences et comme le sont les étudiants. C'est la raison pour laquelle nous avons suivi les recommandations des évaluations formatives provenant des études récentes en sciences de l'éducation, visant à faire progresser les étudiants en identifiant le niveau de maîtrise et en clarifiant les attentes.

Pour chaque compétence identifiée lors du groupe de travail, nous avons choisi de nous inspirer des classifications de Bloom ainsi que de Biggs et Collins en termes de formulation, de qualification du degré de compréhension attendu ainsi que de critères d'évaluation. Nous espérons qu'un tel choix facilitera la lecture des compétences ainsi dégagées, et fera de ce bilan un outil fonctionnel de mise en pratique future. Ainsi, pour chaque compétence seront détaillés :

- un retour d'expérience ;
- la formulation de la compétence identifiée ;
- le niveau de maîtrise attendu ;
- des critères d'évaluation en quatre niveaux : insuffisant, acquis, maîtrisé, surpassé.

L'intégration d'un niveau « surpassé », correspondant à un étudiant allant au-delà du niveau décrit dans la compétence, nous semble importante. Cela permet de valoriser le dépassement des critères, toujours limités, de l'évaluation.

Une telle segmentation en niveaux paraît pertinente pour améliorer la lisibilité de l'évaluation. Sa clarté, sa simplicité et sa précision rendent également possible une auto-évaluation ainsi qu'une évaluation par les pairs. Cette association des étudiants à leur propre évaluation permet de forcer une posture réflexive et critique, de nouer un dialogue entre professeur et étudiant concernant les attentes de chacun, et de rendre compte de la progression tout au long de l'année. L'étudiant est ainsi acteur de sa formation comme de son évaluation, lui permettant d'embrasser les attentes et de se responsabiliser. Une évaluation par compétences et par niveaux d'attentes permet ainsi de faire de l'évaluation un outil pédagogique, un guide de progression pour l'étudiant, amené à comprendre les attentes et à gérer ses efforts en ayant conscience de ses forces et de ses faiblesses.

Savoir-faire

Gestion de projet

Retour d'expérience. La première difficulté se manifestant, compte tenu du format du groupe de travail, est celle de la gestion d'un projet à long terme. Le groupe s'attaquant à un problème riche et complexe, il est nécessaire d'être capable d'en structurer l'étude en sous-questions autonomes, en étant conscient du calendrier et des tâches restantes, exigeant de faire des choix. Chaque orateur était ainsi chargé de réfléchir aux possibles suites à donner à son exposé, présentant différentes pistes pour l'orateur suivant, devant ainsi prendre conscience des difficultés, de la longueur, de la marche générale des arguments ; en un mot : être capable de situer la connaissance nouvelle dans un cadre global. Chaque phase disposait *a priori* de quatre semaines allouées, donnant une idée de ce qui était faisable ou non, tout en restant adaptable aux envies et besoins.

Compétence. Prendre des décisions ; organiser un calendrier ; préciser les tâches de chacun.

Niveau de maîtrise attendu. Proposition d'un objectif clair pour l'exposé suivant ; capacité à estimer le temps et la faisabilité.

Critères d'évaluation. La compétence est

- insuffisamment développée si aucune proposition n'est faite ou si elle se limite à suivre chronologiquement le texte de manière non pertinente ;
- acquise si l'étudiant propose le contenu ou la direction avec laquelle poursuivre de manière pertinente ;
- maîtrisée si l'étudiant propose une voire deux possibilités de continuation en l'insérant en perspective dans le projet, apportant des délimitations claires et des références précises, ayant une idée du contenu de sorte à en estimer l'intérêt, la longueur et la difficulté.

Écriture d'un journal de recherche en LaTeX

Retour d'expérience. L'écrit comme l'oral doivent être réhabilités dans leurs aspects constitutifs de l'action, et non plus comme vecteurs passifs de la copie ou de la réponse mécanique et limitée à quelques mots : l'appropriation des idées et des connaissances passe par leur formulation écrite et orale. Le modèle proposé, articulé autour d'un journal, a ainsi créé un cadre de manipulation et de synthèse systématiques, écrit comme oral.

Chacun a dû réfléchir à la manière de tenir un journal de recherche, écrire au fur et à mesure les difficultés identifiées comme celles qui ont été vaincues, synthétiser les exposés de ses camarades. Cela nécessite de faire des choix de structuration et d'avoir un

esprit de synthèse, mettant en mots les idées simples et rendant compte des démarches et des techniques rencontrées, y compris de manière partielle. Il a notamment fallu se confronter aux codes de la rédaction scientifique tant pour le journal que pour le projet final : comprendre les conventions de ponctuation des équations, de citations bibliographiques, de structuration du corps du texte, de l'écriture des introductions, etc. Par ailleurs, cela a été l'occasion pour les étudiants de s'initier à LaTeX, le traitement de texte utilisé par la communauté des chercheurs en mathématiques, informatique et physique. Cette mise en situation remplacerait aisément un cours magistral douteux dédié à l'utilisation d'un logiciel de traitement de texte.

Compétence. Synthétiser les informations mathématiques ; respecter les conventions de rédaction ; utiliser LaTeX.

Niveau de maîtrise attendu. Résumés contenant l'essentiel des arguments mathématiques des exposés des camarades ainsi que quelques remarques heuristiques, rédigés dans un fichier LaTeX fonctionnel.

Critères d'évaluation. La compétence est

- insuffisamment développée lorsque de nombreux arguments mathématiques sont manquants ou faux, ou que le fichier LaTeX dysfonctionne ;
- acquise lorsque le contenu des exposés est essentiellement repris dans le document et que le fichier LaTeX est compilable ;
- maîtrisée lorsque l'étudiant est investi dans la rédaction du journal qui est mis en forme, clair et complet, et qu'il manifeste un travail de synthèse des contenus. Il doit également participer activement à la relecture, aux propositions et aux critiques de ce qui est rédigé par ses camarades.

- C'est ici un exemple où le critère « surpassé » trouve une bonne illustration, et pourrait s'appliquer à un élève investissant du temps pour développer une maîtrise de bibliothèques particulières de LaTeX, ainsi Tikz qui permet de dessiner des schémas qui serviraient à illustrer de manière synthétique la compréhension de certaines preuves ou de la démarche globale.

Présentation des exposés

Retour d'expérience. Le cœur des sessions du groupe de travail demeure la présentation d'exposés. Ces exposés sont un défi conséquent pour les étudiants : outre leur aspect technique et leur longueur, ils nécessitent tout d'abord de faire des choix de présentation et de faire preuve d'esprit de synthèse, le temps imparti ne permettant pas d'exposer tous les détails. Ces choix doivent être guidés par un minimum de compréhension globale de la structure de l'article et de ses nouveautés comparées aux travaux précédents, nécessitant une certaine réflexivité permanente sur l'état d'avancement de l'étude. De plus, l'exposition orale constitue un exercice à part entière, demandant de vaincre sa timidité, gérer son temps, utiliser l'oral pour faire vivre l'écrit qui n'est alors qu'un support, utiliser l'espace au tableau à bon escient, et être réactif et proactif dans sa relation avec l'auditoire. Cet exercice, complet et exigeant, est un défi trop rarement proposé aux étudiants — pour des raisons évidentes de temps et de logistique — mais nécessaire. Repousser cette difficulté à des moments pesants que sont les soutenances de mémoires de master ou de thèse, qui ont rarement pour objectif principal le développement de ces compétences, crée des situations difficiles à gérer pour l'étudiant. Les exposés réguliers au sein du groupe de travail permettent donc de proposer

plus d'opportunités de prises de parole autonomes au tableau pour des exposés formels, dans une ambiance moins pesante que celle d'une présentation notée, et d'accompagner les étudiants dans leur progression.

Compétence. Présenter un exposé mathématique clair.

Niveau de maîtrise attendu. Faire des choix de présentation en cohérence avec son niveau de compréhension et le temps disponible ; parler et écrire distinctement en ayant conscience de la présence d'un auditoire ; gérer efficacement son tableau ; susciter des questions et y apporter des éléments de réponse.

Critères d'évaluation. La compétence est

- insuffisamment maîtrisée lorsque l'exposé est difficilement intelligible ou que les arguments sont présentés avec un manque de compréhension ou de cohérence évident ;
- acquise lorsque la présentation est faite mais demeure proche de notes écrites, donnant un exposé plutôt magistral ;
- maîtrisée lorsque les exposés sont clairs et que l'interaction avec le public est fluide et pertinente, notamment concernant la réponse aux questions et la synthèse des idées et arguments, mais aussi l'alimentation de la discussion avec les camarades concernant les parties qui ont été préparées par tous.

Lecture de littérature scientifique

Retour d'expérience. Un autre aspect conséquent de ce module est la nécessité d'affronter la lecture d'articles de recherche. Le livre de Vaughan est elliptique. La recherche bibliographique parallèle fait donc partie intégrante des activités de préparation du groupe de travail, et nécessite en particulier d'être capable de se

repérer dans un article qui n'est pas lu dans son intégralité. Ces renvois bibliographiques sont une réalité de tout terrain scientifique, et la lecture des articles de recherche ou des ouvrages mathématiques se fait essentiellement de manière non linéaire.

C'est aussi un premier contact avec l'ampleur de la littérature existante, nécessitant de faire le deuil de la maîtrise absolue, illusion classique des cours bien ficelés pour un semestre dont la bibliographie est limitée à un polycopié lisible du début à la fin, linéairement et sans zone d'ombre.

La lecture en anglais est également nécessaire, et demeure inévitable dans le milieu scientifique. Un niveau d'anglais très élémentaire permet de comprendre les articles mathématiques, dont la syntaxe et le vocabulaire sont somme toute assez limités. Il va sans dire que les lacunes en anglais ainsi que la peur d'affronter des documents dans cette langue sont répandues parmi les étudiants de master et jeunes thésards, et constituent un obstacle conséquent à surmonter. Il nous semble insensé de ne jamais aborder les deux disciplines de pair, alors que c'est un besoin des étudiants et un outil incontournable pour la majorité des métiers scientifiques.

Compétence. Lire des articles scientifiques en langue anglaise ; être capable de récupérer des informations et de comprendre la structure d'un article de manière ciblée, sans en lire l'intégralité ; être conscient des arguments prouvés et des résultats admis.

Niveau de maîtrise attendu. Comprendre l'importance des références bibliographiques, décidant de la nécessité de présenter ou non une preuve, choisissant le niveau de détail.

Critères d'évaluation. La compétence est

- insuffisamment développée si les articles connexes ne sont pas consultés, que les preuves sont présentées en mimant sans comprendre chaque argument incomplet ;
- acquise lorsque les informations sont recherchées et identifiées sans être nécessairement remises en contexte ni explorées ;
- maîtrisée lorsque les exposés sont auto-contenus et que les arguments d'autorité bibliographique laissent la place à des idées simples et claires résumant les preuves lues ailleurs, la recherche bibliographique étant réalisée en autonomie et condensée avec un esprit de synthèse.

Programmation

Retour d'expérience. Les articles les plus récents de Ford font appel à des algorithmes numériques. Si ceux-ci peuvent être compris à la lecture des articles comme des outils existants et explicites, ils doivent nécessairement être implémentés lors de l'adaptation au problème inédit proposé. Ainsi, cela a été l'occasion pour certains d'entre nous de s'initier au langage informatique Python ou à l'interface mathématique Sage, et d'affronter des problèmes de temps de calcul conséquent nécessitant de l'optimisation algorithmique. Un premier contact avec ces langages de programmation et avec l'interaction possible entre mathématiques théoriques et expérimentation numérique est un atout qui devrait être plus systématiquement mis en avant dans l'enseignement des mathématiques, ainsi qu'il le devient en classe préparatoire ou à l'agrégation. De plus, des bases de programmation et la capacité de se servir de l'outil informatique pour expérimenter sur des théories abstraites et comprendre la limite des modèles utilisés est un regard critique attendu dans de nombreux métiers scientifiques et techniques, en phase avec les technologies disponibles.

Compétence. Implémenter de manière simple des algorithmes donnés, en Sage ou en Python ; se servir de ces outils comme une base d'expérimentation.

Niveau de maîtrise attendu. Être capable de coder dans un langage informatique ; expérimenter et explorer la situation inédite étudiée en se basant sur le problème initial et les remarques heuristiques des articles lus ; commenter le code et vérifier sa correction.

Critères d'évaluation. La compétence est

- insuffisamment développée lorsque l'implémentation n'aboutit pas ;
- acquise lorsque l'implémentation est fonctionnelle et que la vérification des données fournies dans les articles est réalisée ;
- maîtrisée lorsque l'étudiant est de plus capable de faire des simulations variées et de présenter des résultats pertinents suscitant la discussion et contribuant au problème initial.

Savoir-être et attitudes

Esprit critique

Retour d'expérience. L'esprit critique, érigé en modèle de la pensée scientifique depuis Descartes, est dans cette entreprise assuré par la présence d'un public investi dans le même projet. Le caractère inédit de la mission évite de se reposer sur un texte déjà écrit que l'on suit passivement par une certaine paresse intellectuelle de vérifier les détails des calculs et arguments. C'est en se préparant aux questions du public, qui fait office de malin génie cartésien, que l'on doit se conformer au critère d'honnêteté intellectuelle : il devient nécessaire de se poser des questions sincères sur la raison d'être des concepts, la limite des théorèmes, la raison des choix. Cela n'interdit pas l'incompréhension,

mais exige qu'elle soit déclarée honnêtement comme telle, permettant de montrer les difficultés et de profiter des points de vue extérieurs. Il est ainsi nécessaire de contrôler la validité des arguments, les compléter au besoin, et identifier clairement l'importance et la valeur de vérité de chaque étape tout en étant conscient de la limite des preuves proposées.

Compétence. Esprit critique ; honnêteté intellectuelle.

Niveau de maîtrise attendu. Capacité à vérifier les preuves, à discerner les résultats entièrement prouvés des résultats admis ou reposant sur des résultats non compris.

Critères d'évaluation. La compétence est

- insuffisamment développée si le texte et les arguments ne sont pas appropriés, si la vérification se contente d'être une vague mimique sans pouvoir répondre à des questions ou vérifier les arguments ;
- acquise lorsque les résultats admis ne sont pas entièrement explorés ou questionnés mais que la démarche est de chercher systématiquement la justification des énoncés ;
- maîtrisée lorsque les vérifications sont faites, les difficultés déclarées et commentées, et les dépendances des résultats ainsi que leur portée et de leurs limites mises en avant.

Curiosité et investigation

Retour d'expérience. À l'inverse de l'aspect formaté des cours et examens habituels de l'université, l'activité de recherche est une démarche d'investigation, nourrie de liberté, d'essais et d'erreurs. Le problème inédit proposé, véritable compagnon de l'étude, devient ici la paille d'expérimentation du groupe. Il force des essais infructueux, instaurant un véritable

« espace de réflexion inédit » permettant d'identifier les obstacles et de les surmonter, plutôt que d'apprendre à mimer des solutions d'exercices stéréotypés. Les étudiants sont amenés à développer de nouveau une certaine impunité à faire des tentatives, à retrouver une curiosité perdue, une âme d'enfant n'ayant plus peur de l'échec nécessaire à la recherche. Cette incitation à l'audace et cette désacralisation de l'échec est fondamentale et mérite de faire partie intégrante des compétences valorisées. Suivons les mots de Grothendieck, qui soulignent justement que cette audace seule peut mener à la découverte :

« La découverte est le privilège de l'enfant : l'enfant qui n'a pas peur d'avoir une fois de plus tort, de passer pour un idiot, de ne pas être sérieux, de ne pas faire les choses comme tous les autres. »

Compétence. Être force de proposition ; prendre des risques.

Niveau de maîtrise attendu. Capacité à proposer des pistes alternatives, à faire des essais infructueux mais pertinents, à formuler des idées et pouvoir les explorer formellement.

Critères d'évaluation. La compétence est

- insuffisamment développée si l'étudiant se limite à répéter ce qui est déjà dans le texte, suivant systématiquement les mêmes démarches, les mêmes calculs, utilisant les mêmes valeurs ;
- acquise lorsque des idées sont reformulées et des tentatives de variations sur des calculs simples sont réalisées ;
- maîtrisée lorsque des propositions sont faites et explorées pour comprendre les zones d'ombres des articles ou adapter les arguments au cas des puissances croissantes.

Travail d'équipe

Retour d'expérience. Le projet inédit proposé est essentiellement un travail d'équipe, que les préparations se fassent seul ou en petit groupe. Il est important de développer cette conscience de l'équipe : c'est une motivation supplémentaire, qui exige aussi un investissement conséquent en communication et en organisation, appelant à assumer des responsabilités, à affronter une réalité de la vie professionnelle de demain.

Ce fonctionnement évite également la solitude souvent caractéristique des formations scientifiques, donnant une réalité sociale, et non plus seulement abstraite, à la pratique mathématique. Travailler à plusieurs présente ses avantages tout comme ses inconvénients, requérant de partager sa réflexion, son écriture, sa vision, apprenant à collaborer et à converger vers une présentation et un contenu qui conviennent à tous. Cela constitue une véritable gestion de projet en groupe. La recherche reste une activité discursive et communautaire, il est important de préparer les étudiants à cet aspect de collaboration et de partage, avec ses aspects positifs comme négatifs, qui sera aussi une expérience bienvenue en entreprise.

Cela soulève aussi le problème du nombre d'étudiants admissible pour un tel groupe de travail. Un nombre trop élevé de participants est difficile à gérer, ne pouvant même garantir que chaque étudiant expose plus d'une fois, limitant *a priori* un tel module à une dizaine d'étudiants. Il faut trouver un juste milieu entre la séparation du travail et l'augmentation de la complexité de gestion et de communication au sein d'une classe de taille croissante. Si une organisation en petits groupes permet de partager les tâches, chacun doit cependant travailler et préparer par soi-même, comme condition nécessaire à l'épanouissement de la discussion et à

l'apprentissage de tous. Ainsi, un groupe d'une dizaine de personnes semble être une taille idéale, sans que cela ne condamne la possibilité de faire fonctionner le module avec plus, notamment en fonctionnant par petits groupes qui prépareraient ensemble les exposés et se partageraient les tâches équitablement. Cela nécessite une plus grande autonomie de la part des étudiants, ou un suivi plus précis de la part du professeur pour répartir et contrôler la réalisation de chaque tâche.

Compétence. S'intégrer dans une équipe ; définir des tâches et des responsabilités ; remplir son rôle ; construire sur le travail des autres.

Niveau de maîtrise attendu. Travailler de pair avec les camarades plus compétents sur certaines parties, s'organiser pour séparer les tâches et faire des exposés à plusieurs, respecter les décisions et le calendrier de l'équipe.

Critères d'évaluation. La compétence est

- insuffisamment développée si l'étudiant fonctionne de manière isolée ;
- acquise si l'étudiant n'est pas isolé et est capable de renvoyer les questions ou les tâches aux personnes ayant déjà travaillé sur le thème en particulier ;
- maîtrisée lorsque l'étudiant est un moteur pour le groupe, comprend les compétences et disponibilités de chacun, demeure accessible et clair.

Valeurs

Certains acquis du groupe de travail sont limités à la mise en contact avec une situation ou un environnement nouveau, ce que nous pourrions qualifier d'acquis passif. Nous estimons que ces acquis sont également un réel apport pour les étudiants, et doivent être mis en avant comme une expérience de vie académique, une

ouverture d'esprit et un premier contact avec d'autres réalités que la participation à un cours universitaire magistral. Cloîtrer les étudiants dans l'illusion que tous les sujets sont maîtrisables intégralement avec une seule approche possible ne fait que repousser des difficultés inéluctables dans la vie d'un scientifique : se confronter à des situations inconnues, identifier des obstacles précis, les comprendre et y apporter des solutions maîtrisées.

Nous mentionnons ici des modes d'être qui nous ont parus développés par ce module d'exploration, et qui nous semblent importants pour le développement des étudiants, notamment concernant leur attitude. Ces directions n'ont toutefois pas laissé place à des critères d'évaluation précis, de sorte que nous les avons qualifiés de valeurs plutôt que de compétences.

Patience et persévérance

La patience et la persévérance sont parmi les clés les plus fondamentales du travail mathématique. Les concepts et outils nouveaux ne sont jamais faciles à appréhender et il n'y a guère plus de méthode que la manipulation répétée, avançant par petits pas, modelant son intuition suffisamment pour qu'elle absorbe le concept nouveau, forgeant sa compréhension par la pratique.

La temporalité n'est ainsi plus celle du cours universitaire classique, où un théorème est prouvé en quelques minutes, où plusieurs exercices sont faisables en une session de travaux dirigés et où toute tâche doit être terminée à la fin de la journée. Le monde de la recherche en est à l'antipode et les projets mathématiques, comme les projets professionnels, s'étendent sur semaines, mois sinon années. Il est nécessaire de souligner cette spécificité, de développer la patience, la persévérance, la conscience du temps long nécessaire pour venir à bout d'un problème, d'efforts

répétés et réguliers tout en gérant le temps disponible. La structure du groupe de travail, fonctionnant avec un rythme hebdomadaire sur un même problème, loin de la valse des chapitres et évaluations d'un cours classique, s'insère dans cette démarche et donne une première expérience du projet à long terme. C'est une leçon de management personnel qui ne doit pas être négligée dans l'apport de telles activités.

Il ne faut plus avoir peur de l'inconnu, chacun étant condamné à rencontrer incessamment des situations qu'il ne comprend pas, face auxquelles il ne saura pas réagir, du chercheur face à son problème mathématique jusqu'à l'artisan face à son défi de réalisation, en passant par l'ingénieur qui doit concevoir un nouveau produit. C'est dans l'incompréhension que naît la connaissance, et les travaux récents en pédagogie mettent systématiquement en avant l'importance de ce « conflit cognitif [rendant] possible de nouveaux apprentissages », moment de déstabilisation nécessaire aux étudiants pour surpasser leur niveau de maîtrise. Ce projet inédit et le module que nous proposons sont donc là pour apprendre à comprendre, développer la démarche, enseigner comment affronter ce moment qui semble insurmontable. Ne plus comprendre n'est plus un problème, mais devient une norme.

Transversalité

Un apport conséquent du point de vue du contenu théorique de ce module est la transversalité qu'il apporte entre des domaines souvent considérés comme indépendants : arithmétique modulaire, analyse réelle, séries numériques, analyse de Fourier, combinatoire. Certaines des idées maîtresses de l'analyse – l'approximation – et de l'arithmétique – le principe local-global – sont le cœur de l'étude, s'entremêlant pour constituer un sommet de chaque grande étape de la preuve. Ce module devient

ainsi un très bon moyen de convaincre les étudiants de l'importance de la maîtrise des méthodes de base qui ne restent, dans les cours d'un cursus classique, que des avalanches de résultats théoriques et d'exercices. Ces contenus, auxquels se limitent trop exclusivement les cours de mathématiques à l'université, ont pour seul objectif de noter, plutôt qu'une finalité en tant qu'outil mathématique permettant d'aborder des problèmes. La pédagogie et l'enseignement contiennent aussi leur dose de psychologie : le professeur enseigne à des humains et non à des cahiers qui boiront textuellement leurs théorèmes, ce que l'on attend trop de nos étudiants, vivant dans un temps reculé, où ces résultats n'étaient pas dans notre poche, sur notre téléphone, partout dans le monde. Nous suivons Michel Serres, défendant qu'il est important d'apprendre à penser avec son temps, de libérer l'esprit de cette érudition malade, pour plutôt apprendre à vivre, à agir, à s'organiser ensemble. Et voilà que tous les étudiants se trouvent investis, voilà qu'une motivation vient de l'appartenance à un groupe, et d'une finalité plutôt que de l'entassement de résultats. Les connaissances gagnent du relief, les étudiants prennent du recul, la réflexion prend vie.

Adaptabilité et différenciation

Les élèves les plus scolaires vont naturellement en classe préparatoire, de sorte qu'il serait plus lucide d'essayer de tirer le meilleur des étudiants en licence à l'université en leur proposant aussi des approches qui se démarquent de ce qui leur convenait moins dans le système scolaire. En particulier, cette activité d'initiation à la recherche permet une certaine liberté d'organisation, chacun devant faire un bilan honnête de ses compétences et de ses difficultés. Les étudiants suivent leur progression à la lumière des attentes rendues explicites, se concentrent sur l'exploration de ce qui le motive et le rend à l'aise, y décuplent leurs capaci-

tés et leur donnent la motivation pour saisir et travailler le reste, qui prend alors sens comme partie d'un tout plutôt que comme une exigence isolée de plus. Ainsi, lors de ce groupe de travail spiralaire, chaque personne se concentrait sur l'une des parties qu'il n'avait pas explorées lors des articles précédents, endossant un rôle différent tout en continuant à prendre du recul sur son expérience, prenant en charge la synthèse, la relecture, et surtout servant d'interlocuteur privilégié concernant ses domaines de compétence déjà développés. Ainsi, la course aux chapitres, théorèmes et exercices est remplacée par un effort proportionné, certains étudiants pouvant parcourir des sujets plus variés quand d'autres préféreront devenir essentiellement experts dans l'un des domaines, ou avancer moins rapidement pour mieux comprendre la démarche ou s'investir plus avant dans des compétences transverses associées.

Il est ainsi absolument nécessaire de « mettre en synergie les apports scolaires attendus et les apports personnels singuliers propres à chaque individu ». Ces singularités sont primordiales dans la société et sont la richesse de l'humanité, y compris en mathématiques et dans la pratique scientifique. Cette richesse existe et ne doit pas être lissée par des décennies d'un enseignement froid, passif et formaté, mais au contraire être exploitée pour développer la confiance et créer des synergies entre ces profils variés.

Savoirs

Méthode du cercle

Le cœur de ce groupe de travail demeure la méthode du cercle de Hardy-Littlewood. Par-delà les seules connaissances brutes constituant cette méthode, ce que chacun pourra trouver dans les livres comme sur Internet, le groupe de travail vise un niveau de maîtrise,

d'autonomie et de recul élevé, au détriment du nombre d'exemples traités, abondant dans le sens des études cognitives récentes. Le bilan des connaissances disciplinaires apprises et explorées est similaire au contenu d'une première partie d'un cours usuel sur la méthode du cercle, à savoir

- approximation diophantienne ;
- dissections de Farey ;
- lemme de Weyl et bornes sur les sommes d'exponentielles ;
- lemme de Hua et comptage diophantien ;
- équation modulaire, série et intégrale principales ;
- initiation à l'implémentation algorithmique.

Ces connaissances académiques classiques sont évaluables et ne sont pas détaillées faute de pertinence avec les objectifs de cet article, préférant mettre l'accent sur les aspects novateurs et divers des autres compétences développées. Un cours typique sur la méthode du cercle contiendrait quelques applications supplémentaires, par exemple certains des chapitres illustratifs du livre de Vaughan. Ceux-ci ont été remplacés ici par le projet inédit du problème de Waring pour les puissances croissantes et l'étude des deux articles de recherche, permettant d'étudier en profondeur la portée et les limites de chacun des outils étudiés lors de la première partie, se concentrant sur la capacité à mettre en relation les idées, comparer les méthodes et généraliser les acquis théoriques.

Ainsi, la connaissance livresque demeure dans les livres et chacun est invité à la consulter, mais les heures en présentiel deviennent dédiées à la plus-value apportée par le professeur, endossant le rôle d'encadrant et d'accompagnateur, créant le cadre d'épanouissement et d'évolution des élèves. L'inerte et le mécanique

sont donc relégués au travail à la maison, chacun pouvant l'affronter et l'embrasser à son rythme, alors que les approches et compétences nouvelles reviennent au cœur de l'enseignement et du rôle du professeur, surpassant le rôle de répétiteur et de lecteur qui lui est habituellement assigné. Élèves comme enseignants sortent de la passivité pour instaurer un échange sincère faisant vivre les connaissances sur un mode nouveau.

Un sujet actuel

La simplicité de l'énoncé du problème et des outils utilisés fait de la méthode du cercle un sujet souhaitable pour de plus jeunes étudiants, qui pourraient ainsi y trouver une motivation pour l'étude des outils théoriques des programmes de licence, y trouvant une première instance de problème de recherche à la fois actuel et accessible, attirant leur curiosité et donnant du sens à leurs études. En effet, le fait d'étudier des articles de recherche récents voire encore actifs est une forte motivation. La méthode du cercle est au cœur de nombreuses recherches actuelles : de brillants résultats conjecturés depuis plus d'un demi-siècle ont été récemment obtenus avec la preuve du théorème de la valeur moyenne de Vinogradov par Bourgain, Déméter, Guth et Wooley ; des évolutions novatrices ont été apportées par Munshi ; et Harald Helfgott a obtenu de très bonnes avancées dans la direction de la conjecture de Goldbach en prouvant sa version ternaire grâce à la méthode du cercle. Cela donne ce qu'il manque souvent dans les formations théoriques en mathématiques : du concret, des perspectives, du sens ; un ancrage dans le monde et dans le temps.

La méthode du cercle et le cas particulier étudié constituent donc des sujets des plus actuels, mais se fondant toutefois sur des connaissances élémentaires de début de premier cycle universitaire. L'étude et l'utilisation

conjointes des notions les éclairent l'une-l'autre, ce que nous illustrons dans la section suivante à travers quelques exemples plus précis de déroulement de sessions du groupe de travail.

Bilan du groupe de travail

Utilisation de la méthode du cercle

Cette section, plus technique, se destine à un lectorat plus expert ou plus curieux. Nous rappelons dans un premier temps la structure de la mise en œuvre de la méthode du cercle, qui consiste en trois étapes d'approximations successives de cette quantité, puis une étape d'estimation directe des quantités ainsi approchées.

Étape 1. Il s'agit de prouver que la contribution des arcs mineurs est négligeable. Pour ce faire, on utilise des bornes intégrales explicites. Nous sommes alors réduits à estimer

$$R(n) = \int_{\mathfrak{M}} f(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha + \int_{\mathfrak{m}} f(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha$$

$$R(n) \sim \int_{\mathfrak{M}} f(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha .$$

Étape 2. Sur les arcs majeurs, concentrés par définition autour de rationnels a/q , chaque fonction f_k est assez proche de sa valeur en a/q . Il devient donc naturel d'introduire une approximation de f_k avec un facteur oscillant autour de a/q . Plus précisément, on définit la version approchée F_k de f_k par :

$$S_k(q, a) = \sum_{m=1}^q e\left(\frac{a}{q} m^k\right)$$

$$\delta_k(\beta) = \sum_{m=n}^1 \frac{1}{k} m^{1-1/k} e(\beta m)$$

$$F_k(\alpha) = \frac{1}{q} S_k(q, a) \delta_k(\beta) .$$

La deuxième étape consiste alors à remplacer les fonctions f_k par leur approximation F_k , au prix d'un terme d'erreur suffisamment petit. Cela nécessite essentiellement des estimations d'analyse des fonctions d'une variable réelle et de sommes d'exponentielles.

On est ramené à considérer, en introduisant la fonction $F = \prod_K f_k$ approchant f ,

$$R(n) \sim \int_{\mathbb{R}} f(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha \sim \int_{\mathbb{R}} F(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha$$

Étape 3. Les intégrales de sommes d'exponentielles sont plus faciles à estimer sur tout le segment unité plutôt que sur les arcs majeurs, de sorte que la troisième étape est de montrer qu'on peut ajouter les compléments de chaque arc majeur ci-dessus au prix d'un terme d'erreur, et de fait montrer

$$R(n) \sim \int_{\mathbb{R}} F(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha \sim \int_0^1 F(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha$$

Étape 4. Il se trouve que cette dernière expression se réduit à un comptage de solutions d'équations diophantiennes modulo des puissances de nombres premiers, problème beaucoup plus abordable que la question initiale. Les connaissances disponibles sont alors suffisantes pour prouver que cette expression est le terme principal, et à vérifier qu'il est asymptotiquement strictement positif, de sorte que $R(n)$ est strictement positif à partir d'un certain rang.

Nous illustrons dans cette section quelques aspects qui ont accouché des discussions menées lors du groupe de travail, lors des différentes étapes mentionnées, soulignant le déroulement et mettant en évidence les compétences en jeu, dégageant des compréhensions originales, absentes des articles de recherche ainsi que du

livre, pourtant introductif, de Vaughan. Les sessions détaillées du groupe de travail sont les suivantes, chacune comprenant un moment de discussion, de recherche, d'essais de preuves différentes, de corrections, ou d'améliorations :

- Livre de Vaughan
 1. Introduction à la méthode du cercle
 2. Outils pour les arcs mineurs
 3. Approximation et complétion sur les arcs majeurs
 4. Série et intégrale singulières
- Premier article de Thanigasalam
 5. Introduction à Thanigasalam et arcs mineurs
 6. Approximation et complétion
 7. Contribution principale
- Premier essai pour le problème des puissances paires
 8. Tentative d'adaptation au problème des puissances paires
 9. Approximation sur les arcs majeurs
 10. Contribution principale, $s = 1200$
- Premier article de Ford
 11. Introduction à Ford
 12. Théorèmes de valeurs moyennes, arcs mineurs et algorithmes
 13. Traitement des arcs majeurs
- Raffinement pour les puissances paires
 14. Détermination de K_1
 15. Termes d'erreurs, $s = 210$
 16. Raffinements de Ford, $s = 74$

Le bilan a été réalisé de manière qualitative à partir des fruits de compréhension du groupe de travail, et des retours et discussions finaux concernant le projet. L'idée d'un questionnaire précis pour synthétiser quantitativement les apports de ce groupe de travail a été abandonnée compte tenu de la faible taille de l'échantillon et de la disparité du public, certains déjà chercheurs et d'autres participant à leur première activité d'investigation. Toute-

fois, d'autres instances d'une telle séquence pédagogique d'initiation à la recherche suivront celle-ci et, nous l'espérons, pourront bénéficier de ces premiers retours d'expérience. En particulier, les compétences dégagées ci-dessus pourront servir à établir une grille de lecture et de progression plus claire à la fois pour les encadrants et pour les élèves.

Nous dressons en particulier le bilan de certaines séances, essayant de dégager pour chacune

- le cadre mathématique et méthodologique dans laquelle elle se place ;
- la question soulevée et les difficultés associées ;
- le déroulement de la séance et les fruits recueillis.

Cette dernière étape a été présentée de manière aussi synthétique que possible, afin d'éviter les enlacements techniques tout en restant auto-contenue à partir des idées de base sur la méthode du cercle mentionnées ci-dessus. Enfin, le journal complet du groupe de travail, détaillant le contenu de chaque séance, est disponible sur la page Internet de l'auteur.

Comprendre la méthode

Cadre. Une première approche de la méthode du cercle peut rebuter, à cause du grand formalisme qui y transparait. Toutefois il est important, comme pour tout sujet d'étude, en mathématiques ou ailleurs, de se forger une intuition forte des idées, une familiarité avec les notations, une habitude des objets. Cela se fait par une lecture de l'ouvrage de référence de Vaughan. Cette première étude servira de base, demeure utile pour toute instance de la méthode du cercle et aurait été le cœur d'un cours classique dédié à ce sujet. Cette base sera raffinée sans cesse au cours des études

suivantes, illustrée à la fois par certains chapitres du livre, les articles étudiés ou encore les essais faits dans la direction du projet d'adaptation inédit. Les deux premières sessions se concentrent donc sur la compréhension du cadre de la méthode du cercle et de ses motivations.

Première question. Dès les premières recherches bibliographiques, une question se dévoile : pourquoi parle-t-on de « méthode du cercle », alors que la méthode ne fait apparaître aucun cercle explicitement ? Le cadre introduit dans la deuxième section fait apparaître une intégrale sur le segment $[0,1]$. Ce segment peut certainement être interprété comme un cercle, puisque l'exponentielle paramètre le cercle à partir du segment, mais une telle explication alambiquée est loin d'être satisfaisante.

Déroulement et fruits. Une recherche plus précise à travers la lecture d'articles introductifs sur Internet et dans les préfaces d'ouvrages dédiés à la méthode du cercle permet de découvrir que l'intégrale considérée était originellement une intégrale sur le cercle unité du plan complexe. En effet, avant la formulation, due à Vinogradov, de la méthode du cercle en termes de fonctions génératrices de Fourier, les fonctions génératrices étaient introduites sous forme de séries entières. Nous avons donc à considérer la fonction

$$F(z) = \sum_{x_2, \dots, x_s \in \mathbb{N}} z^{x_2^2 + \dots + x_s^s} = \prod_{k=2}^s \left(\sum_{x_k \in \mathbb{N}} z^{x_k^k} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} R(n)z^n, \quad |z| < 1,$$

de sorte que, pour isoler le coefficient recherché de manière analytique, on faisait appel au

théorème intégral de Cauchy qui permet d'écrire, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$R(n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,1)} \frac{F(z)}{z^{n+1}} dz,$$

et l'intégrale obtenue apparaît comme une authentique intégrale sur un cercle. Vinogradov introduit par la suite la vision moderne, possiblement motivée par les outils disponibles pour estimer les sommes d'exponentielles. Cela a ainsi permis une meilleure connaissance historique du développement de la méthode, une entrée dans le monde de l'analyse complexe, une prise de conscience de l'existence d'autres possibilités, d'autres choix de fonctions génératrices qui pourraient demeurer plus utiles dans d'autres cadres.

Seconde question. Une autre question qui apparaît à la lecture du cadre général de la méthode, est de comprendre ce qui motive la forme des arcs majeurs et les choix de notations. Pour cela, il faut comprendre plus profondément ce que signifie quantitativement la notion de « petit dénominateur » mise en avant comme motivation intuitive de la méthode.

Déroulement. Chacun a dû préparer des réflexions sur les différents résultats connus d'approximation des réels par des rationnels et faire dialoguer ces connaissances avec la forme particulière choisie des arcs majeurs. Certains souvenirs des premiers cours d'arithmétique sur ce sujet mènent naturellement au théorème d'approximation diophantienne de Dirichlet, qui énonce que tout nombre peut être approché par un rationnel à petit dénominateur :

Lemme. (Dirichlet) Soit $Y > 0$. Pour tout nombre $\alpha \in [0,1]$, il existe $1 \leq a \leq q \leq Y$ avec $\text{PGCD}(a,q) = 1$ tels que

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{qY}. \quad (3)$$

En d'autres termes, il existe une approximation rationnelle de α avec une borne sur la taille du dénominateur, ainsi qu'un contrôle sur la qualité de cette approximation en fonction de la borne imposée sur q . D'un autre point de vue, en se donnant une qualité d'approximation $1/Y$ dans, tous les nombres du cercle peuvent être approchés par un nombre rationnel à dénominateur inférieur à Y .

Ces remarques donnent des indices sur la manière d'appréhender les idées de « petit » ou « grand » dénominateur, on est poussé à quantifier : pour tout $X < Y$, les rationnels a/q avec $q \leq Y$ sont considérés comme des rationnels à petits dénominateurs, tandis que les autres sont considérés comme moins significatifs. Les premiers constituent les arcs majeurs et les seconds, les arcs mineurs. Ainsi, tout nombre du segment d'intégration se trouve approché par un rationnel a/q à $1/qY$ près, avec q dans l'une des deux situations

$$1 \leq q \leq X \text{ (arcs majeurs)}$$

ou

$$X < q \leq Y \text{ (arcs mineurs)}$$

Chacun ayant rencontré le lemme de Dirichlet en première année d'université se souvient assurément d'une étonnante singularité au sein d'un cours, ne venant de nulle part ni n'allant nulle part. Désormais, un tel résultat élémentaire d'analyse diophantienne est vu au détour d'un projet cohérent plutôt que comme une propriété parmi tant d'autres d'un programme qui n'en fera pas usage. Outre des savoirs mieux fixés, ils seront muris par la pratique, révisés sans cesse, de sorte à en développer une aisance technique et intuitive.

Enfin, une motivation importante est que les arcs majeurs sont disjoints. Ils doivent l'être, sans quoi la méthode ne peut fonctionner, les termes principaux s'additionnant plusieurs fois à cause du chevauchement des arcs

majeurs et ne donneront pas le résultat escompté. L'objectif est donc de garantir, avec le choix de paramètres X et Y , que les arcs majeurs restent disjoints au moins pour N suffisamment grand. Ainsi, il est possible de raisonner asymptotiquement et de supposer que X tend vers l'infini avec Y , et on peut supposer pour simplifier que X se met sous la forme d'une puissance de Y . Nous tirons de cette reformulation précise du problème le critère suivant de disjonction des arcs majeurs, où nous rappelons que la notation $f \ll g$ est un synonyme de la relation de domination $f = O(g)$.

Lemme. Pour suffisamment grand, les arcs majeurs sont disjoints si $X \ll Y^{1/2}$.

La preuve consiste à contrôler la distance entre deux centres d'arcs majeurs différents, et d'assurer qu'ils sont plus éloignés que la somme des rayons des arcs majeurs.

Ainsi, pour $a/q \leq a'/q'$, les arcs majeurs sont disjoints si

$$\left| \frac{a}{q} - \frac{a'}{q'} \right| = \left| \frac{aq' - a'q}{qq'} \right| \geq \frac{1}{qq'} \geq \frac{1}{X^2} \geq \frac{1}{Y'}$$

autrement dit, si $X < (Y/2)^{1/2}$, donc asymptotiquement $X \ll Y^{1/2}$. Cette preuve, aussi élémentaire soit-elle, est souvent escamotée dans les ouvrages académiques et les articles alors qu'elle ne requiert qu'une simple vision géométrique du problème. Cela est d'une importance cruciale, puisque le caractère disjoint des arcs majeurs assure que tout $\alpha \in \mathfrak{M}$ appartient à un unique $\mathfrak{M}(q,a)$, de sorte que le couple (a,q) , qui contient l'information arithmétique, est entièrement déterminé.

Ces manipulations au cours de deux séances sur les idées générales de la méthode du cercle ont permis de digérer beaucoup du formalisme, et de donner du sens à ces nombreux para-

mètres. Il est ainsi important de travailler le formalisme pour en développer une habitude, une intuition, pour qu'il devienne un outil et non plus une barrière, sans cacher que c'est un véritable travail, nécessaire et qui demande du temps. Ce travail est le procédé de maturation des idées, si cher à tous les scientifiques : chercher des limites, des interprétations, et confronter sa compréhension à la pratique en gardant toujours un regard critique.

Conclusion. Ces premières sessions ont permis aux idées de chacun d'être confrontées à la compréhension et à la critique des autres, permettant d'obtenir une intuition plus sûre et plus mûre. Si aucun résultat nouveau n'en émerge ni aucune preuve mathématique complexe n'a été développée, cette démarche a demandé de l'autonomie, des essais et erreurs, et une interprétation plus personnelle des mathématiques concernées. Nous défendons que cela a permis non seulement de donner le ton du groupe de travail, discursif et expérimental, mais aussi a assuré une autonomie beaucoup plus grande dans les études d'articles à venir, l'interprétation de ces paramètres centraux de la méthode n'étant plus une barrière à la compréhension.

Arcs mineurs

Cadre. La stratégie pour montrer que la contribution des arcs mineurs est négligeable consiste à décomposer la fonction f en plusieurs parties, disons $f = F_1 F_2 F_3$, et à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour écrire

$$\int_{\mathfrak{m}} f \leq \sup_{\mathfrak{m}} \|F_1\|_{\infty} \left(\int_0^1 |F_2|^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |F_3|^2 \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Tous les articles utilisent une telle décomposition et traitent les trois termes ci-dessus de manières différentes, sans guère de justification, notamment concernant le choix précis des fonctions F_i .

Question. Si l'étudiant est capable de comprendre ligne par ligne les preuves présentées dans les articles, il n'en comprend pas suffisamment les motivations pour pouvoir l'adapter au cadre inédit. Qu'est-ce qui détermine les choix de F_1, F_2, F_3 dans les cas étudiés et comment les déterminer dans la variation choisie pour le groupe de travail ? La paresse intellectuelle est condamnée ici par la conscience d'avoir un cas particulier inédit auquel adapter la preuve. Un raisonnement inductif, telle une analyse-synthèse qui dévoilerait mécaniquement le bon et unique choix à faire, ne mène à rien. Il faut donc chercher une compréhension au-delà de ces outils pour comprendre les choix, en apparence injustifiés.

Déroulement. Le premier terme concernant F_1 nécessite des bornes ponctuelles, et celles-ci sont fournies par l'inégalité de Weyl sur les sommes d'exponentielles f_k . Ce résultat, qui est l'occasion d'une étude d'une session, n'utilise que des outils élémentaires et des estimations de sommes partielles de séries géométriques. Il prend la forme, avec $Q = N^{1/k}$ qui est la taille de la somme des exponentielles définissant f_k ,

$$f_k(\alpha) \ll Q^{1+\epsilon} (q^{-1} + Q^{-1} + qQ^{-k})^{2^{1-k}}.$$

Les commentaires heuristiques sont importants et permettent de comprendre l'intérêt de cette inégalité, d'autant plus efficace que les arcs mineurs (qui donnent une borne inférieure sur q , nécessaire pour dominer q^{-1}) sont petits, et donc justifient un choix d'arcs majeurs aussi grands. De plus, le gain par rapport à la borne triviale (obtenue en bornant chaque exponentielle par 1, menant à une borne d'ordre Q) est très faible à cause de la puissance 2^{1-k} qui décroît très rapidement avec k , rendant l'inégalité de Weyl pertinente essentiellement pour les petites valeurs de k .

Cette discussion justifie que K_1 est amené à être un ensemble constitué de petites valeurs

de k . Toutefois, malgré ce guide heuristique, conserver ce formalisme général permet de rendre le problème d'optimisation du choix de K_1 plus clair et plus souple. En gardant des puissances génériques, on obtient une borne théorique générale

$$\sup_m |F_1| \leq \prod_{k \in K_1} \sup_m |f_k| \ll n^{A(K_1)}$$

où l'exposant général est

$$A(K_1) = \mu_1 - \sum_{k \in K_1} \frac{2^{1-k}}{k} + |K_1| \delta$$

Avec $\mu_1 = \sum_{k \in K_1} k^{-1}$ et la condition plus précise $n^{v-\delta} \leq q \leq n^{1-v+\delta}$.

Le deuxième terme est borné en développant les sommes d'exponentielles, donnant

$$\int_0^1 |F_2|^2 = \sum_{x^k, y^k \leq n} \int_0^1 e\left(\alpha \sum_{k \in K_2} (x^k - y^k)\right) d\alpha,$$

de sorte que les relations d'orthogonalité de l'exponentielle prouvent que cette intégrale est exactement le nombre de solutions de l'équation diophantienne

$$\sum_{k \in K_2} x_k^k = \sum_{k \in K_2} y_k^k, \quad x_k, y_k \in \mathbb{N}.$$

Un comptage relativement grossier du nombre de solutions à cette équation mène alors à la borne $\int_0^1 |F_2|^2 \ll n^{B(K_2)}$,

où l'exposant est donné par :

$$B(K_2) = \max_{1 \leq r \leq \max K_2} \left(\sum_{i < r} \frac{1}{k_i} + 2 \sum_{i > r} \frac{1}{k_i} \right) + \epsilon.$$

Enfin, la dernière étape fait appel à plusieurs outils, parmi lesquels les méthodes itératives ou encore les théorèmes de valeurs moyennes. Ce sont des algorithmes permettant de borner de telles intégrales en fonction de l'intégrale avec une valeur de k en moins, de sorte que les valeurs initiales permettent d'obtenir les valeurs souhaitées itérativement. Des simulations numériques, obtenues par l'implémentation de ces algorithmes classiques dus à Davenport puis à Vaughan et Wooley permettent de constater que les bornes s'améliorent avec l'augmentation de la taille de K_3 . La borne obtenue dépend donc du nombre de puissances choisies dans l'ensemble K_3 définissant F_3 , plus précisément on note

$$\int_0^1 |F_3|^2 \ll N^{C(K_3)}.$$

La borne $C(K_3)$ correspondante nécessite donc d'être suffisamment petite pour que la borne finale dans (4) soit plus petite que $F(0)n^{-1}$, le terme principal attendu. Les trois bornes précédentes donnent donc un problème d'optimisation en les variables X, Y, K_1, K_2, K_3 et s qui donnent conscience, à défaut d'avoir des arguments théoriques d'analyse différentielle permettant de résoudre ce problème, du caractère expérimental nécessaire pour obtenir de bonnes valeurs finales de s . L'expérimentation ainsi que les indications données par les autres étapes de la méthode donnant également des conditions sur X et K_1 , permettant d'obtenir des conditions sur $C(K_3)$ et donc sur s , rendant plus explicite et motivé le choix final de s , dévoilant les raisons limitant le résultat.

Conclusion. Ainsi, la compréhension des quelques outils que sont la loi de Weyl, le comptage diophantien direct et la méthode itérative se fait par essais et erreurs, par simulations pour s'en faire une idée heuristique, puis grâce au formalisme pour en

tirer une compréhension théorique. La prise de liberté pour faire des essais différents de ceux des auteurs, constater leurs défauts et les limites expérimentales de chaque méthode, et introduire de nouveaux paramètres variables pour trouver des conditions justifiant les choix des auteurs, constituent de véritables fruits méthodologiques de ces sessions, par-delà les seules compréhensions théoriques. La manipulation de ces questions face à des défis récurrents, constitués des trois situations abordées par les textes du corpus ainsi que du problème inédit traité, permet une compréhension croissante et une maturation des idées sous-jacentes, des méthodes possibles, des calculs théoriques et formels, de la lecture de textes ainsi que de la prise d'initiative.

Approximation sur les arcs majeurs

Cadre. Une fois les arcs mineurs prouvés comme étant négligeables, nous sommes essentiellement réduits à travailler au voisinage des rationnels à petits dénominateurs. Plus précisément, l'étude quantité voulue est réduite à celle de son équivalent

$$R(n) \sim \int_{\mathfrak{M}} f(\alpha) d\alpha$$

Question. Pour légitimer le remplacement de $f(\alpha)$ par ses versions approchées $F(\alpha)$ autour de a/q , Ford utilise une méthode d'élagage des arcs majeurs, réduisant leur taille sans que ces manipulations ne soient en rien justifiées. Comment rendre compte de ces choix, parfois de remplacer directement, parfois d'élaguer les arcs avant de remplacer, parfois ne remplaçant tout bonnement pas ?

Déroulement. La première étape est de vérifier que F_k est bien une approximation de f_k , ce qui est justifié par l'inégalité

$$F_k(\alpha) - f_k(\alpha) \ll \left(\frac{n}{q}\right)^{\frac{1}{k}} (1 + n|\beta|)^{-1}.$$

Cette borne est importante et est la clé de cette démarche d'approximation. L'idée est alors d'utiliser ces majorations directes à partir de cette borne ponctuelle pour remplacer f_k par F_k dans l'intégrale donnant le terme principal de $R(n)$, ce qui est réalisé dans l'article de Thanigasalam.

On doit en effet montrer que les défauts d'approximation intégrales

$$\int_{\mathfrak{M}} F_2 F_3 \cdots F_{p-1} (F_p - f_p) f_{p+1} \cdots f_s$$

sont suffisamment petits, permettant un remplacement successif des f_k par F_k par sommation.

Une méthode plus moderne, développée par Brüdern, se fonde sur le « lemme d'élagage » : à condition d'avoir des majorations par $(n/q)^{1/k} (1 + n|\beta|)^{-1}$ des valeurs moyennes des séries de Fourier $\Psi = F_2 F_3 \cdots F_{p-1}$, on obtient la borne voulue (le gain étant attendu sur un autre terme et sera suffisant pour rendre le tout négligeable) de la forme

$$Q^{-1} \Psi(0).$$

Ces estimations demandent souvent l'utilisation des inégalités de Cauchy ou de Hölder de façon à pouvoir contrôler les hypothèses pour appliquer le lemme d'élagage. Lors de l'une des sessions, chacun devait le faire indépendamment comme préparation. L'intérêt n'était pas nécessairement de trouver le meilleur résultat, mais au contraire de trouver des résultats différents et d'essayer d'en saisir les raisons, les limites, les caractéristiques, pour avoir un recul suffisant et utiliser l'approche la plus

efficace pour l'adaptation à notre cadre inédit, qui demeurait la motivation et le fil conducteur de l'étude. Notamment, le rôle de chacun étant de rester critique lors de la présentation des autres, vérifiant lemmes et hypothèses invoquées. Le meilleur des résultats obtenus par l'un d'entre nous s'est révélé incomplet, puisque l'une des hypothèses du lemme d'élagage utilisé n'était plus vérifiée. On obtenait une bonne borne pour le terme d'erreur, mais avec

$$F_3 F_5 \ll \left(\frac{n}{q}\right)^{\frac{5}{3}} (1 + n|\beta|)^{-1}$$

de sorte que le lemme était en fait illégalement appliqué. Cela a été l'occasion non pas d'abandonner son résultat, qui menait aux meilleures estimations finales, mais de faire en sorte qu'il fonctionne : cela nous a motivé à réduire les arcs majeurs de $n^{4/9}$ à $n^{1/3}$, de manière à réduire Q et à relâcher un peu la condition ci-dessus. Cela nécessite de contrôler la contribution des arcs intermédiaires correspondant aux dénominateurs q entre $n^{4/9}$ et $n^{1/3}$ et qui sont en effet négligeables avec les mêmes arguments que ceux utilisés pour borner les arcs mineurs.

Fruits. Cette étude met en lumière la flexibilité de la méthode, et la possibilité de changer les paramètres de la méthode en fonction des besoins, tout en ayant conscience des impacts : ici, on réduit les arcs majeurs à un sous-ensemble \mathfrak{M}_1 . Le lemme d'élagage devient un moteur pour les choix et un guide pour la démarche. On obtient alors, une fois cette étape réalisée pour toutes les valeurs de k ,

$$R(n) \sim \int_{\mathfrak{M}} F_2 \cdots F_s$$

Cette réduction des arcs majeurs est moralement négative, puisque le terme attendu comme principal n'est peut-être plus suffi-

samment significatif pour l'emporter sur les termes d'erreurs et donner l'équivalent conjecturé. En effet, si la réduction des arcs majeurs empire *in fine* l'étape de complétion des arcs majeurs, elle donne conscience de la liberté limitée que l'on a lors de l'élagage des arcs majeurs pour les calculs précédents.

Conclusion. Un écart de comportement clair se montre entre étudiants et chercheurs : si les étudiants sont tout à fait capables de suivre les lignes de calculs et de faire varier les valeurs, comprenant la démarche et adaptant les arguments après la dizaine de séances précédentes, ils n'osent pas modéliser le problème de manière plus générale, notamment introduisant des variables formelles à la place des valeurs particulières, théorisant la question puis la traitant ainsi de sorte à l'optimiser *a posteriori*. C'est donc un premier contact avec ce monde de l'exploration libre. La possibilité de faire des essais mène à une valorisation de l'erreur et une qualité de réflexion critique accrue. De plus, ces sessions auront permis de développer le travail d'équipe, la confiance en les autres et la conscience de la richesse du groupe, la dialectique de recherche et d'étude, ainsi que l'importance de la vérification par les pairs.

Termes principaux

La dernière étape de l'argument, plus arithmétique, menant au résultat de Ford ainsi qu'au résultat obtenu pour le problème inédit des puissances croissantes paires, est basée sur une étude plus fine de l'intégrale

$$R(n) \sim \int_0^1 F(\alpha) d\alpha$$

Des estimations analytiques de restes de séries explicites mènent à $R(n) \sim \mathfrak{S}(n)I(n)$,

où la série singulière est la partie arithmétique et est donnée par

$$\mathfrak{S}(n) = \sum_{q \geq 1} q^{-s} F_2 \cdots F_s e\left(\frac{an}{q}\right)$$

et l'intégrale singulière $I(n)$ est une fonction analytique explicite.

L'intégrale singulière est assez simple à estimer à partir d'un comptage diophantien, alors que la série singulière nécessite des comptages un peu plus fins en travaillant modulo p^k pour ensuite remonter au nombre de solutions globales. Ces arguments sont standard et suivent la même démarche que ce soit dans le livre de Vaughan ou les articles de Roth, Thanigasalam ou encore Ford. Nous ne les présentons donc pas ici. Ces sessions ont été une motivation pour étudier en détails certaines parties de l'article de Roth et comprendre de nombreux arguments et résultats d'arithmétique modulaire.

Conclusion

Nous avons présenté dans cet article une activité d'initiation à la recherche ayant lieu en premier cycle universitaire, mettant l'emphase sur la démarche d'investigation. Ce module s'est déroulé sur une durée d'un semestre et a été organisé sous forme de séminaires hebdomadaires mêlant chercheurs et étudiants. Cette initiative nous semble non seulement originale mais également fructueuse, tant du point de vue du développement des connaissances mathématiques théoriques que de celui de l'acquisition de compétences nouvelles et pertinentes dans le cadre d'une formation scientifique.

Le contenu en connaissances disciplinaires se doit d'exister et demeure primordial,

comme pour tout enseignement universitaire. À rebours de beaucoup de programmes, le choix s'est toutefois porté sur la qualité au détriment de la quantité, préférant remplacer une pléthore d'exemples dont on ne retient que la vague idée par l'exploration en profondeur d'une seule situation. Sans vouloir remettre en question la pertinence des connaissances brutes, nous défendons la nécessité de faire vivre les savoirs autrement. Nous inspirant de la pratique de la recherche, nous avons inséré les savoirs enseignés dans un contexte forçant à les comparer, les relier, les critiquer ; en somme : les faire vivre. Les savoirs accumulés parallèlement sans liens laissent alors place à un microcosme cohérent et discursif, menant vers un plus haut niveau de maîtrise. Une telle activité pourrait être proposée plus systématiquement dès le premier cycle universitaire, et la faisabilité d'un tel projet nous semble soutenue par l'absence de nécessité d'avoir un expert du sujet parmi les encadrants, de nombreux sujets de recherche courts et n'utilisant que des mathématiques élémentaires existant dans la littérature¹.

L'objectif de cette activité n'est cependant pas réduit à former des chercheurs, ni destiné à remplacer les cours magistraux tels qu'ils existent actuellement, mais de proposer une activité pédagogique nouvelle que nous avons montré être utile et digne d'intérêt. Bien au-delà des mathématiques présentes lors de ces sessions, ce sont de nombreux savoir-faire et savoir-être nouveaux qui ont été acquis à l'issue d'un tel module, indubitablement fondamentaux et valorisables dans tous les aspects du développement individuel. Le semestre était articulé autour d'un projet de recherche inédit, abordé comme un travail de groupe. Le cadre d'un projet filé

sur le temps long est un fertile terreau pour l'évaluation par compétences qui nous apparaît fondamentale, faisant briller la richesse apportée par la diversité des étudiants et valorisant leurs différents aspects. Cette activité permet donc d'ouvrir la porte à l'évaluation formative, associant les élèves, s'assurant une compréhension mutuelle trop souvent absente, faisant de l'évaluation un outil de progression. Ainsi, le peu de temps perdu comparé à un cours magistral classique est amplement compensé par la diversification des acquis des étudiants, leur gain en autonomie et le développement de compétences souhaitables pour tout citoyen.

Par-delà les nombreux savoirs, savoir-faire et savoir-être développés par une telle activité, nous tenons à mettre l'accent sur le changement de paradigme d'enseignement qu'elle permet d'amorcer et qui nous semble primordial, tendu vers un changement d'attitude des étudiants. Tout d'abord, l'activité proposée a montré qu'il était possible de réduire la distance entre enseignants et étudiants, mettant en place un contexte discursif où l'enseignant est un guide, un conseiller méthodologique, un interlocuteur bienveillant plutôt que des rails sur lesquels les étudiants resteraient contraints d'avancer. Les apprenants, plutôt que les savoirs, reviennent au centre des attentions ; leur développement, plutôt que le programme, redevient l'objectif de la formation. L'établissement d'un tel groupe de recherche et de partage fait partie d'une réelle formation à la vie scientifique et à la vie en société, et permet de remettre l'étudiant au cœur de la construction de ses connaissances. De plus, la démarche par essais et erreurs a réhabilité l'échec, actuellement perçu négativement : les essais infructueux sont des tremplins vers la compréhension et redeviennent partie d'une démarche normale. La peur d'essayer s'efface au profit de la curiosité et l'audace des étudiants, leur permettant d'adopter une attitude active et constructive.

¹ Non seulement dans la littérature de recherche habituelle, mais également dans les revues destinées aux étudiants ou dans les revues plus culturelles et récréationnelles telles le bulletin *American Mathematical Monthly*.

Les étudiants ne peuvent que rester condamnés à la passivité s'ils ne rencontrent pas l'opportunité d'agir, de prendre des initiatives, de s'épanouir librement. Alors que depuis un siècle déjà Piaget a introduit son éducation nouvelle et Bachelard a mis en exergue le caractère central des obstacles dans la pratique scientifique, il est temps de rompre le culte des cours passifs, masquant les difficultés comme les incertitudes, aveugles tant à l'évolution des connaissances qu'au changement des populations. Le succès fulgurant de *La Main à la Pâte* au primaire devrait rendre cette évidence éclatante et nous souhaitons fortement que de telles initiatives s'étendent et s'épanouissent à l'université. L'implication active ainsi que la synergie des étudiants est l'un des plus grands facteurs d'efficacité de l'apprentissage, et nous avons pu constater le succès du module proposé en ce sens. Dans ce monde si contraint par la culture et l'organisation, il est temps de faire confiance aux professeurs comme aux élèves, de laisser chacun respirer pour l'épanouissement de tous, ouvrant la porte à la créativité.

À tous les niveaux et en particulier à l'université nous prôtons un retour à l'activité, défendant ce principe fondamental de l'enseignement qu'est l'action, espérant que les mots d'Henri Marion rendront justice à cette évidence et sauront légitimer de futures activités dans la veine de celle présentée ici :

« *Quand un enfant, dit Kant, ne met pas en pratique une règle de grammaire, peu importe qu'il la récite : il ne la sait pas ; et celui-là la sait qui infailliblement l'applique, peu importe qu'il ne la récite pas. [...] Agir et faire, voilà le secret et, en même temps, le signe de l'étude féconde. Faire agir, voilà le grand précepte de l'enseignement. Autant vaut dire le précepte unique, car il contient en germe tous les autres.* » (Henri Marrison, 1888)

Quelle meilleure conclusion à cette expérience que d'invoquer les grandes maximes sur l'éducation : avoir une tête bien faite plutôt qu'une tête bien pleine ; apprendre à l'affamé à pêcher plutôt que lui donner un poisson. Ces grands préceptes plusieurs fois séculaires et connus de tous érigent l'action au sommet du phare guidant l'éducation. Comment se fait-il alors que tant d'enseignements se font encore à rebours, mus par le modèle de l'érudition et de la passivité ? Ni l'expérience ni les études cognitives ne le justifient, il est donc primordial de lutter contre ces rigidités culturelles pour un enseignement plus épanouissant pour les connaissances comme pour l'humain : faire moins mais faire mieux, compensant la perte en contenu par le gain en autonomie, en méthode, en maîtrise. On aura appris à mieux lire et à mieux apprendre : on aura appris à penser. On aura appris à mieux justifier et à mieux argumenter : on aura appris à être critique. On aura appris à essayer et à rencontrer l'échec : on aura grandi.

Bibliographie

- Alexandre, D. 2011. Les méthodes qui font réussir les élèves. Paris: ESF Editeur.
- Bachelard, G. 1938. La formation de l'esprit scientifique. Paris: Vrin.
- Biggs, J et Collins, K. 1982. Structures of Observed Learning Outcomes.
- Bloom, B. S. 1956. Taxonomy of Educational Objectives : The Classification of Educational Goals (I).
- Brüderm, J. 1988. "A problem in additive number theory."
- Brüderm, J. 1987. "Sums of squares and higher powers."
- Bruner, J. 1991. La culture donne forme à l'esprit. Esher.
- Davenport, H. 1980. Multiplicative Number Theory. Springer.
- Descartes, R. 1641. Méditations Métaphysiques.
- Ford, K. B. 1995. The Representation of Numbers as Sums of Unlike Powers.
- . 1996. The Representation of Numbers as Sums of Unlike Powers. II.
- Giordan, A. n.d. L'Agir et le faire.
- Grothendieck, A. n.d. Récoltes et Semailles.
- Helfgott, H. 2020. The ternary Goldbach problem.
- Lakatos, I. 1984. Preuves et Réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique. Hermann.
- Ministère de l'Éducation nationale. 2006. Le socle commun des connaissances et des compétences. DGESCO.
- Munshi, R. 2015. The circle method and bounds for L-functions: I-IV.
- Netz, R. 1999. Deuteronomic Texts : Late Antiquity and the History of Mathematics.
- Parmentier, J.-F. et Vicens, Q. 2019. Enseigner dans le supérieur - Méthodologie et pédagogies actives. Dunod.
- Piaget, J. 1975. L'équilibration des structures cognitives. PUF.
- Pierce, L. 2017. The Vinogradov Mean Value Theorem.
- Prost, A. 2004. Histoire de l'enseignement et de l'éducation, tome IV. Tempus, Perrin.
- Roth, K. F. 1951. A Problem in Additive Number Theory.
- . 1949. Proof that almost all Positive Integers are Sums of a Square, a Positive Cube and a Fourth Power.
- Serres, M. 2012. Petite Poucette. Le Pommier.
- Thanigasalam, K. 1968. On additive number theory.
- . 1980. On sums of powers and a related problem.
- Vaughan, R. C. 1989. A new iterative method in Waring's problem.
- Vaughan, R. C. et Wooley, T. D. 1995. Further improvements in Waring's problem.
- . 1991. On Waring's Problem : Some Refinements.
- Vaughan, R. C. 1997. The Hardy-Littlewood method. Cambridge University Press.
- Vygotsky, L. 1997. Pensée de Langage. La Dispute.
- Wooley, T. D. 1992. Large Improvements in Waring's Problem.
- Zarca, B. 2012. L'univers des mathématiciens : L'ethos professionnel des plus rigoureux des scientifiques. Presses Universitaires de Rennes.